FONDAMENTI DI GEOMETRIA

A PIÙ DIMENSIONI E A PIÙ SPECIE DI UNITÀ RETTILINEE

ESPOSTI IN FORMA ELEMENTARE

LEZIONI PER LA SCUOLA DI MAGISTERO IN MATEMATICA

DI

GIUSEPPE VERONESE

PROFESSORE NELLA R. UNIVERSITÀ DI PADOVA

Siffatti tentativi di rinnovamento radicale dei principii si incontrano non di rado nella storia dello scibile. Oggi poi sono un portato naturale dello spirito critico, cui a buon diritto si vanno sempre informando le indagini scientifiche (E. BELTRAMI: *Saggio di interpretazione della Geometria non Euclidea.* — Giorn. di Battaglini, 1869).

INTRODUZIONE

PRINCIPII FONDAMENTALI DELLE FORME MATEMATICHE ASTRATTE

PARTE I.

LA RETTA, IL PIANO E LO SPAZIO A TRE DIMENSIONI NELLO SPAZIO GENERALE

PARTE II.

LO SPAZIO A QUATTRO E A N DIMENSIONI NELLO SPAZIO GENERALE

APPENDICE

PADOVA

TIPOGRAFIA DEL SEMINARIO

1891

PREFAZIONE

Le vive dispute intorno alla geometria a più di tre dimensioni fra matematici e fra matematici e filosofi, originate a parer nostro in gran parte dal metodo puramente analitico col quale essa veniva trattata, e dallo scambio che si faceva e si fa tuttora delle varietà astratte o numeriche a n dimensioni cogli spazî geometrici propriamente detti; la credenza comune che sia sempre nascosto un concetto analitico nella considerazione di questi spazî e non si possano trattare sicuramente che con l'analisi [1]), la conseguente confusione sul concetto di spazio e quindi anche sull'essenza della geometria stessa, ci persuasero fin dal 1882 di ciò, che un libro inteso a mostrare elementarmente come la geometria degli spazî a più di tre dimensioni si possa svolgere in modo perfettamente analogo a quella del piano e dello spazio ordinario, sarebbe riuscito utile e importante, sia perchè avrebbe difeso il concetto prettamente geometrico di tali spazì, come anche perchè avrebbe reso più facile e comune lo studio di questa geometria [2]).

Se avessimo potuto ammettere come nota la geometria dello spazio ordinario, il lavoro sarebbe stato molto meno difficile e in più

1) « Il concetto di forme spaziali che non devono corrispondere all'intuizione ordinaria, può « essere svolto sicuramente soltanto colla geometria analitica (v. Helmoltz: Die Thatsachen in der « Wahrnehmung, pag. 24; Berlin, 1879).

« Parecchi confidano che si riescirà a liberare da concetti analitici, dall'uso delle coordinate, « persino la definizione degli spazî ad n dimensioni » (D'Ovidio - Uno sguardo all'origine ed allo sviluppo della matematica pura, pag. 58. Torino, 1889).

2) A questi studî abbiamo accennato in una nota della nostra memoria « La superficie omaloide normale del 4° ordine a due dimensioni dello spazio a cinque dimensioni, e le sue proiezioni nel piano e nello spazio ordinario » (Atti della R. Acc. dei Lincei, 1884), oltre che ad un nostro corso di lezioni tenuto nella R. Università di Padova intorno a questo argomento; lezioni che si ripeterono poi in alcuni degli anni successivi sui punti principali di questo libro. Il manoscritto di quest'opera fu consegnato alla R. Acc. dei Lincei fino dal 1889, ma, quando potemmo, abbiamo tenuto conto, specialmente nell'appendice, che fu l'ultima parte ad esser stampata, dei lavori pubblicati su questo argomento dopo il 1889.

breve tempo stampato. Ma non lo potevamo per due ragioni: prima, perchè dovevamo risalire alle origini dei concetti della geometria, svolgendo graduatamente quella della retta, del piano e dello spazio a tre dimensioni per passare poi nello stesso modo a quella degli spazî superiori, o iperspazî; poi, perchè accettando le premesse e le deduzioni della geometria elementare ordinaria così come fu svolta sino ad oggi avremmo dovuto porre a base delle nostre considerazioni la proprietà che il mondo fisico è a tre dimensioni nei limiti delle nostre osservazioni, *proprietà che non è punto necessaria allo svolgimento scientifico della geometria.*

D'altronde per ricostruire col metodo sintetico i principî fondamentali di questa scienza, ci pareva indispensabile considerarli da un punto di vista più generale, così che la geometria dello spazio ordinario, come quella di ogni altro spazio ad n dimensioni, avesse i proprî fondamenti e le proprie leggi nei fondamenti e nelle leggi dello spazio generale; e ci pareva d'altra parte necessario, anche per sbarazzare la via da ogni pregiudizio, di non presuppore alcuna cognizione matematica, ma di ammettere soltanto nel lettore una qualche attitudine e abitudine a pensare matematicamente.

Senonchè a voler cominciare dai fondamenti, ci siamo trovati dinanzi alla questione molto intricata degli assiomi geometrici, e quindi anche a quella dei principî della matematica pura che è intimamente collegata colla prima, e intorno alle quali si sono affaticati non pochi dei più illustri matematici, specialmente di questo secolo.

In questa prefazione diamo un resoconto sommario del nostro metodo e svolgiamo considerazioni colle quali e coll'aiuto dell'appendice si possono meglio giudicare le idee che dominano nella nostra opera. In questo resoconto facciamo alcune considerazioni sugli assiomi geometrici, e sulla geometria propriamente detta, che è utile di leggere per formarsi un'idea chiara delle serie difficoltà che presenta una tale questione e della necessità che siano rimosse. Ma il corpo del libro ne è indipendente, dimodochè chi non ha una sufficiente preparazione o chi incontra qualche difficoltà nel comprendere o giudicare certe discussioni delicate, le quali hanno bisogno dello svolgimento del testo per poter essere esattamente interpretate, può passare senz'altro alla lettura del testo riservandosi di tornare poi su questo resoconto [1]).

---

1) È per questo che siamo rimasti incerti dapprima se non fosse stato utile sopprimere addirittura la prefazione, limitandoci a poche parole, come si fa oggi comunemente. Ma ci convincemmo per l'opposizione accanita che incontrarono certe idee, mai ben definite, che anche a costo di non riuscire brevi quanto avremmo voluto, era necessario accennare come questa opposizione rispetto a certe nostre definizioni o ipotesi non abbia alcun fondamento; imperocchè non vi è campo della matematica nel quale i pregiudizî siano radicati maggiormente come in quello dei principî di essa,

Le cose pensate o hanno o non hanno necessariamente un'immagine in un campo esistente effettivamente fuori del pensiero; ad es. il punto della geometria appartiene alle cose della prima categoria, perchè vi sono oggetti esterni che ci forniscono o risvegliano in noi direttamente l'idea del punto, e senza di cui non si ha il punto geometrico propriamente detto [1]).

Il numero, che è nella sua prima formazione il risultato della funzione del numerare oggetti, anche puramente astratti [2]), appartiene invece alle seconda categoria, perchè non vi è bisogno di alcun oggetto fuori del pensiero che debba rappresentarlo, vale a dire che ne sia l'immagine, per avere la determinazione matematica di esso [3]).

Le cose della seconda categoria si chiamano *forme*, e le scienze che si occupano delle forme scienze *formali*. Tali sono la logica e la matematica pure. In queste scienze la verità scaturisce dall'armonia dei diversi atti del pensiero.

Le scienze di oggetti esistenti effettivamente fuori del pensiero si chiamano *sperimentali*. La verità in queste scienze riposa invece sull'armonia del pensiero coll'oggetto fuori di esso, e quindi siamo costretti a ritenere in esse come impossibile tutto ciò che è in contraddizione colle leggi del pensiero stesso e dell'oggetto, o per meglio dire della rappresentazione mentale di esso.

Le scienze formali hanno il loro fondamento sui principî, sulle operazioni mentali, e su definizioni o ipotesi: la dimostrazione si basa in esse sulla combinazione dei diversi atti del pensiero senza entrare

---

e specialmente della geometria; e ove sia più facile, sia per la oscurità in cui cadono inconsapevolmente anche autori illustri, sia per critiche poco attente e coscienziose di travisare i concetti altrui. Questa prefazione serve a far conoscere in riassunto gli scopi, il metodo e i risultati principali dell'opera, e facilitare la lettura del testo a coloro che hanno bisogno di esaminare soltanto lo svolgimento di esso relativamente ad una data idea, perchè non tutte le idee fondamentali sono dipendenti in modo che l'esclusione di una fra esse conduca a rigettare anche le altre. Certo è che tutte hanno la loro ragione d'essere nel loro insieme, e che quindi il libro va giudicato nel suo complesso e nell'unione dei diversi suoi scopi.

Parrà a prima vista che si cominci troppo tardi la trattazione della geometria; ma ciò non è che apparente, perchè in fondo della prefazione non si ha alcun bisogno per comprendere il testo, e nella introduzione sono svolte le parti semplici e le conseguenze dell'assioma II e dell'ipotesi I della parte I. Che se poi si concedono le proprietà dell'introduzione, lo studio della geometria si può cominciare addirittura dalla parte I, come quello degli spazî a quattro e a n dimensioni dalla parte II.

1) Intr. pag. 47 e parte I. pag. 209-210.

2) Intr. pag. 26-27.

3) Con ciò non intendiamo dire che le cose della seconda categoria non si pensino in seguito all'osservazione di oggetti fuori del pensiero; l'importante è di vedere se la cosa pensata possa essere definita o data matematicamente senza l'aiuto necessario dell'osservazione sensibile, vale a dire se possa essere indipendente da questa, come avviene precisamente del numero, ma non del punto. Come pure non intendiamo dire che il punto non sia un prodotto del nostro spirto, ma lo è necessariamente combinato colla sensibilità esterna.

in altri campi. Siccome nelle scienze sperimentali vi deve essere armonia tra l'oggetto ed il pensiero, così esse si fondano su quelle verità che si intuiscono colla percezione di quell'oggetto, ma che non possono essere dedotte le une dalle altre. Queste verità si chiamano *assiomi*, e le verità dedotte dagli assiomi *teoremi*. Vi sono poi nella scienza geometrica assiomi che si intuiscono per l'osservazione degli oggetti esterni e si estendono a quelli che siamo indotti a ritenere realmente esistenti fuori di questo campo; ve ne sono invece altri che riguardano soltanto gli oggetti che immaginiamo esistano fuori di questo campo, i quali pur essendo uguali ai primi, hanno solamente un'esistenza astratta; dimodochè la geometria come noi la consideriamo, si può chiamare una scienza *mista*. Questi ultimi assiomi vengono accettati come verità fondamentali quantunque non siano comprovati dalla nostra esperienza, senza però che contraddicano alle leggi del campo di essa, e perciò essi non hanno l'evidenza dei primi, e sono propriamente *postulati* o *ipotesi*.

È chiaro poi che tra gli assiomi di una special scienza sperimentale non bisogna annoverare quei principî che appartengono alla logica pura, e sono necessità dell'intendimento umano e patrimonio di tutte le scienze.

Le scienze formali sono per noi esatte, quelle sperimentali tanto più lo sono quanto più semplici e intuitivi sono gli assiomi propriamente detti, sui quali esse si appoggiano, e quanto più presto esse possono sostituire i loro oggetti mediante forme astratte e svolgersi col metodo deduttivo. La scienza sperimentale più esatta è la geometria, perchè gli oggetti fuori del pensiero, che servono alla determinazione degli assiomi, vengono sostituiti nella nostra mente da forme astratte, e quindi le verità degli oggetti si dimostrano colla combinazione delle forme già ottenute indipendentemente da ciò che succede di fuori. È per questo che non senza qualche ragione la geometria (come per motivi analoghi la meccanica razionale) va considerata fra le matematiche pure; sebbene essa sia nella sua radice una scienza sperimentale [1]). Si entra tosto nel campo pratico quando si cerca una costruzione empirica di queste verità, operando cogli oggetti primitivi in modo analogo a quello usato con le forme astratte, a cui hanno dato origine. Queste operazioni nel di fuori si potranno eseguire soltanto

---

1) Ormai sull'origine empirica della geometria si può dire che i geometri sono tutti concordi nell'ammetterla. Gauss nella sua lettera a Bessel (Göttingen 27 f. 1829 - Briefwechsel zwischen Gauss und Bessel) esprime appunto la convinzione che la geometria non si possa fondare *a priori*, e così pure in un'altra lettera a Bessel (9 ap. 1830) ripete lo stesso concetto. Così Grassmann - Ausdehnungslehre. Einl. Leipzig, 1844) si esprime nel medesimo senso; ma per essi la geometria è sempre a tre dimensioni (vedi app.).

con oggetti di un campo ristretto, cioè del campo delle attuali nostre osservazioni esterne; ma l'impossibilità pratica di fare altrettanto con altri oggetti o di questo medesimo campo o fuori di esso non infirma per nulla le verità già acquisite in un campo astrattamente più ampio.

Noi distinguiamo anzi nettamente la geometria dalle sue pratiche applicazioni, e troviamo appunto assiomi che non sono necessari per lo svolgimento scientifico della geometria, mentre lo sono per le sue pratiche applicazioni.

La geometria teoretica pertanto si distingue dalle altre scienze sperimentali esterne in questo: che essa ha bisogno dell'osservazione esterna per fissare i suoi assiomi propriamente detti, ma se ne rende tosto indipendente considerando non già i corpi stessi bensì il luogo che essi occupano nello spazio intuitivo vuoto, diventando subito dopo una scienza puramente deduttiva [1]). E la meccanica teoretica stessa non può liberarsi a stretto rigore dai corpi, perchè ad es. il principio del movimento riguarda i corpi stessi e non il luogo da essi occupato. In ogni modo la geometria teorica non ha bisogno nei suoi fondamenti dell'aiuto necessario di nessun'altra scienza sperimentale, ad es. della meccanica e della fisica (come meglio diremo in seguito), mentre invece queste scienze hanno bisogno della geometria.

Quand'è che un'ipotesi matematica è possibile? *Nel campo matematico è possibile la definizione, il postulato o l'ipotesi ben determinata, i cui termini non si contraddicono fra loro e non contraddicono ai principî, alle operazioni logiche e alle ipotesi già stabilite, e alle verità che da esse derivano.*

Ben determinata vuol dire che corrisponde ad un solo concetto, senza cioè che vi sia dubbio sul suo signficato. Una nuova forma, o una proprietà di una data forma stabilita per mezzo di un'ipotesi, non deve essere unicamente dipendente dalle verità già premesse, perchè in questo caso o è conseguenza immediata di quelle verità, o non è tale, ed allora deve essere dedotta dalle premesse.

Un'ipotesi è *matematicamente falsa* soltanto quando stabilisce una proprietà che è o può essere dimostrata in contraddizione con le verità precedenti, o con quelle che da queste si possono dedurre.

La possibilità di un'ipotesi non dipende dalla sua fecondità, che ci dà il valore matematico dell'ipotesi stessa. Un'ipotesi può essere possibile, ma essere anche tale da non condurre ad alcun risultato o da restringere il campo delle nostre ricerche. Questa è un'altra questione, certo molto importante, perchè l'ipotesi deve lasciare li-

1) Parte I, pag. 209-210.

bero campo alla deduzione e al bisogno che ha il nostro spirito di non porsi alcun limite ingiustificato nella ricerca del vero matematico; e perchè ogni ipotesi deve servire a scoprire nuove verità o a meglio collegare verità già conosciute. Ma il poco valore di un'ipotesi non è un argomento efficace contro la possibilità di essa.

Ogni nuova forma stabilita o data per mezzo di un'ipotesi possibile deve essere sottoposta agli stessi principî e alle stesse operazioni mentali, necessarie alla ricerca del vero. Questa è evidentemente una necessità logica. Ma le leggi delle operazioni matematiche, a cui è assoggettata, dipendono dalla definizione o costruzione di essa, se questa è ben determinata; e non è *a priori* escluso il caso che queste leggi siano diverse da quelle che valgono per le forme prima considerate [1]). Non è dunque permesso *a priori* di assoggettare in tal caso alle stesse leggi le operazioni coi nuovi enti.

Un'ipotesi A è indipendente da un'altra ipotesi B quando A o la sua contraria (non-A) non si deduce da B.

Un' ipotesi indipendente dalle precedenti, e in sè non contraddittoria, non conduce necessariamente a contraddizioni. Invero, occupandosi la matematica delle forme, essa dovrà considerare almeno una prima forma e distinguerla dalle altre mediante alcune sue proprietà. Se una di queste proprietà A è indipendente dalle altre B, C, D ecc. ed è ben determinata, ciò significa che A o la sua contraria non è conseguenza di B, C, D ecc. Se A conducesse necessariamente ad una contraddizione significherebbe che da B, C, D ecc. si dedurrebbe la proprietà contraria non-A.

Certo che l'indipendenza o l'arbitrarietà di un'ipotesi è sempre subordinata, come si disse, a quelle già stabilite. Si può dunque dire che stabiliti i caratteri delle forme matematiche la possibilità matematica è regolata dal principio di contraddizione, cioè «A è A e non è non-A». E la possibilità diventa per la matematica realtà, sebbene astratta, perchè le forme del pensiero matematico sono vere quanto le forme della sensibilità che hanno una realtà concreta. Nessuno infatti può dubitare dell'esistenza del nostro intelletto e delle sue funzioni logiche senza contraddirsi.

Se si prova l'indipendenza dell'ipotesi dalle premesse, allora è dimostrata anche la sua possibilità, e se si prova prima la possibilità, il che nella matematica è strettamente necessario, può non esserne provata l'indipendenza.

Se un'ipotesi anche dopo una lunga serie di ricerche non ha condot-

---

1) Così ad es. la somma dei numeri transfiniti di G. Cantor (intr. pag. 102) non soddisfa alla legge commutativa, come quella dei numeri finiti.

to ad alcuna contraddizione, si ha l'induzione della possibilità ma non la certezza che essa non possa condurre con ulteriori sviluppi a qualche contraddizione, non essendo escluso che da una falsità si possa dedurre una o più verità. E in matematica non basta la sola induzione della verità, per quanto fondata; sebbene il sentimento sia pur necessario anche nelle matematiche discipline, siccome da esso specialmente dipende il progresso della scienza, perchè da una pura combinazione di segni o di oggetti senza un'idea direttiva nulla si può ricavare.

La dimostrazione della possibilità delle ipotesi non si può dunque trascurare, come pur vien fatto specialmente ove si fa uso del convenzionalismo nello studio dei fondamenti, o la si dimostra indirettamente ricorrendo ad esempi tratti da teorie che si vogliono studiare più tardi; metodo codesto che non lascia sempre soddisfatti. Se manca una dimostrazione che giustifichi l'ipotesi, basta poterla giustificare coll'esperienza diretta, come avviene ad es. per gli assioni geometrici; appunto per l'armonia che come abbiamo detto esiste fra la percezione degli oggetti e le leggi logiche del pensiero stesso. Ma veramente non si deve essere contenti finchè non si è data una dimostrazione per via puramente logica, e per riuscirvi occorre sopra tutto partire da assiomi semplici, oppure da assiomi dei quali si esaminino le parti semplici; e quando non la si può dare, è bene fare dei tentativi, che ad altri possono servire in ulteriori ricerche.

Rimane invero ancora da trattare la questione generale se e quando un gruppo di assiomi, postulati o convenzioni, si può ritenere astrattamente possibile. Riteniamo che bisogna ricorrere appunto alle operazioni e agli assiomi logici, come noi abbiamo fatto per le nostre operazioni e ipotesi dell'introduzione. Però è anche vero che se da un'ipotesi falsa si possono ricavare delle verità, gli esempi dati su questo proposito sono così semplici e la falsità del resto così evidente da non poter dubitare che qualora un'ipotesi matematica sia tutta o in parte falsa essa non conduca ben presto a qualche contraddizione; eccetto che non si abbia tanta cecità da voler evitare l'effetto delle contraddizioni con altre ipotesi false, come pure è accaduto in passato. Nè bisogna confondere una tale questione con quelle ipotesi che essendo pure in tutto o in parte false, nel corso della deduzione vengono sostituite dalla mente del ricercatore con ipotesi esatte o tali da evitare le falsità delle prime.

Quando è invece che un'ipotesi è *geometricamente possibile*? Abbiamo detto che le ipotesi di una scienza sperimentale non solo non devono contraddire ai principî e alle operazioni logiche, ma eziandio alle proprietà dell'oggetto speciale della scienza stessa. Per

i caratteri che distinguono la geometria, un'ipotesi astratta è geometricamente possibile quando essa non contraddice agli assiomi necessari allo svolgimento teorico della geometria, che prendiamo dall'esperienza, ossia alle proprietà dell'intuizione spaziale nel campo limitato di essa, corrispondente a quello delle nostre osservazioni esterne.

Le ipotesi astratte possibili che allargano il campo della geometria possono servire alla ricerca del vero nel campo concreto più ristretto, senza che per questo le suddette ipotesi suppongano necessariamente la realtà concreta delle forme da esse definite. In questo la geometria, per quanto abbiamo detto, si distingue dalle scienze oggetto costante delle quali sono i fatti del mondo esteriore, e in cui, come ad es. nella fisica, le ipotesi devono aver di mira soltanto la spiegazione e il concatenamento dei fenomeni naturali, senza per questo che esse debbano sempre corrispondere a fatti reali; le quali ipotesi poi possono anche essere modificate o sostituite con altre. Il nostro spazio generale è geometricamente possibile, e quindi esso ha una *realtà astratta*, senza intendere con ciò che il mondo esteriore in sè sia una rappresentazione completa di questo spazio. Così, coll'ipotesi delle diverse unità rettilinee, che è conseguenza di quelle da noi fatte sull'infinito e sull'infinitesimo attuale, o in altre parole dell'indipendenza della geometria dall'assioma V d'Archimede, non abbiamo bisogno di *credere* alla *realtà concreta* dell'infinito e dell'infinitesimo attuale. Anche se fosse dimostrato ad es. che realmente non esiste in concreto il nostro spazio generale, non per questo geometricamente saremmo obbligati a rinunciare a questa ipotesi [1]). Se non possiamo intuire ad es. le figure a quattro dimensioni come intuiamo quelle a tre, ciò non significa che l'ipotesi delle quattro dimensioni nè in senso astratto, nè in concreto contraddica alle ipotesi e quindi alle proprietà geometriche dello spazio intuitivo a tre dimensioni [2]).

Sono da escludere invece quelle ipotesi del campo corrispondente a quello delle nostre osservazioni esterne le quali contrad-

---

1) Quali geometri noi non abbiamo dunque nulla di comune cogli spiritisti e coll'abilità dei *medium*. Quando persone anche illustri assicurano che certi fenomeni spiritistici avvengono, dubitiamo della loro verità di fatto per il modo misterioso con cui sono condotte le osservazioni, com'è ad es. dei nodi e del tavolo descritti dal prof. Zöllner (Wiss. Abh. Leipzig 1872), e che il prof. Zöllner stesso ebbe la cortesia di farci vedere a Lipsia.

Però se fisicamente l'ipotesi della quarta dimensione o dello spazio generale potesse servire a gettare nuova luce sui fenomeni naturali e sulle loro cause sconosciute allora l'ipotesi sarebbe scientificamente giustificata, e il fisico troverebbe nel nostro libro le proprietà geometriche fondamentali di cui avrebbe bisogno. Ma anche qui è bene rilevarlo, il valore dell'ipotesi geometrica è indipendente da quello che può avere l'ipotesi fisica.

2) Vedi più sotto e l'appendice.

dicono all'intuizione spaziale, come ad es. quella che il cerchio non sia una linea chiusa o che il cerchio abbia assintoti reali [1]).

Se si fosse bene stabilito quando un'ipotesi è matematicamente o geometricamente possibile, si sarebbero evitate tante dispute inutili sulla possibilità di quasi tutte le nuove ipotesi che di mano in mano hanno arricchito il patrimonio della scienza. La matematica pura non respinge che ciò che è falso, e quindi per combattere un'ipotesi matematica bisogna dimostrare che è falsa, ma la dimostrazione deve essere logico-matematica non filosofica nello stretto senso della parola; e per dimostrare che è falsa occorre dimostrare che essa conduce necessariamente ad una contraddizione, quando però è un'ipotesi semplice; chè se fosse composta alcune parti di essa potrebbero essere anche vere e feconde. Se il problema matematico sui fondamenti della matematica e della geometria si spinge fino alla soglia del problema filosofico intorno all'origine delle idee matematiche e geometriche, però non la oltrepassa. Questo è certo un gran bene per la nostra scienza, perchè altrimenti essa sarebbe in balìa nei suoi principî delle molteplici opinioni filosofiche che si disputano la verità [2]). Però, per timore di cadere nell'indeterminato non è neppure conveniente il ridurre la matematica e la geometria nei loro fondamenti a un puro convenzionalismo di segni, ma bensì esse vogliono essere trattate con metodo filosofico, vale a dire rendendo più chiara che è possibile la natura delle cose di cui si occupano, senza negare per questo l'importanza di altri metodi sotto punti di vista diversi, ma più ristretti.

Che di una data ipotesi o convenzione si possa far senza, ad es. di quella dei numeri immaginari, è possibile, ma oltre che ciò avrebbe per conseguenza una restrizione del campo matematico senza alcuna giustificazione, questo fatto non dimostrebbe nulla contro l'ipotesi e le sue conseguenze nel campo stesso indipendente da questa ipotesi.

---

1) Vedi l'appendice.

2) Chi vuol avere un'idea del problema filosofico intorno ai concetti fondamentali della matematica e della geometria può leggere ad es. l'opuscolo di F. Masci: Sulla natura logica delle conoscenze matematiche (Roma 1885), sebbene egli sia kantiano in quanto ei sostiene la verità assoluta di tutti i postulati euclidei, e neghi la possibilità di una geometria a più di tre dimensioni. Non sembra però che Kant sia stato sempre contrario a questa geometria, chè anzi egli credeva all'esistenza di varî spazî, se si deve giudicare da quanto egli dice nei suoi Gedanken der wahren Schätzung der lebedingen Kraft. Kant's Werke, vol V pag. 25. Veggasi B. Erdmann. «Die Axiome der Geometrie; Leipzig, 1871), cosí pure B. Baumann: Die Lehren von Raum, Zeit und Mathematik in der neuren Phil. nach ihrem ganzem Einfluss dargestellt und beurtheilt; Berlin, 1868-1869. Nel primo volume e in molta parte del secondo è data un esposizione estesa e critica dal punto di vista filosofico dell'autore, delle idee dei principali filosofi da Suarez fino ad Hume intorno ai concetti fondamentali delle matematiche. Del resto si può dire che non vi sia valente filosofo che non siasi occupato con molto interesse delle idee matematiche, e non abbia spesso ricorso ai risultati matematici a sostegno delle proprie considerazioni.

Può darsi che ipotesi feconde possano condurre a contraddizioni, come avvenne nel calcolo differenziale e integrale, ma allora fa d' uopo osservare se ciò dipenda dal principio dell' ipotesi, nel qual caso bisogna respingerlo, o se dipenda invece dal fatto che esso non sia stato ben definito, e quindi non sia stato ben circoscritto il campo della sua validità. È per questo che ad evitare tali gravi inconvenienti bisogna considerare separatamente le parti semplici di cui è costituita l' ipotesi, e occorre inoltre che esse siano giustificate (come meglio diremo poi) dai principî e dalle operazioni logiche o almeno da fatti sperimentali.

Se ci si vuol chiamare *razionalisti* o *idealisti* per le idee qui esposte, accettiamo il titolo per distinguerci da coloro che ingiustificatamente vorrebbero negare allo spirito matematico e geometrico la massima libertà logica possibile, domandandosi per es. ad ogni nuovo risultato o ad ogni nuova ipotesi se abbia o no una rappresentazione sensibile, per es. nella geometria una pura rappresentazione sensibile esterna. Ma lo accettiamo nel senso che non si attribuisca ad esso alcun significato filosofico propriamente detto [1]).

Quali matematici noi ci appoggiamo ai fatti mentali o della sensibilità che non possono essere contestati da alcuno, e la nostra guida è il principio di contraddizione. Ma dobbiamo essere naturalmente avversi a quei sistemi filosofici, i quali conducano appunto a contraddizioni o a restrizioni non necessarie nel campo matematico o geometrico [2]). Il matematico può essere un filosofo nel senso che da una

---

1) Nel libro di Du Bois Reymond «Allgemeine Funktionentheorie; Tübingen, 1882, sono discussi i sistemi matematici dell' idealista e dell' empirista puro (Wundt «Logik Vol. II; Stuttgart, 1885» osserva che in senso filosofico é meglio dire realista e nominalista). Ma tutti e due sostengono i loro sistemi con argomentazioni filosofiche, che non possiamo accettare (l. c. ad es. pag. 86, 110-111 e 114-116). Il sistema dell' idealista come avremo occasione di vedere non è scevro da errori e da indeterminatezze.

2) Posta così la possibilità geometrica non possiamo essere indifferenti, come sostiene l' insigne F. Klein (Vergleichenden Betrachtungen über neuere geom. Forschungen; Erlangen, 1872. opp. trad. italiana di G. Fano negli Annali di Matematica, 1890) dinanzi al problema, se ad es. il postulato delle parallele Euclideo sia o no vero in senso assoluto rispetto alla nostra intuizione, come sostengono i Kantiani. Se esso fosse realmente vero, i *piani* di Lobatscheswsky e di Rieman non avrebbero più ragione di essere; e rimarrebbe soltanto vera la geometria della pseudosfera o della sfera o della stella nello spazio Euclideo o di altre loro rappresentazioni geometriche in questo spazio. Quali geometri dobbiamo essere contrari all' opinione di Kant, perchè l' osservazione, o l' intuizione attuale, non ci aiuta che *approssimativamente* a decidere la questione nella parte di spazio che corrisponde al campo delle osservazioni esterne. Se noi crediamo di intuire tutto lo spazio ciò si spiega perchè noi ci trasportiamo coll' immaginazione in ogni punto di esso, e vi applichiamo l' intuizione che si esercita in un campo ristretto. Matematicamente la questione suddetta non ci riguarda, ma geometricamente sì. Del resto, poichè rimane indeciso quale sia il postulato vero delle parallele, aspettiamo che si svolga la geometria secondo i concetti di Kant e si dimostri intuitivamente *a priori* la necessità dell' assioma suddetto. v. Helmotz (l. c.) sostie-

nuova esposizione dei suoi principî la filosofia può trarre grande giovamento, ma il suo aiuto a questa scienza è sempre indiretto; mentre d'altra parte il filosofo, come tale, non può combattere le ipotesi matematiche o geometriche, ma da esse deve cercare di trarre il maggior profitto, quando sono ben determinate.

Con questo idealismo noi abbiamo almeno il vantaggio sull'empirista che facciamo uso di tutte le ipotesi possibili nella ricerca della verità, e che quindi possiamo giungere più presto e meglio di lui a nuove verità nel campo stesso in cui egli vuol rinchiudersi. Noi pretendiamo inoltre maggior rigore, perchè per noi nulla è trascurabile in senso assoluto, neppure l'infinitesimo aggiunto che sia al finito; e se qualche cosa è trascurabile in confronto di altre, lo deve essere per una ragione matematica, non per pratica approsimazione. L'empirista non può accusarci di non tener conto dello scopo pratico della scienza, e che le nostre ipotesi geometriche non abbiano radice nell'esperienza, o non siano giustificate dai fatti mentali [1]).

Noi riconosciamo ben volentieri l'aiuto che presta l'osservazione empirica alla matematica in generale, e come essa sia necessaria per stabilire gli assioni geometrici; ma non possiamo disconoscere altresì che il materiale greggio che ci forniscono le sensazioni viene elaborato dal nostro intelletto, e che l'elemento soggettivo nelle matematiche pure, nella geometria e nella meccanica razionale ha il soppravvento sull'elemento obiettivo; e che d'altronde tutti possediamo le prime forme ideali geometriche prima ancora di cominciare a studiare geometria, senza bisogno di supporre che esse siano gli oggetti stessi reali con tutte le loro inesatezze. Non sono pochi i filosofi empiristi, i quali ritengono che le forme geometriche siano forme ideali, o almeno che non siano le sensazioni stesse che gli oggetti producono in noi [2]). Esse sono un prodotto dell'intuizione combinata coll'astrazione. Allo Stuart Mill il Cayley osserva acutamente che se non avessimo

---

ne contro i Kantiani che lo spazio può essere una forma dell'intuizione a priori, ma che non lo sono gli assiomi. Wundt (Logik, Vol. I) osserva che una tale opinione gli sembra contraddittoria. Quali geometri dobbiamo ammettere la facoltà che noi abbiamo di intuire lo spazio, e che nessuno può negare, ma la facoltà non è l'intuizione medesima, e per lo svolgimento della stessa geometria dobbiamo ritenere che l'intuizione spaziale sia appunto il risultato di questa facoltà combinata coll'esperienza (vedi pag. 258 e seg.).

1) Vedi a questo proposito l'appendice ove esaminiamo l'opera del sig. Pasch « Ueber neuere Geometrie; Leipzig, 1882 ».

2) Vedi ad es. Masci, Erdmann, Baumann, Wundt l. c. Locke ad es. che è un deciso empirista sostiene che l'idea di spazio puro è distinta dall'idea di rigidezza o solidità dei corpi, e questa dall'idea di spazio, e che le parti dello spazio sono immobili (Baumann, l. c. pagina 377).

il concetto della linea retta non potremmo dire che la retta non esiste in natura [1]).

Ciò che vale per un' ipotesi matematicamente possibile deve valere anche per la dimostrazione sia nella matematica pura come nella geometria; bisogna cioè che in ogni parte semplice di cui è composta, essa sia pienamente determinata dalle proprietà premesse, o da proprietà che siano di quelle immediata ed evidente conseguenza o forme diverse delle proprietà suddette, e non vi sia nessuna contraddizione nella catena di quelle che la costituiscono.

Le condizioni alle quali devono essere assoggettati gli assiomi geometrici e le ipotesi per trattare il problema scientifico che ci siamo proposto in tutta la sua generalità e semplicità, sia per quanto abbiamo detto come per ciò che diremo più sotto, sono le seguenti:

I. che siano separate dagli assiomi geometrici le verità che derivano dagli assiomi logici per mezzo di operazioni logiche;

II. che gli assiomi propriamente detti esprimano le verità più semplici e intuitive, senza contenere altri concetti i quali debbano essere dati o dedotti più tardi; che dagli assiomi si deducano tutte le altre proprietà senza introdurne tacitamente di nuove; e finalmente che gli assiomi siano dati fin da principio in modo da lasciar campo ai diversi possibili sistemi geometrici;

III. che siano separati gli assiomi necessari per lo studio della geometria da quelli necessari soltanto per le pratiche applicazioni di essa;

IV. che gli assiomi siano indipendenti, badando perciò anche al loro ordine, e a maggior ragione che non si contraddicano fra loro;

V. che il metodo di trattazione sia elementare e basato sul processo costruttivo dell' intuizione spaziale;

VI. che gli assiomi, i teoremi e le dimostrazioni fin da principio non contengano alcun elemento intuitivo indeterminato, in modo cioè che facendo astrazione dall' intuizione, dal sistema geometrico rimanga un sistema di verità puramente astratte, nel quale gli assiomi occupino il posto di definizioni o ipotesi astratte ben determinate.

In primo luogo non bisogna confondere i dati dell' esperienza o dell' intuizione colle necessità o definizioni logiche (o queste con quelle). Per es. la definizione che si dà di figure uguali quando cioè l' una si può trasportare senza deformazione sull' altra, è ritenuta ordinaria-

1) Discorso tenuto all' associazione britannica delle scienze; Londra 1883. trad. francese nel Bulletin des sciences mathématiques Genn.; e Febb. 1884.

mente una definizione geometrica, mentre essa, come quella di due cose qualunque, deriva dall'assioma logico d'identità [1]). Così dicasi della proprietà che due grandezze uguali ad una terza sono uguali fra loro. È per questo che è data la condizione VI; con essa è facile vedere quali sono i principî e le definizioni logiche e le proprietà che da esse necessariamente derivano, ed avere il rigore desiderato; senza trascurare per ciò la parte essenziale che deve avere l'intuizione spaziale nella geometria. Basta aprire un trattato qualunque di geometria elementare per convincersi che questa condizione non è punto osservata. Ad es. Euclide parla nelle sue prime definizioni di lunghezza, larghezza, di grandezza senza aver mai detto che cosa siano. Così la retta è per Euclide quella linea che giace ugualmente sui suoi punti, l'angolo di due rette che si incontrano è la loro inclinazione, quando non sono per diritto fra loro, ecc. Parla nelle nozioni comuni dell'addizione e sottrazione delle grandezze senza dire che cosa si debba intendere con queste operazioni. Così si parla comunemente anche nei migliori trattati moderni, di spazio, di superficie e di linee senza aver dato di essi alcuna definizione o costruzione matematica ben determinata, dimodochè facendo astrazione dall'intuizione da tutto ciò non resta alcun oggetto determinato. Si fa pure uso dell'assioma del movimento dei corpi senza che sia detto che cosa gli corrisponda in senso astratto, e che cosa corrisponda astrattamente al movimento senza deformazione, ecc.

Si dice che alcune nozioni, ad es. quella di spazio, non si potranno mai definire. Anche qui fa d'uopo distinguere. Lo spazio come intuizione non si definisce, ma lo spazio come concetto si può definire geometricamente per es. come facciamo noi [2]). E se l'intuizione è necessaria per l'essenza della geometria, non deve essere però elemento necessario, per quanto utile, nello svolgimento logico della geometria [3]). La differenza che abbiamo rilevata fra assiomi propriamente detti, postulati o ipotesi sparisce e deve sparire quando si faccia astrazione dall'intuizione.

Gli assiomi devono esprimere proprietà intuitive, appunto perchè la condizione prima della geometria è l'intuizione spaziale, vale a dire essi devono dare l'immagine netta delle cose che definiscono [4]). A questo

1) Vedi più avanti.

2) Vedi parte I libro III.

3) I filosofi i quali negano che lo spazio sia un concetto e non un'intuizione hanno ragione in questo: che da considerazioni puramente astratte e tanto meno numeriche, si può mai ricavare l'intuizione spaziale.

4) Monge (Séances des Écoles normales, t, I; Paris, 1795, e 2 ed. 1800) osserva ad es. che la definizione della retta come quella linea i cui punti rimangono fissi quando un corpo ruota intorno a due dei suoi punti, oltre che non è semplice ha appunto il difetto di non dare una immagine intuitiva chiara della retta.

scopo anzi abbiamo fatto precedere ogni assioma da considerazioni empiriche, senza però, per la considerazione VI, che esse entrino quali elementi necessarî nei loro enunciati e nelle loro conseguenze. Gli assiomi vogliono essere semplici, perchè meglio si possa scorgere la loro necessità e indipendenza. Un assioma può essere anche composto di più parti per indicare tosto con esso le proprietà che distinguono un dato oggetto dagli altri, come il nostro ass. II della linea retta; ma l'assioma deve essere esaminato nelle sue singole parti semplici.

È chiaro che non si devono introdurre tacitamente proprietà sia pure evidenti, che o non dipendano dagli assiomi o la cui dimostrazione richieda troppa preparazione per poterle considerare quale immediata conseguenza delle cose premesse. Così, ad evitare petizioni di nrincipio bisogna far sì che gli assiomi e i teoremi non derivino da verità o concetti dei quali si dia più tardi la dimostrazione o la spiegazione. Ad es. nella prima proposizione del libro I degli Elementi Euclide per la costruzione del triangolo equilatero, dato che sia il lato, fa uso di due cerchi che si incontrano in due punti nel piano, mentre non ha dimostrato questa proprietà, nè l'ha data come assioma. Così non si può ritenere dimostrata la prop. V del libro XI senza l'assioma che lo spazio intuitivo è a tre dimensioni, ecc.

L' indipendenza poi degli assiomi è necessaria per la semplicità della scienza. Ed invero se si potesse dare come assioma anche una sola proprietà sia pure intuitiva ma dipendente dalle premesse, allora sarebbe lecito di considerare i teoremi evidenti come assiomi.

Se due assiomi o parti di un assioma stabiliscono due proprietà di una data figura che siano invece deducibili l'una dall'altra, si ha ragione di ritenere che astrattamente esistano figure per le quali valga una sola delle proprietà suddette. Un tale difetto è nascosto ad es. nell'assioma con cui viene comunemente definito il piano, voglio dire l'assioma: una retta che ha due punti comuni col piano giace in esso. Per mezzo di questa proprietà il piano può essere *costruito* tutto o in parte congiungendo tutti i punti di una retta con un punto fuori di essa; la superficie piana è così pienamente determinata, e le sue proprietà devono scaturire tutte dalla sua costruzione, quando gli elementi di questa costruzione siano ben definiti. L'assioma del piano ci dice invece che ogni altra retta, all'infuori di quelle già considerate, avente con esso due punti comuni vi giace per intero, Ma questa è una proprietà che per le considerazioni precedenti deve essere dedotta dalla costruzione stessa. Se ciò non è possibile, significa che gli assiomi sulla retta, o sulla coppia di rette che si incontrano, non la determinano sufficientemente in senso astratto.

Alla dimostrazione di questa proprietà nel sistema Euclideo siamo stati condotti dalla necessità di doverla dare per gli spazi a più di tre dimensioni, dei quali abbiamo soltanto la costruzione senza poter ricorrere per essi all'osservazione esterna [1]).

L'indipendenza degli assiomi è certo utile, ma non bisogna disconoscere che è di una grande difficoltà il provarla. Noi stessi abbiamo dati degli assiomi che esprimono proprietà semplici (come gli assiomi IV e V), ma per tutte le figure che si trovano in date condizioni; mentre può farsi la domanda se occorra dare tali proprietà per tutte queste figure o per una parte soltanto. In questo senso facciamo vedere come basti ammettere che la retta sia determinata da una sola coppia dei suoi punti. Occorre inoltre esaminare se dato un sistema di assiomi mutandone l'ordine qualcuno di essi non sia conseguenza degli altri [2]).

Qual'è il metodo più proprio alla geometria, e specialmente per trattare i suoi principî?

Secondo la condizione V esso è quello che scaturisce dal processo costruttivo dell'intuizione spaziale, ossia il metodo geometrco puro o sintetico. E difatti, poichè prima ed essenziale condizione della geometria è l'intuizione spaziale, la quale ci fornisce i primi oggetti geometrici e le loro proprietà indimostrabili, il metodo più proprio è quello che tratta sempre le figure come figure, e lavora direttamente cogli elementi di esse separandoli e unendoli in-

---

1) Questa osservazione sull'imperfezione dell'assioma del piano non è nuova. In una lettera a Bessel (Gött. 27 l., 1829) Gauss scrive: « È strano che oltre alla lacuna conosciuta della geo- » metria Euclidea, che si è cercato indarno di colmare, e non si colmerà mai, vi è un altro di » fetto, che per quanto so, nessuno ha intravveduto, e che non è facile togliere, sebbene ciò sia pos- » sibile. Questo é la definizione del *piano* quale superficie nella quale la retta congiungente due » punti qualunque vi giace per intero. Questa definizione contiene *più* di ciò che occorre alla de- » terminazione della superficie, e involve tacitamente un teorema, che deve essere prima dimo- » strato ».

Grassmann (l. c. pag. 32) riconosce che alla geometria manca una base scientifica, e fa analoghe considerazioni sull'assioma del piano. A pag. 34 dice poi giustamente: « Quando un assioma » può essere omesso senza introdurne uno nuovo, ciò deve esser fatto quand'anche fosse richiesta una » completa trasformazione della scienza, perchè da una tale omissione la scienza nella sua essenza » guadagna in semplicità ».

Genocchi (Dei principî della meccanica e della geometria, Mem. della Società italiana dei XL t. II, serie III; 1869, pag. 178) osserva che la generazione del piano mediante le rette che congiungono i punti di una retta con un punto fuori di essa contiene il postulato delle parallele di Euclide. Se si dice che *tutto* il piano viene generato in questo modo, si esclude il sistema di Lobatschewsky, non però quello di Riemann; altrimenti non viene escluso neppure il piano di Lobatschewsky.

2) Così infatti succede ad es. definendo fin da principio la continuità della retta, per mezzo della quale si dimostrano non poche proprietà che sono assunte nei trattati elementari come assiomi, mentre si fa pure uso della definizione del continuo (vedi ad es. de Paolis: Elementi di Geometria, post. XI).

sieme, in guisa che ogni verità e ogni passo della dimostrazione siano accompagnati possibilmente dall'intuizione. La semplicità e l'eleganza della geometria consistono appunto nella facilità delle sue costruzioni. Il metodo sintetico per la condizione VI dà luogo al metodo sintetico astratto come è svolto nella nostra introduzione.

Un metodo che suppone nota una parte delle proprietà geometriche per studiare i fondamenti della medesima, o una buona parte di teorie che non appartengono alla geometria stessa, è per lo meno un metodo artificioso e indiretto, che se potrà essere utile per verificare la esattezza di un sistema di assiomi, o per mettere in relazione queste con altre teorie, non potrà mai servire a risolvere nel miglior modo la questione. Un tale metodo è ad es. generalmente quello numerico o analitico. Una prova ne sia che le profonde memorie di illustri autori sulle ipotesi della geometria, trattate con questo metodo, non hanno fatto progredire di molto la geometria elementare propriamente detta, in modo che mentre quella moderna ha acquistato in questo secolo tanta larghezza e copia di vedute feconde, soltanto la prima è rimasta si può dire stazionaria, e non ne ha ricavato quasi alcun vantaggio [1]). Come si può ammettere ad es. quale assioma fondamentale della geometria l'ipotesi che l'elemento lineare dello spazio sia la radice quadrata di una espressione differenziale quadratica e positiva delle coordinate; oppure che la curvatura dello spazio sia costante, o ancora che le linee descritte da un punto nel suo movimento siano funzioni di una variabile reale che ammettono la derivata; che fra le coordinate di due punti vi sia una ed una sola funzione che rimanga inalterata mediante un certo gruppo continuo di trasformazioni, o ancora che lo spazio sia una varietà a tre dimenzioni corrispondente al continuo numerico (x, y, z), ed altre simili? Ma dove

1) Non si deve credere però che al materiale degli *Elementi* si debba innestare qua e là teorie sia pure semplici della geometria moderna, ad es. della geometria proiettiva; o che si debba cangiarne il contenuto, o si debba abbandonare il metodo intuitivo basato sul puro ragionamento. Ciò significa invece che bisogna cercare di conquistare anche nella geometria elementare sia coll'aiuto delle nuove teorie, sia per altra via quelle vedute generali che dominino su tutto l'edificio degli *Elementi*, e li presentino in una forma scientifica e nello stesso tempo armonica, in guisa da non aver più degli assiomi dati *a caso* senza che si conosca l'intima ragione scientifica della loro necessità e indipendenza, anche se in un trattato per uso delle scuole le discussioni critiche devono essere bandite. Non è dunque necessario in massima aggiungere nuove teorie agli *Elementi*, ma è il materiale della geometria greca che bisogna correggere e riordinare con vedute più larghe e più rigorose. D'altronde questo materiale non solo serve agli scopi pratici più semplici di questa scienza, ma serve altresì di base ad ogni ramo della geometria; nel problema dei suoi fondamenti non bisogna quindi aver riguardo più ad alcune proprietà che ad altre, imperocchè in tal modo si subordina la sua soluzione alle une o alle altre.

sono i fatti intuitivi e semplici che le spiegano e le giustificano? Non ammettono forse oltre la conoscenza dell'analisi, quella implicita di una buona parte della geometria?

Così secondo questo metodo la distanza di due punti è un numero; ma se la distanza è *rappresentabile* con un numero, il metodo analitico non ci dice che cosa sia la distanza, perchè essa non è geometricamente un numero; come la retta, il piano, gli spazî a tre ecc. a n dimensioni non sono geometricamente le equazioni o le forme analitiche ausiliarie che li rappresentano.

Il problema scientifico e il problema didattico sono distinti, perchè ad es. ragioni didattiche possono consigliare di dare qualche assioma di più per evitare specialmente nel principio complicate dimostrazioni, ma acciocchè il primo aiuti il secondo occorre che i due problemi siano trattati collo stesso metodo. Ora è impossibile supporre che i giovani delle scuole secondarie superiori conoscano per lo meno una buona parte dell'analisi.

Nei lavori nei quali usasi il metodo analitico e che hanno pure un'origine geometrica, è evidente la premura che si ha di far uso al più presto dell'analisi; e ve n'ha anche di quelli nei quali si scelgono gli assiomi allo scopo di potere applicare questa o quella parte analitica. Pur riconoscendo la grande importanza di tali lavori, che mettono in relazione le questioni dei principî geometrici con teorie feconde dell'analisi, non possiamo però disconoscere che in tal maniera si rende schiava la trattazione del problema di uno speciale punto di vista, che *a priori* si vuol far prevalere; mentre bisogna vedere qual'è il metodo più proprio alla natura di esso. Ora, esaminando la questione sotto il suo vero aspetto, il metodo puro è quello che deve essere preferito, perchè un difetto del metodo analitico, e da tutti riconosciuto, è appunto quello che esso ci conduce molto sovente dalle premesse al risultato finale senza farci conoscere i diversi anelli della catena delle proprietà geometriche occorrenti nel passaggio dalla prima proprietà all'ultima, per quanto semplice ed elegante possa essere la dimostrazione; mentre nei principî fa d'uopo sopra tutto rendersi ben conto di ogni particolare, cercando di avere una immagine geometrica ben chiara del modo con cui essa deriva dalle precedenti. Un altro difetto è quello che talvolta esso richiede un grande apparato di simboli e di calcoli per giungere a proprietà geometriche semplicissime. Newton stesso osservò che aritmeticamente è più semplice ciò che viene determinato da equazioni semplici; geometricamente è invece più semplice ciò che si ottiene mediante semplice tracciamento di linee; e nella geometria deve essere prima e preferibile ciò che

è più semplice secondo il concetto geometrico [1]). Dimodochè noi non adottiamo il metodo analitico solo perchè con esso si segue il cammino inverso del metodo storico col quale si è svolta la geometria, nè seguiamo questo metodo perchè corrisponde allo spirito della geometria greca, ma perchè il metodo greco corrisponde meglio alla natura del problema.

L'analisi applicata alla geometria serve a darci degli indirizzi anche nello studio dei principî, ma *a priori* non si sa se tali indirizzi siano utilizzabili dal punto di vista puramente geometrico.

Il metodo analitico poi per la sua generalità, se non si tien conto dell'intuizione, ci conduce a ipotesi sullo spazio a tre dimensioni che sono contrarie all'esperienza. E difatti dal punto di vista analitico ogni varietà numerica a tre dimensioni ha la stessa ragione d'essere dello spazio intuitivo, ma geometricamente come si è detto, non è la stessa cosa. È per questo che il metodo analitico oltre che portare la questione dei fondamenti della geometria in un campo diverso, ha fatto generare il sospetto, spesso giustificato, che siano geometricamente impossibili i suoi risultati intorno alla geometria non Euclidea, è più ancora alla geometria di n dimensioni.

Di più è da osservare che primo distintivo delle figure che ci colpisce è la loro diversità di luogo, e che il metodo costruttivo nasce e si svolge da questa diversità.

---

1) Arithm. Univ. Amsterdam 1761, t. II — De constructione lineari — pag. 237 e seg. Egli soggiunge: « La semplicità delle figure dipende dalla semplicità della genesi delle idee; non è tale l'equazione, ma bensì la descrizione (sia geometrica che meccanica) mediante la quale la figura viene generata e facilmente rappresentata ». Egli considera però il cerchio semplice quanto la retta, mentre il cerchio ha bisogno per lo meno del piano, come la sfera almeno dello spazio ordinario. La retta per essere definita astrattamente mediante le sue proprietà non ha bisogno di altre figure.

Sebbene in altre considerazioni di Newton nello stato attuale della geometria non si possa più convenire, pure le idee di uno dei sommi inventori del calcolo differenziale e integrale rispetto al carattere fondamentale della geometria rimangono sempre vere in tutta la loro generalità. E noi non veniamo meno a queste idee neppure nei nostri lavori di geometria a più dimensioni, poichè ad es. il nostro teorema che tutte le curve razionali del piano d'ordine n possono dedursi dalla curva razionale normale dello spazio a n dimensioni, si basa sulla semplicità della costruzione della curva normale stessa.

Quantunque Leibniz abbia data una grande preferenza all'analisi, pure ha riconosciuto i difetti del metodo analitico specialmente nella trattazione dei principî della geometria, quando tentò di sostituirlo colla sua analisi geometrica (vedi appendice).

E Gauss (Gött. Gelehrte Anzeigen, 1816, pag. 619) così si esprime: I mezzi logici per la concatenazione e la rappresentazione delle verità nella geometria per sè non possono nulla produrre, e soltanto germogliano senza frutti quando la feconda e vivificatrice intuizione non domini da per tutto.

Il sig. W. Killing nella memoria: Erweiterung des Raumsbegriffs. Braunsberg; 1884, ci fa sapere che Weierstrass ha tenute parecchie lezioni nel Seminario matematico di Berlino sui principî della geometria nel 1872, e che sebbene egli sia partito dalla funzione della distanza, ha sostenuto che « anzi tutto bisogna tentare una trattazione puramente geometrica ».

Non è poi da dimenticare per la questione che qui trattiamo, che non ancora è detta l'ultima parola sui fondamenti dell'analisi, come dimostrano recenti lavori di eminenti matematici e la nostra introduzione: perchè i principî dell'analisi non sono tutti logicamente necessarî, e non pochi di essi racchiudono dei veri assiomi geometrici quando l'analisi è applicata direttamente allo studio della geometria, ad es. il principio di continuità nelle sue diverse forme analitiche, che non sempre trova la sua giustificazione nell'intuizione spaziale.

Osservo ancora che lo spazio di n dimensioni sia geometricamente che analiticamente si deduce nella sua generazione da spazî di minori dimensioni. La via più semplice è dunque quella di stabilire gli assiomi per gli spazî inferiori. Gli assiomi che si danno addirittura per le figure, ad es. dello spazio a n dimensioni, sono certo più complessi di quelli delle varietà ad un numero minore di dimensioni. In altre parole secondo la condizione II bisogna procedere dal semplice al composto.

Ma si dirà che noi introduciamo subito il concetto dello spazio generale. In primo luogo esso è un concetto generale nel quale non entra nè la costruzione nè la misura delle sue dimensioni, e oltre a ciò di esso non ci serviamo che per maggiore libertà delle nostre costruzioni, in modo che le considerazioni che facciamo nella prima parte sullo spazio generale valgono poi senz'altro in uno spazio di un numero dato qualunque di dimensioni. È da osservare ancora che tranne alcune proprietà, il testo rimarrebbe lo stesso anche senza la definizione di questo spazio.

Il metodo sintetico si svolge direttamente nello spazio generale che non ha un numero determinato di dimensioni, mentre rimane da vedere se sia possibile trattare la geometria analitica direttamente in un tale spazio. Così pure rimane a trattare la geometria analitica assoluta secondo le nostre ipotesi sull'infinito e sull'infinitesimo.

Da tutto ciò non si deve inferire che noi combattiamo in generale il metodo analitico. Tutt'altro; l'analisi rende certamente dei grandi servigi alla geometria, come questa ne rende all'analisi. L'analista ricorrendo alla geometria mette in esercizio una facoltà, che nell'analisi in sè non trova applicazione, vale a dire l'intuizione spaziale, colla quale a colpo d'occhio si assicura di molte proprietà degli oggetti che gli stanno dinanzi; mentre il geometra facendo uso di un ben inteso formalismo analitico riesce spesso oggidì con maggior sicurezza al risultato finale. Però, acciocchè un risultato analitico abbia un effettivo significato geometrico bisogna che si riferisca ad un ente che si possa costruire, e in ogni caso la geometria non può contentarsi di sapere ad es. che esiste una data superficie, ma vuole conoscere anche le leggi della costruzione della superficie stessa.

Si sostiene giustamente che nelle ricerche scientifiche sia geometriche che analitiche occorre usare tutti i metodi che possono condurre a nuovi risultati [1]. Ma è pur d' uopo riconoscere che specialmente fuori d'Italia vi è oggidì una forte tendenza a trascurare il metodo geometrico puro, quel metodo col quale in questo secolo stesso, Poncelet, Steiner, Staudt, Chasles, Cremona, e tanti altri, arricchirono la geometria di tante feconde teorie; e non sappiamo davvero quanta utilità possa avere questa tendenza. E poichè i due metodi anche nella scoperta della verità hanno virtù e bellezze proprie, che forse non sempre possono conservarsi in un metodo misto, così noi pure, per le ragioni anzidette, riteniamo più che giustificati, anche nelle ricerche superiori della geometria, i tentativi diretti a trattare ogni questione geometrica col metodo sintetico. All' appunto che si fa a questo metodo di non essere ben sicuro in alcune ricerche, si può rispondere che questo non è un difetto inerente al metodo, ma un difetto dipendente dalla mancanza dello svolgimento necessario di esso. D'altronde mi pare che in generale massime rigide non si possano adottare, ma che debbano esser lasciate libere, come nell'arte, tutte le manifestazioni del pensiero scientifico a seconda delle attitudini individuali. E inoltre fa d'uopo non dimenticare che la matematica ha pure la sua filosofia, e che in questa ha non piccola importanza il modo con cui si arriva alla verità.

Rispetto all'ordine degli assiomi e delle definizioni è opportuno sia dal punto di vista scientifico come da quello didattico che si introducano di mano in mano se ne presenta il bisogno, eccetto che per non ripetere una definizione generale, che si adopera per molte figure, non si creda talvolta di derogare a questa regola. Ma non si saprebbe giustificare in alcun modo il metodo di Euclide di riunire la maggior parte delle definizioni in principio del testo, senza che sia provata o data prima, o subito dopo, l'esistenza delle figure a cui quelle definizioni si riferiscono.

Per le condizioni a cui abbiamo assoggettati gli assiomi geometrici, e specialmente per le condizioni I e VI, dobbiamo vedere quali sono i principî e le operazioni logiche comuni sui quali si fonda la matematica pura o la teoria delle forme matematiche astratte e concrete,

---

1) Il grande matematico italiano Lagrange disse: « Fintantochè l'algebra e la geometria sono state separate i loro progressi furono lenti e le loro applicazioni limitate; ma allorquando queste due scienze si sono unite, esse si aiutarono vicendevolmente e progredirono insieme rapidamente verso la perfezione » (Genocchi; l. c.). Klein (l. c pag. 14, opp. trad. l. c, pag. 337) e Segre «Su alcuni indirizzi delle ricerche geometriche» Rivista di matematica, febb. e marzo 1891, ecc.

e quindi anche la geometria. Ecco dunque la ragione dell'introduzione. La matematica pura si presenta così come una scienza di concetti e non di puri segni assoggettati a regole convenzionali, per quanto possibili.

Noi partiamo dai concetti di *unità* e di *pluralità*, dagli assiomi logici, da cui deduciamo alcune importanti conseguenze. Dal concetto pure primitivo del *prima* e del *poi* deriviamo il concetto di serie o successione e di ordine di più oggetti dati o pensati. Dall' operazione del porre e del togliere e del considerare insieme, o dell' unire, deriviamo il concetto di gruppo e quello di gruppo ordinato. E dal concetto di gruppo abbiamo poi il concetto astratto di *fuori*.

Vi sono serie limitate e illimitate, e dal principio *a* del n. 37 si deriva il concetto di serie limitata o illimitata, che contiene come parti altre serie illimitate. La serie più semplice è quella limitata di 1ª specie o naturale, che ha un primo ed ultimo oggetto e non contiene alcuna serie illimitata; poi si ha la serie illimitata di 1ª specie, le cui serie limitate sono tutte di 1ª specie. Diamo i principî che regolano le operazioni dell'unire e del togliere, e rileviamo i contrassegni delle forme matematiche astratte e concrete.

Un principio fondamentale è quello della corrispondenza univoca e del medesimo ordine fra le serie o gruppi di più elementi, col quale deduciamo diversi teoremi per le serie o gruppi ordinati in generale, e particolarmente per le serie limitate e illimitate di 1ª specie.

Mentre fino a questo punto abbiamo fatto uso soltanto del concetto di unità e di pluralità, dai gruppi ordinati discende il concetto di numero nella sua prima formazione, e dalla corrispondenza fra gli elementi del gruppo che si numerano e le unità del numero si deducono i teoremi fondamentali sui numeri che corrispondono ai gruppi naturali, fra i quali anche quello che mutando l' ordine degli elementi di un gruppo naturale il numero da esso rappresentato rimane inalterato. La corrispondenza suddetta ci dà modo di stabilire naturalmente il concetto di numero maggiore e minore, e le prime operazioni coi numeri naturali, e le leggi rispettive. Noi consideriamo dunque dapprima il numero degli oggetti di un gruppo, da cui deriviamo poi le proprietà del numero come segno.

Prendendo a guida il continuo intuitivo rettilineo che esaminiamo nelle sue diverse parti, definito l' elemento fondamentale, e gli elementi distinti in senso relativo e assoluto, trattiamo del sistema di elementi ad una dimensione, del sistema omogeneo e identico nella posizione delle sue parti.

Dall' esame delle conseguenze del principio d' identità si ricava che

la corrispondenza d'identità fra due forme si appoggia sull'identità di due altre forme; da qui la necessità, per utilizare questa corrispondenza, di partire da una prima forma fondamentale, per le parti della quale ammettiamo senz'altro l'identità in conformità al principio di questo nome dato al n. 8.

La nostra forma fondamentale è un sistema ad una dimensione, identico nella posizione delle sue parti, continuo e determinato dal minor numero di elementi rispetto alle altre forme. Indipendentemente da queste due ultime proprietà, che stabiliamo più tardi, costruiamo sulla forma fondamentale la scala di un dato segmento come unità, e definito il campo di essa, troviamo le condizioni di uguaglianza di due scale.

Introduciamo poi il concetto di segmenti finiti, infiniti e infinitesimi (attuali) limitati da due elementi, e stabiliamo le ipotesi semplici dell'esistenza e della costruzione compatibili colla definizione del sistema omogeneo (ed anche di quello identico nella posizione delle sue parti) secondo le quali si determinano le relazioni fra i segmenti suddetti. Da queste ipotesi si deduce appunto il concetto di più specie di unità di misura, dell'unità fondamentale alla quale si riferiscono gli infinitesimi e gli infiniti, e dell'unità assoluta che è un segmento limitato qualunque della forma fondamentale, e che chiamiamo pure finito assoluto. Dimostriamo con pieno rigore che l'infinitesimo di qualunque ordine è trascurabile rispetto ad un infinitesimo di ordine inferiore, sebbene rispetto all'unità assoluta o in senso assoluto esso non sia trascurabile.

Dai segmenti infiniti e infinitesimi deduciamo nuovi numeri interi infiniti, i quali tanto nella somma come nella moltiplicazione sono soggetti alle leggi ordinarie, e quindi si distinguono dai numeri transfiniti di G. Cantor, i quali non si possono applicare alla costruzione dei segmenti infiniti della nostra forma fondamentale [1]).

---

1) Quando era già stampata gran parte della nostra introduzione fu pubblicata la chiara esposizione della teoria delle grandezze del prof. Bettazzi (Pisa 1890), nella quale l'autore studia certe classi ad una dimensione di 2ª specie che si decompongono in n sotto classi principali di 1ª specie (essendo n un numero intero finito), le quali considerate isolatamente sono continue nel senso ordinario. Sebbene Bettazzi non dimostri direttamente la possibilità di queste classi, e così i principî come il metodo di dimostrazione siano diversi dai nostri, pure in questa parte ci siamo incontrati in alcune idee. Egli si arresta alla suddetta classe di 2ª specie, mentre la classe cui dà luogo la nostra forma fondamentale è una delle classi che Bettazzi chiama assolute, e non studia, la quale per i principî speciali a cui soddisfa dà luogo anche ad una misura.

I nostri numeri infiniti e infinitesimi sono in fondo numeri complessi speciali con infinite unità, tali però che il prodotto di due di esse non si esprime linearmente mediante le altre, e perciò per questi numeri vale il teorema che se il prodotto di due di essi è nullo deve esser tale anche uno dei fattori, come vale pei numeri complessi ordinarî e pei quaternioni di Hamilton.

Non disconosciamo la tendenza che vi è oggidì contro l'infinito e l'infinitesimo attuale, e specialmente contro quest'ultimo; ma le ragioni addotte contro queste forme come erano proposte in passato non sono applicabili alle nostre, delle quali del resto abbiamo dimostrato logicamente la possibilità, come non sono applicabili alle forme dell'infinito e infinitesimo attnale di Stolz e di du Bois Reymond. Rispetto alla rappresentazione il segmento limitato infinito o infinitesimo della forma fondamentale possiamo rappresentarcelo tale quale un segmento rettilineo sensibile, come si vedrà meglio dalle applicazioni che ne faremo alla geometria [1]).

Sosteniamo l'infinitesimo attuale perchè ne abbiamo dimostrato non solo la possibilità ma anche l'utilità nel campo geometrico; chè anzi per quanto possa essere per sè interessante una tale teoria non l'avremmo forse qui trattata senza le applicazioni geometriche che ne abbiamo fatte. La trattazione poi analitica della geometria indipendentemente dall'assioma d'Archimede, pare a noi, dovrebbe riuscire interessante anche per l'analisi [2]).

Stabiliamo poi le ipotesi della continuità relativa ad un' unità (o continuità ordinaria) e poi all'unità assoluta (continuità assoluta). Dalla continuità assoluta si ricava la prima rispetto ad ogni unità, ma non inversamente. Sia nel campo di un'unità relativa, sia rispetto all'unità assoluta si dimostra che ogni segmento limitato della forma è divisibile in n (o η) parti uguali, che $(AB)+(BC)\equiv(BC)+(CB'')$, ove (CB'') è identico ad (AB) e del medesimo verso di (AB); che il segmento (AB) percorso in un verso è uguale allo stesso segmento percorso nel verso opposto, oltre altre proprietà relative agli elementi limiti di un gruppo di elementi sulla forma fondamentale. È per ciò che anche indipendentemente dagli infiniti e infinitesimi la nostra definizione del continuo ordinario é preferibile alle altre che ammettono gli stessi principî, ma ammettono ad es. anche la legge commutativa della somma, oppure la proprietà $(AB)\equiv(BA)$. Applicando i principî della nostra definizione alla retta, essi esprimono delle proprietà semplici e intuitive di questa.

Definita la corrispondenza di proporzionalità fra i segmenti della forma fondamentale, deriviamo da essa le principali proprietà dei rapporti fra segmenti, e in ispecie della loro uguaglianza.

Data la definizione delle forme a più dimensioni e del loro campo,

---

1) Vedi note pag. 85-87 e 166. Rimandiamo il lettore alle nostre osservazioni sulle dimostrazioni contro l'infinitesimo attuale in fine dell'appendice; s'intende che il testo ne è indipendente.

2) Vedi nota pag. 123-124 e le osservazioni sulla geometria proiettiva assoluta.

senza dar qui il concetto di continuità in generale, ci occupiamo della grandezza estensiva ed intensiva della forma fondamentale. Sia di questi sviluppi come del capitolo relativo ai numeri reali, assoluti e relativi, non ci serviamo nella discussione dei principî della geometria. Le considerazioni del continuo numerico relativo e assoluto ci permettono però di spiegare le ragioni della scelta della nostra forma fondamentale. Non risulta dalle ipotesi premesse che questa sia determinata da due piuttosto che da più di due elementi distinti.

Da tutto ciò è manifesto che noi procediamo generalmente nella costruzione dei concetti matematici dal semplice al composto [1]).

Sentiamo farci l'obiezione rispetto ai concetti dei numeri razionali e irrazionali che noi partiamo da ipotesi, mentre l'analisi si può svolgere col convenzionalismo basandosi sui soli numeri interi. Anzitutto nell'introduzione non abbiamo inteso di trattare i soli principî dell'analisi ma della matematica pura in generale, che comprende anche la scienza dell'estensione astratta [2]); inoltre il concetto di questi numeri entra per noi in seconda linea, essendo scopo principale dell'introduzione di servire di base alla parte geometrica. D'altronde, vi sono illustri analisti i quali ritengono, e noi siamo del loro avviso, che anche l'analisi debba essere svolta nei suoi fondamenti con metodo filosofico nel senso da noi sopra spiegato [3]), anzichè con metodo artificioso. Ad ogni modo non vediamo alcuna differenza sostanziale fra le ipotesi o postulati astratti e le definizioni o convenzioni di segni necessarie allo svolgimento della scienza [4]).

Questa introduzione oltre che fornirci i criterî fondamentali di cui abbiamo bisogno nella parte geometrica si può considerare come un tutto a sè; ed è per questo che abbiamo svolto alcune parti di essa che non applichiamo alla geometria.

---

1) Vedi ad es. note pag. 1 e pag. 15.

2) Ausdehnungslehre secondo H. Grassmann.

3) Du Bois Reymond sostiene che se nelle operazioni coi segni non si bada più al loro significato, nella discussione dei concetti fondamentali della matematica non si deve però dimenticare la loro origine (l. c. pag. 50 e seg). Vedi intr. nota pag. 67.

4) Ad es. la proprietà fondamentale $(a+b)+1=a+(b+1)$ della somma dei numeri è chiamata da Grassmann *Erklärung* (che equivale a un postulato) e non *Bezeichnung* (indicazione), e difatti v. Helmotz la chiama assioma di Grassmann (Phil. Aufsätze-E. Zeller-Zählen u. Messen pag. 24). Da altri è data come definizione, ma evidentemente senza questa definizione o convenzione non è possibile svolgere le proprietà della somma. Ad es. Il sig. Peano (Arithmetices Principia; Torino 1889) dà come *assioma:* se a e b sono numeri interi uguali, $a+1$, $b+1$ sono pure numeri uguali. E poi come *definizione*: se p, q, p', q' sono numeri interi qualunque ed è $\frac{p}{q}=\frac{p'}{q'}$ si ha $x\frac{p}{q}=x\frac{p'}{q'}$. Questa proposizione è evidentemente della stessa natura della prima.

Dopo che si è spiegato per mezzo dell' esperienza che cosa si deve intendere per spazio intuitivo vuoto e per punto, che è l'elemento fondamentale delle geometria, coll' ass. I si stabilisce esservi punti distinti ed uguali. Data la definizione di figure segue la definizione di spazio generale, cioè:

« Lo spazio generale è dato da un sistema di punti tale che data
» o costruita una sua figura qualunque vi è almeno un altro punto
» fuori di essa, le cui proprietà non dimostrabili derivano in parte
» dall' osservazione esterna e in parte da principî astratti che non
» contraddicono alle prime; e le figure, finchè il punto conserva il
» suo primo significato, sono sempre accompagnate dall' intuizione
» spaziale [1]).

La geometria è la scienza dello spazio generale, e perciò anche delle figure in esso contenute. Le considerazioni però che facciamo, tranne alcune, valgono anche indipendentemente da questo spazio, sebbene noi lavoriamo sempre in esso [2]). Il concetto di fuori trova ampia giustificazione nel primo capitolo dell' introduzione.

Le parti semplici della prima parte dell' ass. II sulla retta sono già state discusse nell' introduzione; e poichè scopo principale di questi studî è anche quello di risparmiare più assiomi che è possibile, così non abbiamo bisogno di ammettere la determinazione della retta che per *una sola* coppia dei suoi punti, completando poi questo assioma colla parte 2ª, la quale stabilisce che ogni punto fuori di una retta e un punto qualunque di essa determinano un' altra retta. Così facendo possiamo svolgere le proprietà comuni generali di tutti i sistemi geometrici possibili conosciuti.

Gli altri tre assiomi sono proprietà semplici che riguardano l' identità di due rette aventi un punto comune, la differenza dei due lati di un triangolo quando il terzo lato diventa indefinitamente piccolo, e l' identità di due coppie di rette aventi un punto comune. La coppia di rette è una figura rettilinea, determinata dai segmenti rettilinei, aventi per estremi i punti delle rette date, e i punti delle rette così ottenute, e così via. La coppia rettilinea non è l'angolo di due raggi o di due rette.

Secondo le ipotesi sull' infinito e sull' infinitesimo attuale dell' introduzione diamo alcune ipotesi le quali ci permettono di stabilire una geometria assoluta, indipendente cioè dall' assioma V d'Archimede,

---

1) Il concetto di un tale spazio è implicito nella prima pagina del nostro lavoro pubblicato nel Vol. XIX dei Math. Annalen, e non è da confondere con quello dello spazio a n dimensioni in esso contenuto.

2) Vedi oss. III, del n. 1 e oss. IX del n. 4 della parte I.

e di far scaturire da essa due sistemi generali nei quali sono compresi i sistemi particolari di Euclide e di Riemann. Nel sistema della retta chiusa assoluta, che noi adottiamo, abbiamo precisamente il sistema di Euclide e quello di Riemann, in modo che le ipotesi precedenti servono a mettere in relazione questi due sistemi in un solo sistema generale applicando il concetto delle diverse unità di misura.

L'unità che ci dà il sistema Riemanniano è appunto infinita rispetto a quella che ci dà il sistema di Euclide. La facilità con cui dal piano Euclideo si passa al piano completo o Riemanniano, senza mai uscire dal piano, e la facilità con cui dal piano all'infinito dello spazio a tre dimensioni Euclideo, che è un piano completo, si dimostrano molte fra le proprietà fondamentali di questo spazio, e così analogamente per gli altri spazî di date dimensioni, ci pare degna di nota. Si potrà obiettarci che mentre sosteniamo dover essere il numero degli assiomi il minore possibile, facciamo uso di ipotesi astratte. E l'obiezione sotto un certo punto di vista ha il suo valore, ma anche a ciò si trova nel nostro libro una risposta. Intanto, come dimostriamo nelle note indicate con numeri romani, le ipotesi suddette non introducono alcun assioma oltre ai già dati nel campo finito, quando si voglia rimanere in questo solo campo, tranne il postulato delle parallele; perchè in quelle note trattiamo appunto la geometria coll'aiuto del testo indipendentemente da quelle ipotesi, per far rilevare altresì quale importanza esse abbiano nello svolgimento e nel coordinamento delle proprietà fondamentali dello stesso campo finito. Di più, come abbiamo detto, volendo trattare il problema scientifico in tutta la sua generalità, abbiamo date queste ipotesi per stabilire una geometria indipendente dall'assioma V d'Archimede, e per trattare e coordinare meglio fra loro i diversi sistemi geometrici conosciuti.

Prima ancora di dare le ipotesi suddette, dalla corrispondenza d'identità fra due forme, in cui la retta rappresenta la forma fondamentale, deduciamo i teoremi per l'uguaglianza delle figure, per la quale abbiamo bisogno dell'ass. V, benchè dalle nostre osservazioni in proposito non risulti una prova sicura della sua indipendenza dai precedenti.

Alla fine del capitolo I del 1° libro trattiamo dei sistemi continui di figure invariabili nello spazio generale, e specialmente dei sistemi continui di segmenti invariabili sulla retta, senza ricorrere al movimento senza deformazione, del quale ci occupiamo al capitolo successivo come principio di cui si ha bisogno soltanto per eseguire praticamente le costruzioni geometriche. Pei sistemi continui di figure invariabili non occorre tener conto astrattamente di tutte le proprietà

delle linee intuitive, vale a dire che in ogni punto esse hanno una tangente; il che semplifica di molto la nostra esposizione.

Nel libro II della parte I studiamo da principio le prime proprietà dei fasci di raggi, e dei settori angolari ed angoli di essi [1]). Ci occupiamo poi delle proprietà del parallelogrammo, e dimostriamo il teorema fondamentale che se da un punto qualunque di un lato del triangolo si conduce una parallela ad un altro lato, essa incontra il rimanente, e in modo che i segmenti sul primo e sul terzo lato sono in corrispondenza di proporzionalità. Definito il piano come la figura che si ottiene dal fascio considerando in esso quale elemento il punto anzichè il raggio, il teorema precedente e quelli sul parallelogrammo permettono di dimostrare rigorosamente e facilmente le prime proprietà del piano; fra le quali va notata quella che ogni fascio di raggi (Rr) ha un sistema limite assoluto all'infinito rispetto al suo centro, il quale, con tutto che abbia molte proprietà caratteristiche in comune colla retta, fra cui quella di essere determinato da due punti e continuo, non si può dire però che sia una retta. Esso ha le stesse proprietà rispetto a tutti i punti del campo finito del piano relativamente all'unità fondamentale Euclidea e all'unità infinita o Riemanniana, ma non rispetto all'unità assoluta.

Da queste prime proprietà deriva l'identità dei fasci e la proprietà che un fascio è identico nella posizione delle sue parti, e perciò che ogni settore angolare (ab) in un verso è identico allo stesso settore percorso nel verso opposto. Da ciò risulta pure che il piano viene diviso da una sua retta in parti identiche; che ogni retta del piano è situata per metà in ognuna di queste parti. Data la definizione di parte interna ed esterna di un triangolo si dimostrano i teoremi relativi ai punti di intersezione di una retta coi lati del triangolo. Così senza assiomi speciali nè espliciti nè impliciti dimostriamo le proprietà relative alle intersezioni di una retta con una circonferenza e di due circonferenze fra loro.

Definiamo i versi delle figure piane e del piano senza ricorrere ad oggetti esterni, o ad osservatori, e al concetto del movimento; il che introdurrebbe degli elementi empirici nelle nostre considerazioni. Diamo le condizioni dell'identità di due figure nel piano, e distinguiamo le figure identiche dello stesso verso (congruenti) da quelle di verso opposto (simmetriche); le proprietà principali dei sistemi piani continui di figure invariabili, e applichiamo poi questa teoria

1) Per le definizioni fin qui date di angolo veggasi l'appendice. — Ci pare degno di essere rilevato il criterio che noi seguiamo nella definizione di angolo nelle diverse sue forme. — Vedi pag. 281 e seg., 400 e seg., 478 e seg. ecc.

alla deduzione delle proprietà principali del movimento di una figura del piano, come abbiamo fatto sulla retta.

Nel capitolo II del libro II prendendo come unità di misura una unità infinita rispetto all'unità fondamentale Euclidea, o finita rispetto all'intera retta, si ha il piano completo. Per la maggior parte delle sue proprietà valgono le stesse dimostrazioni già date pel piano Euclideo. Nel capitolo III trattiamo specialmente del piano di Lobatschewsky, mettendo a raffronto i tre sistemi fra loro.

Del sistema di Lobatschewsky non ci occupiamo più oltre perchè non ci è utile, come il sistema Riemanniano, nel coordinamento delle proprietà degli spazî geometrici Euclidei.

Nel libro III dopo aver definito la stella di 2ª specie e lo spazio a tre dimensioni dimostriamo le loro prime proprietà, e dopo aver dimostrato come si possa considerare che lo spazio abbia un piano all'infinito rispetto all'unità Euclidea, che è un piano completo, si deducono dalle sue proprietà quelle della stella, e da queste si passa alle proprietà delle altre semplici figure dello spazio stesso, incontrando ognora altre figure e altri sistemi più complicati che presentano sempre nuove proprietà.

Lo spazio completo a tre dimensioni si deduce dallo spazio Euclideo con un' unità infinita.

Alla fine di questa prima parte è dato il terzo assioma pratico, il quale stabilisce a tre le dimensioni dello spazio intuitivo. Noi abbiamo seguito sempre le nostre costruzioni coll'intuizione spaziale, ma poichè essa non è e non deve essere necessaria per la condizione VI allo svolgimento logico della geometria, così non abbiamo avuto bisogno di dar prima una tale proprietà, come non ci occorre neppure per il seguito.

Arrivati a questo punto, e pei principî e le proprietà svolte nel capitolo I del libro I, che abbiamo trattati direttamente nello spazio generale (o anche volendo indipendentemente dalle dimensioni dello spazio), nessuna ragione giustificherebbe che ritenessimo possibile il solo spazio a tre dimensioni, perchè è la forma corrispondente allo spazio intuitivo [1]), imperocchè l'assioma pratico suddetto è necessario soltanto per le pratiche applicazioni, che abbiamo distinte nettamente dalla geometria teorica propriamente detta.

Col processo fin qui svolto segue dunque la costruzione della stella di 2ª specie e dello spazio a quattro dimensioni S_4 mediante uno spazio a tre dimensioni S_3 e un punto S_0 fuori di esso nello spazio generale.

---

1) Vedi oss. emp. I del n. 1, nota II e ass. III pratico.

L'esistenza di un punto fuori di S_3 non include ancora quella dello spazio S_4, perchè non si ha che il gruppo di punti $(S_3 S_0)$. Dalla costruzione suddetta trattiamo collo stesso metodo le figure fondamentali dello spazio S_4.

Passiamo poi allo spazio di n dimensioni S_n, dove naturalmente trattandosi di un numero dato, comunque grande, ma finito di dimensioni, le dimostrazioni acquistano un carattere generale, e il metodo in esse è dirò così saltuario, perchè ad es. le proprietà dello spazio completo S_{n-1} non possono essere trattate che alternativamente con quelle dello spazio S_n nel campo Euclideo; così pure molte dimostrazioni bisogna darle col così detto metodo dell'induzione completa [1]) applicato contemporaneamente a più teoremi. In questa parte trattiamo dei sistemi generali continui di enti geometrici, sia nello spazio generale come in quello ad n dimensioni. Ma prima di trattare questa teoria, che si può anche chiamare geometria a più dimensioni rispetto ad altri enti geometrici *già costruiti* che non siano punti, occorre prima di tutto, per rimanere nel campo geometrico, stabilire le proprietà degli spazî in cui quegli enti sono stati dati o costruiti, allo stesso modo che la teoria delle curve piane di n^{mo} ordine può chiamarsi geometria a $\frac{n(n+3)}{2}$ dimensioni.

Dallo svolgimento di questa parte risulta chiaramente che il nostro processo costruttivo della geometria a più di tre dimensioni è un processo nel quale l'intuizione è fusa colla pura astrazione; ma risulta pure che noi non intendiamo punto di intuire *completamente* le figure di n dimensioni o dello spazio generale, come intuiamo quelle di tre le quali corrispondono agli oggetti del campo della nostra osservazione.

Dall'aggiunta, nella quale abbiamo indicato in che modo si possono stabilire i principî della geometria analitica ad n dimensioni, si vede che, come lo spazio ordinario viene rappresentato da una varietà numerica (x,y,z) che soddisfa ai nostri assiomi, lo spazio a n dimensioni viene rappresentato da una varietà numerica $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ che soddisfa agli stessi assiomi. Ma come la prima varietà non è lo spazio ordinario, così la seconda varietà non è il nostro spazio a n dimensioni. E noi abbiamo quindi ragione d'insistere nel far rilevare bene questo carattere fondamentale delle nostre ricerche, perchè se rispetto al substrato di una verità geometrica, non ha importanza che essa sia enunciata in numeri o per mezzo degli enti geometrici corrispondenti,

1) Vedi intr. pag. 18.

nei fondamenti invece ha una capitale importanza l'esistenza, sia pure astratta, dell'oggetto geometrico [1]).

Qui abbiamo avuto specialmente di mira lo svolgimento dei principî della geometria a più dimensioni, e di dimostrare ogni proprietà di cui avevamo bisogno, fatta eccezione di due proprietà date alla fine, ma che furono dimostrate altrove, e nelle quali si ha già la certezza che non è compreso alcun altro assioma. Se le proprietà sono in gran parte note, le dimostrazioni sono invece in grandissima parte nuove. D'altronde un'esposizione matematica della geometria elementare a più dimensioni secondo il nostro punto di vista, e che non fu mai fatta, rende più facile l'investigazione nelle parti superiori.

Alla fine della parte II abbiamo fatto conoscere le operazioni del proiettare e del segare, e ne abbiamo dedotte alcune importanti conseguenze, compatibilmente collo scopo e colla natura di quest' opera [2]). L'utilità di questo metodo per rispetto allo spazio ordinario consiste appunto in questo; che da enti generali od anche speciali si deducono classi di enti nel piano e nello spazio a tre dimensioni, o in uno spazio di dimensioni inferiori, e inversamente, dimostrando più facilmente e coordinando sotto un punto di vista generale proprietà o enti nuovi o già noti.

É questa la generalizzazione del principio spesso usato col quale mediante la geometria dello spazio ordinario si dimostrano più proprietà delle figure piane, o si ottengono nuove proprietà di queste figure; dirò anzi che esso acquista la sua vera ragione nello spazio a n dimensioni, perchè allora valgono dei teoremi generali fra gli enti proiettati e gli enti ottenuti per proiezione. L'esistenza delle figure e la verità delle loro proprietà, che si ottengono con questo metodo, ad es. nel piano, si possono provare naturalmente coi soli postulati del piano (s'intende senza trascurarne alcuno); ma ciò anzi conferma l'utilità del metodo [3]). La geometria di n dimensioni è poi vantaggiosa anche sotto altri aspetti, perchè molti enti del piano e dello spazio ordinario si lasciano rappresentare da

1) Si veda la discussione che noi facciamo nell'appendice a proposito delle definizioni di spazio e di geometria a n dimensioni.

2) Il lettore potrà utilmente quindi consultare i lavori che si sono svolti con questo procedimento a cominciare da quello da me pubblicato nei Math. Annalen, vol. XIX, come quelli svolti prima e poi col metodo puramente analitico che trovano in questo libro la loro vera base geometrica.

3) Coi metodi della geom. descrittiva si possono costruire effettivamente queste figure nel piano e nello spazio ordinario. Vedi A. Geom. descrittiva a quattro dimens. R. Istituto Veneto, Apr. 1882. Su questo argomento abbiamo tenuto una conferenza nel Seminario matematico diretto dal prof. Klein nell'estate del 1881.

enti più semplici, ad es. da punti di uno spazio superiore, e quindi riesce spesso più agevole studiarne così le proprietà [1]).

Certo è che non si può dire che un tale metodo sia applicabile in ogni ricerca geometrica. Ad es. esso si applica con maggior successo alla geometria proiettiva che alla geometria metrica. Ogni metodo ha i suoi pregi ma anche i suoi difetti, e sopra tutto bisogna possederlo bene per saperne ricavare l'utile che esso può dare; basta naturalmente che esso sia veramente fecondo in una categoria almeno di ricerche importanti; come per certi metodi non è ancora avvenuto. E se qui non potevamo badare tanto alla novità delle proprietà quanto ai principî con cui devono essere svolte, non si deve credere che noi incoraggiamo ricerche le quali altro non sono che facili generalizzazioni e nulla d'importante contengono nè per la geometria a tre nè per quella ad n dimensioni. Così non bisogna neppure esagerare nel senso di voler servirsi delle n dimensioni in questioni ove è più proprio e più facile servirsi invece delle dimensioni ordinarie.

Dalla separazione della geometria teorica dalle sue pratiche applicazioni, dal fatto che non tutti gli assiomi necessari per queste lo sono per quella; dal fatto ancora che la geometria non ha bisogno dei principî tolti dalla meccanica e dalla fisica; e infine da quanto abbiamo detto sull'uguaglianza delle figure, sulla distinzione di figure identiche in congruenti e simmetriche in ogni spazio di un numero dato di dimensioni e sui sistemi continui di figure invariabili, chiaro appare che noi non facciamo uso del movimento dei corpi o dei sistemi rigidi nella trattazione dei concetti fondamentali.

Oggi, dopo i celebri lavori di Helmoltz il quale dichiara che «non si può parlare di congruenza se non si possono muovere dei corpi rigidi o sistemi di punti senza deformazione l'uno verso l'altro» da alcuni si dichiara questo principio intuitivo indispensabile allo svolgimento della geometria, e se ne fa uso esplicito nei trattati di geometria elementare, mentre non solo esso non è indispensabile, ma non può essere accettato senza venir meno al rigore necessario. Questo principio dipende invece dalle proprietà dell'ente geometrico particolare in cui si suppone avvenga il movimento; applicato alla definizione dell'uguaglianza delle figure in uno spazio ad n dimensioni ($n \geqq 1$) restringe questo concetto alla sola congruenza, facendola dipendere dalle dimensioni dello spazio stesso; e restringe anche questa facendola

1) Vedi l'appendice.

dipendere da tutti i contrassegni delle linee intuitive; esso suppone non solo l'esistenza nello spazio di figure identiche ad ogni altra figura data, ma eziandio dei sistemi continui di figure invariabili, mentre poi tutte queste proprietà si deducono dalla costruzione dello spazio. Per essere spiegato si deve appoggiare esso stesso al principio d'identità. Non può poi servire a definire astrattamente il continuo geometrico, ed è, come si disse, necessario per le sole pratiche applicazioni.

Con tutto ciò non intendesi dire che nello stabilire gli assiomi geometrici non si debba empiricamente far uso del movimento, che è un idea primordiale; come anche non intendesi dire che il movimento non sia necessario alla formazione delle idee geometriche: questo è un problema psicologico che non ci riguarda; ma bensì intendesi che deve essere escluso come principio necessario nei fondamenti della geometria teorica [1]).

Fin qui abbiamo parlato sempre del problema scientifico in tutta la sua generalità. Ma la discussione sui concetti fondamentali della matematica non può non riguardare anche il lato didattico della questione, come già abbiamo accennato.

Fu già osservato fin da principio che la geometria elementare da Euclide fino ad oggi ha pochissimo progredito, in quanto che anche nei migliori trattati moderni non si sono tolti sistematicamente i difetti dei principî che si incontrano in Euclide, anche se in alcuni di essi si è portato qua e là qualche miglioramento; mentre non si può negare che altri stanno al di sotto degli Elementi del grande geometra greco, sia per chiarezza come per precisione di concetti. I problemi scientifico e didattico vanno trattati con vedute diverse, ma la migliore soluzione del secondo dipende da quella del primo, imperocchè sebbene le esigenze didattiche debbano avere la loro debita influenza, esso vuol essere risolto secondo un ordinamento scientifico prestabilito, come questo deve essere trattato in modo da aiutare più che sia possibile la soluzione del primo. Noi parliamo specialmente dei trattati che servono per le scuole liceali, nelle quali la matematica va presentata ai giovani quale modello di rigore logico, più che come un insieme di verità utili praticamente, senza che per questo si perda di vista anche il suo scopo pratico. Per raggiun-

---

1) Vedi a questo proposito i §§ 9, 22 e 23 del libro I colle relative considerazioni dell'introduzione, i §§ 18, 19, 20 del libro II della parte I, e i paragrafi analoghi degli altri libri. E poichè in questo punto siamo in disaccordo con Helmoltz, come anche con Newton secondo il quale la geometria non è che una parte della meccanica (Phil. nat. Principia math. ed. 2 Cambridge p. 273), trattandosi di così alte autorità, verso le quali non crediamo di mancare in alcun modo al rispetto e all'ammirazione che giustamente meritano esprimendo il nostro modo di vedere diverso, sentiamo però il dovere di dire altre ragioni in appoggio della nostra tesi; il che faremo nell'appendice.

gere questo scopo, al rigore dei principî può essere sagrificato, se occorre, un maggiore sviluppo della materia. D'altronde siamo convinti che anche nelle scuole universitarie i giovani devono esser posti in grado non solo di conoscere ma di possedere bene le idee fondamentali delle scienze che studiano e il maneggio del calcolo, coi quali sarà loro facile poi, anche da sè o colla guida di buoni libri, risolvere problemi e dimostrare teoremi difficili.

È allo scopo suddetto che abbiamo accompagnato i capitoli relativa alla retta e al piano con note contrassegnate da numeri romani, e limitandoci al campo finito Euclideo, abbiamo fatto vedere come sia possibile attenersi ai principî che informano il nostro libro, cioè:

1.° che la retta può essere assunta come elemento fondamentale di costruzione delle figure e di riferimento delle grandezze geometriche;

2.° che non si ha bisogno da principio dell'assioma delle tre dimensioni dello spazio intuitivo, nè esplicitamente nè tacitamente nell'esposizione logica, pur facendo uso sempre dell'intuizione e di considerazioni empiriche quando occorrano per venire in aiuto a considerazioni astratte;

3.° che non si ha bisogno dell'assioma del movimento che quale mezzo pratico, e senza che per questo si complichino le dimostrazioni sull'uguaglianza delle figure;

4.° che tutte le proprietà fondamentali del piano e dello spazio a tre dimensioni si dimostrano col mezzo degli assiomi da noi dati e con quello delle rette parallele.

A questo scopo il nostro assioma II nella nota IV per ragioni didattiche lo abbiamo sostituito coll'assioma II', ed abbiamo svolta la geometria nel solo campo finito tanto coll'assioma II del testo, quanto coll'assioma II', finchè nella nota XLIV e nelle seguenti non occorre più tener conto della distinzione di questi due assiomi.

E poichè ci occorre il postulato delle parallele indipendentemente dal piano, a ciò provvediamo con una nuova definizione del parallelismo di due rette nella nota XVI.

I nostri assiomi esprimono proprietà date comunemente negli assiomi dei trattati di geometria elementare, tranne il IV e V a cui si sostituiscono proprietà molto più complicate.

In queste note ci siamo limitati alla retta e al piano, sopra tutto perchè data la costruzione dello spazio S_3, si vede facilmente come si deve procedere nelle modificazioni. Si può in ogni caso senza uscire dal campo finito stesso far uso con vantaggio delle espressioni di punto all'infinito di due rette, per indicare che sono parallele; come di retta all'infinito di due piani per indicare che sono paralleli.

Speriamo di poter svolgere presto questi principî in apposito trattato di geometria elementare.

Potrà sembrare a prima vista che qualche parte del testo potesse essere tralasciata o abbreviata. Ciò può anche essere, ma oltre che teorie che non sembrano necessarie dapprima hanno in seguito la loro applicazione, dalla nostra discussione precedente sulle proprietà, e sulle dimostrazioni geometriche risulta che in questi argomenti nulla deve essere trascurato, e che la concisione quando trascina seco la indeterminatezza dei concetti è un grave difetto. In una sola reticenza possono essere nascoste tali proprietà la cui dimostrazione richieda una radicale trasformazione dei principî medesimi. Finchè nel dimostrare si fa uso dell'evidenza non si ha mai la certezza assoluta di non avere commesso qualche errore. Vi sono due mezzi per eliminare più che è possibile l'errore. Tanto più sarà minuziosa la ricerca altrettanto sarà di minore importanza l'errore commesso, e si tratterà più di questioni di forma che di sostanza; e quanto più si saranno meditati a più riprese i punti controversi, tanto maggiore sarà la sicurezza di averlo evitato.

A questo scopo, specialmente nell'introduzione e nei due primi libri della prima parte, o laddove lo ritenemmo opportuno, abbiamo divise le proprietà nelle loro parti semplici più che ci è stato possibile, indicando nelle dimostrazioni con molta frequenza le proprietà sulle quali esse si appoggiano; indicazioni che vanno diminuendo a mano a mano che si va innanzi, perchè è inutile ripetere una proprietà di cui si è fatto uso continuo. Così, anche i punti deboli, se ve ne sono, risaltano maggiormente, permettendo ad altri di correggerli e di raggiungere quella perfezione che tutti dobbiamo desiderare nell'interesse della scienza. Ma bisogna anche guardarsi di non cadere nel pedantesco, dando troppa importanza a cose che non l'hanno, perdendo invece di vista le questioni di maggior conto.

Pure facendo uso delle figure intercalate nel testo, nella prima parte le abbiamo indicate alla fine delle dimostrazioni per mostrare appunto che si deve più badare al ragionamento logico che all'intuizione; mentre nella seconda parte le abbiamo indicate fin da principio acciocchè il lettore ne faccia subito uso, e metta così in esercizio per quanto è possibile la sua intuizione spaziale adoperandola anche laddove mancano le figure; senza per questo venir meno al rigore delle dimostrazioni.

Certo che questo metodo minuzioso non è da consigliarsi nelle

ricerche superiori, perchè condurrebbe a lungaggini inutili, essendo già il terreno in queste ricerche più facile e più sicuro alla deduzione.

La scienza si svolge ormai in due direzioni, l'altezza e la profondità; nè si può dire anche nella seconda direzione se si possa giungere ad una fine, poichè col mettere i principî sotto nuovi aspetti o introducendone di nuovi sempre nuove questioni si presentano, la cui trattazione serve a meglio approfondire le origini della scienza.

Da principio non abbiamo avuto in mente di scrivere questo libro per alcuna scuola; ma poichè uno degli scopi principali della scuola di magistero di matematica annessa ad alcune delle nostre Facoltà di scienze almeno per ora è quello di preparare i futuri insegnanti delle scuole secondarie con conferenze intorno ai fondamenti delle materie d'insegnamento in queste scuole, crediamo che il nostro libro sia a ciò molto adatto, e possa quindi servire di guida nelle suddette conferenze. Questi insegnanti infatti non possono disinteressarsi del movimento scientifico intorno alle questioni relative ai fondamenti della scienza, che essi sono chiamati ad impartire, anche se naturalmente devono farlo in forma compatibile collo sviluppo intellettuale dei giovani, e colle esigenze degli altri insegnamenti. Essi possono poi contribuire moltissimo colla loro esperienza diretta alla soluzione del problema didattico. Ecco perchè nel titolo del nostro libro abbiamo aggiunto «Lezioni per la scuola di magistero di matematica» e tenemmo conto nel testo anche di questo scopo. Ed è anzi ad esso che si devono alcuni maggiori sviluppi, chè altrimenti potevano essere tralasciati. I giovani troveranno poi nell'appendice un'utile guida nello studio dei lavori di illustri maestri, che noi consigliamo ai nostri allievi della scuola di magistero.

Il nostro libro potrà essere gradito anche da quei filosofi ai quali piace di occuparsi di tali argomenti, sebbene nell'esposizione sistematica di queste ricerche abbiamo escluso a priori, per le ragioni dette innanzi, ogni considerazione di indole filosofica propriamente detta.

Anche i più illustri matematici che si occuparono di tali questioni non andarono esenti da giuste critiche, pur avendo i loro lavori contribuito senza dubbio al progresso della scienza. Mi parrebbe quindi di peccare di poca modestia ritenendomi superiore ad ogni critica, specialmente in un lavoro così vasto; sebbene d'altra parte ho la coscienza di averlo meditato a più riprese, specialmente nei punti più controversi. Ma badando ai risultati ottenuti ho la certezza, e senza di questa non avrei pubblicato questo libro, di aver seguita una delle vie più semplici; ed ho eziandio la convinzione che ogni menda

che potesse essere scorta eventualmente potrà esser tolta seguendo le medesime idee fondamentali.

Debbo qui esprimere la mia alta riconoscenza verso S. E. il Ministro della Pubblica Istruzione Pasquale Villari e i membri della Giunta del Consiglio Superiore, che hanno voluto onorare quest'opera incoraggiandone la pubblicazione in conformità al R. Decreto 18 Maggio 1882.

Così pure debbo ricordare con gratitudine l'egregio d.r Paolo Gazzaniga, professore al R. Liceo e libero docente di analisi nella R. Università di Padova per la revisione di buona parte del manoscritto, delle bozze di stampa e per gli utili consigli da lui avuti rispetto alla chiarezza di alcune considerazioni, specialmente nel principio dell'introduzione.

INDICE

INTRODUZIONE

Principî fondamentali delle forme matematiche astratte.

Capitolo I.

Nozioni e operazioni comuni.

Capitolo II.

Prime proprietà delle forme matematiche astratte.

Capitolo III.

Il numero nella sua prima formazione — Numeri naturali.

Capitolo IV.

Dei sistemi di elementi e in particolare di quelli ad una dimensione.

Capitolo V.

Della forma fondamentale.

Capitolo VI.

Segmenti finiti, infiniti, infinitesimi, indefinitamente piccoli e indefinitamente grandi — Numeri infiniti.

Capitolo VII.

Forme a più dimensioni — Campo di tutte le forme — Grandezza estensiva ed intensiva di una forma e in particolare della forma fondamentale.

Capitolo VIII (*).

Numeri reali, relativi e assoluti, positivi e negativi.

Capitolo IX.

Ultime considerazioni sulla forma fondamentale.

(*) Di questo capitolo, come di altre parti dell'introduzione, non si fa uso nei fondamenti della geometria.

PARTE PRIMA.

La retta, il piano e lo spazio a tre dimensioni nello spazio generale.

LIBRO I.

La retta e le figure rettilinee in generale.

CAPITOLO I.

La retta e le figure rettilinee in generale — Assiomi e ipotesi.

Lirro II.

Il Piano.

Capitolo I.

Il fascio di raggi e il piano Euclideo.

Capitolo II.

Il piano completo (o di Riemann).

Capitolo III.

Altre considerazioni sui sistemi di Euclide, di Lobatschewsky e di Riemann.

Libro III.

Lo spazio a tre dimensioni.

Capitolo I.

Lo spazio Euclideo a tre dimensioni.

Capitolo II.

Spazio completo a tre dimensioni.

PARTE SECONDA.

Lo spazio a quattro e a n dimensioni nello spazio generale.

Libro I.

Lo spazio a quattro dimensioni.

Capitolo I.

Lo spazio Euclideo a quattro dimensioni.

Capitolo II.

Spazio completo a quattro dimensioni.

LIBRO II.

Lo spazio Euclideo a n dimensioni.

CAPITOLO I.

Lo spazio Euclideo a n dimensioni.

CAPITOLO II.

Operazioni del proiettare e del segare in S_n. Applicazione di esse allo studio delle configurazioni di un numero finito di spazî in ogni spazio S_r $(r \gtrless n)$.

APPENDICE

INTRODUZIONE

PRINCIPII FONDAMENTALI DELLE FORME MATEMATICHE ASTRATTE

Capitolo I.

Nozioni e operazioni comuni.

§ 1.

Unità e pluralità — Prima e poi — Concetti e segni delle cose. Operazioni del porre e dell'astrarre o del togliere.

1. **Penso** [1]).

2. Penso **una cosa** o **più** cose [2]).

Es. Il mio io è *una* cosa; gli atti del pensiero, un giudizio, un raziocinio, gli animali e le piante sono *più* cose.

3. Penso **prima** una cosa, **poi** una cosa.

Def. La cosa pensata prima nomino *prima* cosa, la cosa pensata poi (dopo) nomino *seconda* cosa.

4. *Def.* Ciò che **corrisponde** nel pensiero ad una cosa si chiama *idea, concetto* o *rappresentazione mentale* della cosa [3]).

5. *Ind.* Una o più cose o concetti si indicheranno con segni, ad es. con lettere dell'alfabeto.

Def. Dico che questi segni *rappresentano* quelle cose, e che queste cose *corrispondono* ai loro segni e sono rappresentate dai loro segni [4]).

---

1) Con ciò esprimo la facoltà e l'atto del pensare.

2) Vedi oss. n. 8. Quando si pensa si pensa qualche cosa. Penso nessuna cosa, significa: non penso.

3) Noi non intendiamo di definire o di sottosegnare ogni espressione nuova della quale facciamo uso nel discorso e tanto meno di definire ogni espressione mediante quelle che la precedono, ma soltanto sottosegniamo o definiamo i concetti e le operazioni che servono a stabilire i principî sulle forme matematiche astratte. Dichiariamo inoltre una volta per sempre che ai vocaboli usati di mano in mano nelle definizioni e nel discorso ne sostituiremo altri che esprimano i medesimi concetti senza bisogno di avvertenza speciale, evitando però gli equivoci, e senza introdurre di nascosto concetti che devono essere spiegati e definiti.

Osserviamo anche che le definizioni nominali, i concetti e le operazioni che mano mano spiegheremo o definiremo hanno valore soltanto nei casi in cui le consideriamo; che se poi anche in altri casi si usano per analogia le stesse denominazioni, ciò non significa che per i nuovi enti debbano valere le stesse leggi e si debbano trovare nelle stesse condizioni degli enti prima definiti. E finchè questi nuovi enti non vengano considerati non occorre nemmeno tenerli presenti.

4) È chiaro che questa def. è indipendente dall'ordine in cui si possono considerare i segni che rappresentano una cosa.

Oss. Se *A* e *B* rappresentano un concetto, o come diremo anche *un solo* concetto, s'intende che *A* e *B* non rappresentano più concetti (2).

6. *Def.* Se penso una cosa dico che la cosa è *data* o *posta* dal pensiero; se penso *ad* una cosa dico che la cosa è *data* o *posta* al pensiero.

Es. La costruzione di un giudizio è una cosa posta dal pensiero; Carlo uomo è una cosa data al pensiero (vedi n. 18).

7. *Def. I.* Se date o poste *prima* più cose (3), ad es. *A*, *B*, *C*, *D*; io penso *poi* (3) alle cose *A*, *B*, *C*, dico che *astraggo* o *faccio astrazione* da *D*, o anche che *tolgo D* dalle cose date. *A*, *B*, *C*, si dicono cose *rimanenti*.

Def. II. Pensare *tutte* le cose date, oppure *ogni* (*ciascuna*) cosa data significa non fare astrazione da alcuna di esse.

§ 2.

Operazione del paragonare — Principî necessari.

8. *Paragonare* le cose *A* e *B* fra loro significa **applicare** i principî:

I. **Il concetto** *A* **è il concetto** *A* (principio d'identità).

Def. I. Se *A* e *B* rappresentano un solo concetto *c*, il concetto *c* rappresentato da *A* è il concetto *c* rappresentato da *B* (def. oss. 5 e I). Diremo: Il *concetto A è il concetto B o è lo stesso concetto B* [1]).

a. Se il concetto A è il concetto B, **si deduce:** *il concetto B è il concetto A.*

Poichè per ipotesi *A* e *B* rappresentano un solo concetto (def. I), *B* e *A* rappresentano un solo concetto (def. 5), da cui si deduce *a.* (def. I) [2]).

b. Se il concetto A è il concetto B, e il concetto B è il concetto C, si deduce: il concetto A è il concetto B.

Il concetto rappresentato da *A* e da *B* è il concetto rappresentato da *B* e da *C*, perchè *B* per ipotesi rappresenta un solo concetto; dunque lo è da *A* da *B* da *C* (def. 5), e perciò anche da *A* e da *C* (def. 5), da cui *b* (def. I) [3]).

II. **Il concetto** *A* **non è il concetto** *B* (principio di diversità che è la negazione di quello di identità).

Def. II. Dico: il concetto *A* è *diverso* dal concetto *B*, se il concetto *A* non è il concetto *B*.

Oss. Il concetto «una cosa» è diverso dal concetto «più cose» (2).

III. **Il concetto** *A* **è** *A* **e non è non** - *A* (principio di contraddizione).

Def. III. Diremo: «*A* è e non è *A*» o più semplicemente: «*A* è non - *A*» è *assurdo.*

IV. **Il concetto** *A* **è o non è il concetto** *B* (principio del mezzo escluso fra i contradditorii).

c. Se il concetto A non è il concetto B, il concetto B non è il concetto A.

---

1) Si badi bene che non è il segno *A* uguale al segno *B*, ma il concetto rappresentato da *A* che è il concetto rappresentato da *B*. In segni la def. I non esprime altro che *Ar.c*, *Br.c*. Qui con *c* intendiamo il concetto dato stesso.

2) In segni da *Ar.c*, *Br.c* si deduce *Br.c*, *Ar.c* (def. 5); si deduce *a* (def. I).

3) In segni: *Ar.c*, *Br.c*; *Br.c*, *Cr. c*, si deduce *Ar.c Br.c*, *Cr.c* (def. 5); si deduce *Ar.c*, *Cr.c* (def. 5). si deduce *b* (def. I).

B è *A* o non - *A* (IV). Se *B* è *A*, *A* essendo per dato non - *B*, si ha: *B* è e non è *B* (*b*), ciò che è assurdo (III, def. III).

Def. IV. Il risultato (conseguenza) dell'operazione del paragonare le cose *A* e *B* si chiama *relazione* tra *A* e *B*.

Def. V. L'espressione: Più cose *coincidenti* significa una cosa (una sola cosa).

Più cose che non sono una sola cosa (nel senso del n. 2) si chiamano *distinte le une dalle altre.*

Oss. I. Quando parleremo senz' altro di più cose intenderemo che siano distinte.

Def. VI. La proposizione: la cosa *A* è *uguale* alla cosa *B* significa: il concetto della cosa *A* è il concetto della cosa *B* (4). Si dice che in questo paragone le cose *A* e *B* hanno una relazione di *uguaglianza* (def. IV).

Segue da ciò e da *a*.

d. Se A è uguale a B, B è uguale ad A.

Def. VII. Quando *A* e *B* sono uguali hanno la stessa rappresentazione mentale nella relazione di uguaglianza (def. VI; 4), e quindi pensare ad *A* è come se si pensasse alla cosa *B*; diciamo perciò che le possiamo *sostituire una all'altra* nel loro concetto o nella loro determinazione, o che si possono *scambiare fra loro.*

e. Se A è uguale a B e B è uguale a C segue: A è uguale a C. (def. VI e *b*).

Def. VIII. Se il concetto della cosa *A* non è il concetto della cosa *B* (II) le cose *A* e *B* si dicono *diverse,* la loro relazione dicesi *relazione di diversità.*

f. È assurdo: A è uguale e non uguale a B.

Difatti ciò significa che il concetto *B* (che è quello di *A* (*b* e def. VI), è e non è lo stesso concetto *B* (*c*), il che è assurdo (III, def. III).

g. Se A non è uguale a B, B non è uguale ad A.

Difatti se *B* non è non uguale ad *A* è uguale ad *A* (IV), ed allora *A* è uguale a *B* (*d*), il che è assurdo (*f*).

h. Se A è uguale a B ed A non è uguale a C, B non è uguale a C.

Difatti se fosse *B* uguale a *C* sarebbe *A* uguale a *C* (*e*), contro l'ipotesi (IV).

9. ***Def. I.*** *Contrassegno* di una cosa è ciò per cui possiamo paragonarla con altre cose.

Se delle cose *A* e *B* consideriamo un solo contrassegno *M*, esse sono uguali perchè corrispondono al solo concetto *M* (def. I, VI, 8). Diremo che *A* e *B* sono uguali *rispetto* al contrassegno *M*.

Def. II. Se le cose *A* e *B* sono uguali rispetto ad alcuni loro contrassegni e non rispetto ad altri, dirò che hanno *comuni* quei contrassegni rispetto ai quali sono uguali.

Es. Cajo è uguale come uomo a Tizio, ma Cajo e Tizio possono essere diversi rispetto ad altri loro contrassegni.

Def. III. Se le cose *A* e *B* distinte (def. V, 8), ciascuna considerata nel suo concetto (4), sono uguali rispetto a tutti i loro contrassegni che consideriamo, vale a dire corrispondono allo stesso concetto rispetto ad essi, le

diremo *uguali in senso assoluto* o semplicemente *uguali* od anche *identiche* (vedi oss. III).

E scriveremo $A \equiv B$, da cui $B \equiv A$ (*d*, 8).

Def. IV. Se sono uguali soltanto rispetto ad alcuni contrassegni, le diremo uguali *in senso relativo o equivalenti*. E scriveremo $A = B$, da cui $B = A$ (*d*, 8).

Oss. I. Se non si tien conto che di una sola uguaglianza, nel primo caso possiamo scrivere $A = B$ e nel secondo $A \equiv B$.

Def. V. Tanto nell'uno come nell'altro caso A e B si chiamano *membri* (termini) dell'uguaglianza.

Oss. II. Nel primo caso possiamo sostituire le cose A e B una all'altra rispetto a tutti i loro contrassegni: nel secondo caso invece possono scambiarsi rispetto ai soli contrassegni comuni (def. VII, 8).

Dalle def. III e IV segue:

a. Le cose A e B possono essere identiche in un solo modo, mentre possono essere equivalenti in modi diversi secondo i contrassegni rispetto ai quali si possono considerare uguali.

Oss. III. Le cose A e B identiche se sono distinte (def. V, 8) sono però diverse nel senso che non sono una sola cosa, ma di questa diversità non si deve tener conto nella loro relazione di identità, ossia si considerano come se fossero una sola cosa o coincidenti (def. V, 8). Se si tenesse conto anche della loro diversità, ad una cosa A non si potrebbe sostituire nessun'altra cosa distinta da A. Bisogna però che non sia contradetta l'identità $A \equiv A$ (I, 8) vale a dire non deve risultare che A è e non è A (III, 8).

Def. VI. Se le cose A e B sono distinte, anche se sono identiche, possiamo dire che hanno una *posizione diversa*.

Oss. IV. Così più cose non possono essere diverse se in fondo non sono uguali rispetto a qualche loro contrassegno, se non altro per essere ciascuna di esse una cosa. Ma quando le diciamo identiche non teniamo conto della loro diversità di posizione; e quando le diciamo diverse non teniamo conto dei contrassegni comuni (def. II) [1]).

b. Se A e B sono segni di una stessa cosa o del medesimo contrassegno di una cosa si ha:

$$A \equiv B \text{ oppure } A = B.$$

Difatti il concetto di A è il concetto di B, poichè A e B rappresentando una stessa cosa o il contrassegno di una cosa, rappresentano anche il concetto di questa cosa o di questo contrassegno: e quindi il concetto del segno A è il concetto del segno B (def. I, 8), dunque *b* (def. VI, 8).

Oss. V. In seguito alle considerazioni precedenti risulta che A rispetto ad alcuni contrassegni è B, mentre rispetto ad altri, per lo meno perchè B e A non sono

1) Quando si definiscono o si costruiscono nuovi enti mediante quelli già studiati è un errore logico definire la loro uguaglianza, se questa parola deve conservare il suo significato primitivo e generale qui esposto e se dalla definizione i nuovi enti sono in sè *pienamente* determinati. Stabiliti infatti i contrassegni dei nuovi oggetti, gli oggetti A e B saranno uguali se si potranno sostituire uno all'altro nelle relazioni $A \equiv A$, $B \equiv B$, e da questa sostituzione si ricaveranno poi le condizioni di uguaglianza dei nuovi enti — vedi ad es. cap VIII. È dai suddetti principî di identità e di diversità che trarremo in seguito quelli per le forme matematiche astratte e per le figure della geometria, senza bisogno di ricorrere al movimento dei corpi senza deformazione.

una sola cosa, *A* non è *B*. È da osservare che qui non vi è assurdo (def. III, 8) perché non risulta nel medesimo paragone che «*A* è e non è *B*» *ma sarebbe assurda un uguaglianza dalla quale risultasse nel medesimo paragone anche in un solo caso* «*A é e non è B*».

§ 3.

Condizione di determinazione di una cosa. Operazioni a senso unico e operazioni inverse.

10. *Def. I.* Si dice che *A* è *condizione* di *B* quando *B* non può essere senza di *A*. Diremo anche che *A* è condizione di un'operazione se senza di *A* non è possibile questa operazione. Se questa operazione ha per risultato *B*, *A* è condizione di *B*.

Def. II. Quando diremo ad es. che *A*, *B*, *C*, *D determinano* l'oggetto *X* intenderemo che *A*, *B*, *C*, *D* sono condizioni di un'operazione dalla quale si ottiene l'oggetto *X*, o che date le condizioni è dato l'oggetto stesso.

Nel primo caso si dice che *A*, *B*, *C*, *D* servono a *costruire* l'oggetto *X*, e in ogni caso che *X dipende* dalle condizioni che lo determinano. E se *Y* non determina *X*, *X* è *indipendente* da *Y*.

Es. Siccome mediante i contrassegni di una cosa la distinguiamo dalle altre cose (def. I, 9), così i contrassegni sono le condizioni di determinazione della cosa.

11. *Def. I.* Una cosa, si dice, è determinata in *modo unico* da date condizioni quando quella e solo quella cosa è data da queste condizioni. Ma siccome anche se vi fossero più cose determinate da date condizioni per distinguerle le une dalle altre dovremmo avere altre condizioni: e queste e le prime determinerebbero una cosa soltanto, così quando diremo che una cosa è determinata da date condizioni intenderemo che lo sia in modo unico, eccetto che non sì dica diversamente.

Def. II. Analogamente se un'operazione dà un solo risultato si dice a *senso unico*.

a. Il porre e il togliere una cosa sono operazioni a senso unico.

Vale a dire posta una cosa *A* (6) non si pone che *A*, e facendo astrazione da *A* (7), si fa astrazione soltanto da *A*.

Se ponendo infatti una cosa *A* si ponesse un'altra cosa *B*, si porrebbero più cose e non una (oss. 8). Analogamente per l'operazione del togliere.

12. *Def. I.* Se da *A* si ottiene *B* con un' operazione φ, l'operazione colla quale da *B* si deduce *A* si chiama operazione *inversa* di φ.

a. Il porre e il togliere sono operazioni inverse.

Difatti porre *A* significa considerare la cosa *A*, togliere *A* significa non considerare la cosa *A* prima pensata (6, 7).

§ 4.

Gruppo di cose. — Concetto di « fuori ».

13. *Def. I.* **Penso insieme** più cose date che non si contraddicono fra loro e tali che togliendo ciascuna di esse (7) non tolgo alcun'altra delle cose date. Il risultato di questa operazione nomino *gruppo* (aggregato, molteplicità o sistema) delle cose date [1]).

Es. 1. Ho ad es. l'idea A, poi l'idea B; dunque ho avuto più idee, cioè A e B (2). Considerando poi insieme queste idee ho il gruppo d'idee A e B.

Es. 2. Sono dati più oggetti ad es. la penna, il calamaio, il libro ecc. Pensando insieme questi oggetti ho il gruppo di essi.

Def. II. Diremo che le cose date *sono nel gruppo, costituiscono* o *formano* il gruppo o *appartengono* al gruppo, e che il gruppo è *composto* da esse.

Def. III. Per evitare talvolta distinzioni inutili e dannose, anzichè dire: un oggetto (cosa), diremo anche: un *gruppo di un solo oggetto.*

Oss. Delle cose date non può essere una contenuta nell'altra e tanto meno il gruppo può essere una delle cose date. Se ciò fosse, facendo astrazione da essa (7) si farebbe astrazione da un'altra cosa data o dalle altre cose date.

Ind. Gli oggetti di un gruppo che non sono gruppi di più oggetti li indicheremo in generale con lettere A, B, C ecc. e i gruppi coi simboli (A), (B), (C) ecc.

Def. IV. Se ogni oggetto di un gruppo (A) (def. II, 7) è un oggetto di un gruppo (B), si dice che (A) *appartiene* al gruppo (B).

Def. V. Se poi non tutti gli oggetti di (B) sono oggetti di (A), diremo che A è *parte* o *sottogruppo* di (B). Un gruppo si chiama anche *tutto* rispetto alle sue parti.

a. Se (A) è sottogruppo di (B) e (B) è sottogruppo di (C), (A) è sottogruppo di (C).

Difatti ogni oggetto di (A) è oggetto di (B), che è oggetto di (C), dunque ogni oggetto di (A) è oggetto di (C) (*e*, 8; def. V). Ma vi sono oggetti di (C) che non sono oggetti di (B) (def. V), i quali non possono appartenere ad (A) perchè ogni oggetto di (A) è oggetto di (B) (def. V; IV, 8), dunque *a* [2]).

Def. VI. Un gruppo (A), si dice, è *fuori* di un gruppo (B) quando (A) o una parte di (A) non appartiene a (B) [3]).

Def. VII. Un gruppo (X) si dice *comune* a più gruppi (A), (B), (C) quando ogni oggetto di (X), è oggetto dei gruppi (A), (B), (C).

Def. VIII. Una cosa qualunque del gruppo, o *scelta ad arbitrio,* nel gruppo significa che appartiene al gruppo senza essere necessariamente una cosa determinata del gruppo stesso.

---

1) Qui ci appoggiamo sull' operazione del pensare o considerare insieme nella sua espressione più semplice (Vedi il n. 29 nel quale sono stabiliti i principî di questa operazione).

2) Si deducono *immediatamente* altri teoremi analoghi dalle def. IV e V mediante la diretta applicazione di *e*, 8. Ad es. se (A) appartiene a (B) e (B) appartiene a (C), (A) appartiene a (C); ed anche: se (A) è sottogruppo di (B) e (B) appartiene a (C), (A) è sottogruppo di (C); ecc.

3) Il concetto di *fuori* non include necessariamente quello di spazio, poichè se non altro l'esistenza formale di un oggetto fuori di un gruppo è determinata dalla negazione, cioè che *non* appartiene al gruppo dato. La negazione in questo caso è giustificata dal principio stesso del mezzo escluso fra i contradditori (IV, 8), perchè questo principio non avrebbe vigore se non vi fossero cose B fuori di A, o cose A fuori di B (Vedi *a*, 37).

§ 5.

Ordine di cose — Successione o serie di cose.

14. *Def. I.* La prop.: Pensare le cose *A* e *B* nell'*ordine AB* significa pensare prima *A* e poi *B* (3). Considerando *A* e *B* come date in questo ordine (def. 6) diremo che si *succedono* nell'ordine *AB*.

Relativamente a quest'ordine abbiamo detto che *A* è la prima e *B* la seconda cosa (3); diremo anche che *A precede B*, e *B segue A*.

15. *Def. I. Ripetere* il concetto *A* significa porre prima il concetto *A* e poi porre ancora il concetto *A* (6 e 3).

a. La ripetizione di un concetto A è un' operazione a senso unico.

Difatti ripetendo il concetto *A* (def. I) si ha soltanto il concetto *A* e non altro (def. I; *a*, 11 e 3).

16. *Def.* Se date più cose *A, B, C, D, E, F, G, H, L, M, N*.... (i puntini sostituiscono le lettere), pensiamo prima ad *A*, poi a *B*, e così via [1]), diremo che pensiamo le cose date, o che le cose date si *seguono* nell'*ordine ABCDEFGHLMN*..., nel quale *A* è la *prima*, *B* la *seconda*, *C* la *terza*, *D* la *quarta*, *E* la *quinta* cosa; e così via usando un nuovo vocabolo per ogni cosa considerata, in modo che per ripetizioni diverse usiamo vocaboli diversi [2]).

17. *Def.* Considerare le cose *A, B, C, D, E, F, G, H, L, M, N*... *ordinate*, senza che sia dato il loro ordine, significa che le consideriamo una dopo l'altra, o *successivamente*.

18. *Oss.* Se esprimiamo ad es. un giudizio, noi possiamo giudicare poi ad es. se questo giudizio è o no esatto; in tal caso il giudizio si considera come cosa data al pensiero. Analogamente più cose poste prima dal pensiero possiamo considerarle poi come date al pensiero nell'ordine nel quale le abbiamo considerate, oppure indipendentemente da questo ordine, vale a dire facendo astrazione da esso (7).

E inversamente: siccome ad una cosa data al pensiero corrisponde un concetto (4) mediante il quale noi la confrontiamo colle altre cose (8), così per mezzo di questo concetto la possiamo considerare come posta dal pensiero. Vale dunque il seguente principio:

Una cosa posta dal pensiero si può considerare poi come data al pensiero, e inversamente.

19. *Def.* Considerare la *successione* o *serie* di cose *ABCD*.... *N*.... significa considerare le cose *ABCD*....*N*.... nell'ordine *ABCD*....*N*.... L'ordine *ABCD*....*N*.... si chiama *ordine* della successione [3]).

20. *Def. I.* Diremo anche che *A* è nel *primo posto della successione* o anche che *occupa il primo posto* nella successione, *B* il secondo, *C* il terzo, *D* il

---

1) *Così via* significa che s'intende ripetuta la stessa operazione per le cose date senza considerarle una per una.

2) Vedi def. III, 47.

3) La successione delle nostre idee, o il poter considerare più cose una dopo l'altra, ci fa *intuire* qualche cosa senza la quale noi non potremmo svolgere il nostro pensiero, e questa qualche cosa è il *tempo*. Ma il concetto del prima e del poi non include necessariamente quello del tempo, vale a dire che non se ne possa fare astrazione. L'intuizione poi è quella facoltà colla quale il nostro spirito si assicura direttamente dell'esistenza di una cosa, e prende forme diverse secondo l'oggetto che si considera. Così l'intuizione del tempo e quella dello spazio.

quarto, e va dicendo (16); appunto perchè la loro posizione è diversa non essendo una cosa sola, anche se sono identiche (oss. 8, def. III, oss. III, def. VI, 9).

Def. II. Se indichiamo con A', B', C', D'... i posti della successione occupati da A, B, C, D..., vale a dire con le stesse lettere accompagnate da apici, diremo che le cose A, B, C, D,... sono *contenute* nella successione $A'B'C'D'$ ecc. ed anche nella successione $ABCD$ ecc.

Oss. I. Le cose della successione anche se identiche occupano posti differenti nella successione (def. VI, def. III, oss. III, 9, oss. 8).

Es. Io ho l'idea A, poi l'idea B, poi l'idea C; ABC formano una successione di idee nell'ordine ABC. Nella mia mente A occupa il primo posto, B il secondo e C il terzo [1]).

a. Cose diverse della serie occupano posti diversi nella serie.

Perchè per cose diverse usiamo vocaboli diversi, corrispondendo ad esse ripetizioni diverse (def. I e 16).

21. *Ind.* Con X, Y, Z, intenderemo cose qualunque della serie (def. VIII, 13 che vale anche per la serie).

Def. Data una cosa qualunque X della serie $ABC....X....Y....$ qualunque (16, 19, def. VIII, 13) dico che le cose $ABC...X$, fatta astrazione da X (7) *precedono* o *sono prima* di X, e le rimanenti cose della serie (7) *seguono* o *sono dopo* di X nell'ordine della serie.

a. La prima cosa della serie non ha cose che la precedono (def.).

b. Ogni cosa X di una serie $ABC...Y...$ e distinta da un'altra cosa qualunque Y della serie precede o segue la cosa Y (def. e *a*, 20).

22. *Def.* Se in una serie una cosa X non ha cose che la seguono o sono dopo di essa, si dice che X è l'*ultima* cosa della serie.

23. *Def.* Se X precede Y e Z segue Y in una data serie, si dice che Y è *compresa fra* X e Z, e che Y e Z sono *separate* da X. Le cose di una serie che seguono una cosa X e precedono una cosa Z si chiamano anche *intermedie* fra X e Z nella serie.

24. *Def.* Se la prima cosa che segue una cosa qualunque X nella serie è Y, Y si chiama *consecutiva seguente* di X, e X *consecutiva antecedente* di Y.

25. *Ind.* Indicheremo una serie di oggetti anche con un solo segno ad es. con una lettera greca.

Def. I. Una serie β si dice *contenuta* in una serie, o che *appartiene* ad una serie α, quando gli oggetti di β sono oggetti di α, e quando gli oggetti che precedono o seguono ogni oggetto X in β precedono o seguono l'oggetto X in α.

Def. II. Diremo che β nel caso precedente è *parte* di α se in α vi sono oggetti che non appartengono a β. Tuttavia, finchè non diremo diversamente per *parte* β di *una serie* α intenderemo una serie contenuta in α i cui oggetti consecutivi sono anche consecutivi in α (24).

---

[1]) Anche il concetto di posto o di posizione astratta non include necessariamente quello di spazio (Vedi nota 3, n. 13).

§ 6.

Gruppo ordinato. — Operazione dell' unire.

26. *Def. I.* Date le cose A e B nell'ordine AB, si consideri insieme B con A, o come diremo anche si *unisca* B ad A; e più generalmente, data una serie qualunque di cose secondo la condizione della def. I, 13 (19, 18) [1]) si applichi o si intenda compiuta questa operazione per le cose successive della serie (16, 19); il risultato di questa operazione chiamasi *gruppo o tutto ordinato.*

Oss. Nel gruppo secondo la def. I, 13 non entra come contrassegno di questa operazione l'ordine in cui la si eseguisce.

Es. Prima ho avuto l'idea A e *poi* l'idea B (3). Nell'operazione: considero insieme B con A tengo conto appunto dell'ordine in cui ho avuto le idee A e B, mentre nel gruppo delle idee A e B secondo la def. 13 non tengo conto di questo ordine.

Ind. Questo tutto lo indicheremo col segno AB, dove le lettere A e B si seguono nell'ordine delle cose corrispondenti nel tutto. Così se alla cosa AB si unisce la cosa data C, si ha un tutto ordinato che indicheremo col simbolo $(AB)C$. Se a questo si unisce la cosa data D si ha un tutto che indicheremo con $((AB)C)D$. E così via. In generale un gruppo ordinato lo indicheremo con un segno della forma (A).

Def. II. Diremo che gli oggetti dati *formano* o *compongono* il gruppo nel dato ordine, e che il gruppo si *compone* o è l'*insieme* degli oggetti dati nell'ordine stabilito.

27. *Def. I.* Un gruppo ordinato (A) *appartiene* al gruppo (B), se gli oggetti di (A) sono oggetti del gruppo ordinato (B), e la serie di (A) appartiene alla serie di (B) (def. I, 25).

Def. II. Diremo anche che (A) è *parte* o *sottogruppo* di (B) se vi sono oggetti di (B) non contenuti in (A), e, se non si dirà diversamente, intenderemo anche che la serie di (A) sia parte della serie di (B) nel senso indicato nella def. II, 25.

a. Gli oggetti A, B, C,...., N.... di un gruppo ordinato che compongono il gruppo (def. I) *sono parti del gruppo.*

Sono infatti gruppi di un solo oggetto, dati ciascuno da una serie di un solo oggetto; supponendo estesa anche al caso della serie la def. III, 13.

b. Se il gruppo ordinato (A) appartiene al gruppo ordinato (B), e (B) al gruppo ordinato (C), (A) appartiene al gruppo ordinato (C).

Ogni oggetto di (A) è oggetto di (B), che è oggetto di (C) (e, 8). Di più gli oggetti consecutivi di (A) sono oggetti consecutivi di (B) (def. II, 25); e questi, che sono gli oggetti considerati di (A), sono consecutivi di (C) (e, 8 e def. I).

c. Se (A) è sottogruppo di un gruppo ordinato (B) e (B) è sottogruppo di un gruppo ordinato (C), (A) è sottogruppo di (C).

Il gruppo ordinato (A) appartiene a (C) appartenendo a (B) (b). Come

1) Vedi anche def. I, II, 32 e def. II, 33.

pel teorema a, 13 si dimostra che non tutti gli oggetti di (C) sono oggetti di (A) [1]).

d. Un gruppo non ordinato determina più gruppi ordinati.

Difatti ogni oggetto del gruppo dato può essere considerato come primo oggetto, ogni altro come secondo e così via.

Ind. Il gruppo che si ottiene dall'unione di un gruppo (B) ordinato o non ad un gruppo (A) ordinato o non, lo indicheremo col simbolo $[(A)\ (B)]$.

28. *La serie non è un gruppo ordinato.*

Difatti nel concetto di serie (19) manca l'operazione dell'unire, come fu spiegato al n. 26; esso significa soltanto che sono date o pensate le cose della serie nell'ordine stabilito (es. 26).

Oss. La serie ci dà un tutto ordinato quando le cose della serie $A\ B\ C\ D....N$ sono unite nel medesimo ordine fra loro. E quando considereremo la serie come gruppo la intenderemo, come gruppo ordinato. Si vede però che non si tien conto dell'operazione dell'unire, le parole serie e gruppo ordinato corrispondono allo stesso concetto e possono scambiarsi fra loro.

§ 7.

Principî dell' operazione dell' unire.

29. I. **L' atto semplice del considerare insieme più cose date in un dato ordine o indipendentemente dal loro ordine è a senso unico** (def, II, 11).

II. **Pensando insieme o no più cose in un dato ordine o indipendentemente da questo ordine non si pensa alcuna cosa che non sia una delle cose date** [2]).

III. **Unire l' oggetto** C **all' oggetto** B **unito all' oggetto** A, **significa unire l' oggetto** C **al tutto ottenuto dall' unione di** B **ad** A, **ovvero significa unire il tutto dato dall'unione di** C **a** B **coll'oggetto** A (principio di associazione).

$$ABC \equiv (AB)\ C \qquad (1)$$

$$ABC \equiv A\ (BC) \qquad (2)$$

a. Unire l'oggetto C al tutto ottenuto dall'unione di B ad A equivale all'unire il tutto dato dall'unione di C con B all'oggetto A.

Difatti da (1) e (2) si ha: $(AB)\ C \equiv A\ (BC)$ (b, 9 e III).

***Oss. I.** Finchè non si dirà diversamente l'operazione dell'unire sarà considerata in questo senso* [3]).

---

1) Vedi la nota 2, 13.

2) In questo modo è evitato che nel gruppo ordinato o non, o nella serie di cose date si considerino anche cose che conseguono dalle prime secondo certi principî.

3) Vedi nota n. 4. Alcuni autori indicano coll'unire un'operazione generale, mentre per noi ha qui un senso particolare ben determinato. Ad es. *Stolz* (Vorles. üb. Alg. Arith. Leipzig. 1885 vol. I, pag. 2) per *eindeutige Verknüpfung* (che si può tradurre per combinazione od unione a senso unico) delle grandezze $a\ b\ c$.,.. di un dato sistema intende una *regola* secondo la quale a ciascuno oppure ad alcuni gruppi ab corrisponde soltanto una grandezza c di questo o di un altro sistema E per indicare la Verknüpfung usa i segni o, O ecc. E scrive a o $b = c$, e legge a *con* b è c. La Verknüpfung è presa in questo caso in senso generale. Anche l'operazione $1 \backslash 2\ (A+B)$ è una Verknüpfung che è commutativa ma non associativa (l. c. nota 2 al cap. III, pag. 380. Veggasi anche *Hankel*: Vorles. üb. compl. Zahlen, 1867 pag. 21). Che A o $B = 1 \backslash 2\ (A+B)$ si possa leggere se si vuole «A con B è C» essendo $C = 1 \backslash 2\ (A+B)$ non v'è dubbio, ma il *con* in questo caso non ha più il suo senso primitivo e comune, e non corrisponde più all'unione piu semplice di B con A.

b. Se i gruppi qualunque (A) *e* (B) *ordinati o non, contengono ciascuno tutti gli oggetti dell'altro, ma non aggruppati diversamente, si ha* $(A)\equiv(B)$.

Difatti dati gli oggetti di (A) coll'operazione dell'unire si ha un solo gruppo (I, def. II, 11). Dunque se (B) fosse diverso da (A) (def. VIII, 8) si otterrebbero dagli stessi oggetti più gruppi e non un solo (oss. 8), contro il principio I.

c. I sottogruppi di un gruppo ordinato (A) *sono sottogruppi del gruppo formato dagli oggetti di* (A) *indipendentemente dal loro ordine.*

Gli oggetti di (A) sono oggetti del gruppo (A') da essi formato considerandoli indipendentemente dal loro ordine, perchè così facendo non si astrae da alcuno di essi, altrimenti considerandoli di nuovo nell'ordine dato si penserebbe un altro oggetto, contro II.

Se (T) è un sottogruppo qualunque del gruppo ordinato (A) (def. VIII, 13), esso dà un gruppo (T') che appartiene al gruppo (A'), e poichè in (A) vi sono oggetti fuori di (T) (def. II, 27), ad es. l'oggetto X, così al gruppo (T') di (A') non appartiene X (II).

Oss. II. Se gli oggetti di (A) e (B) sono aggruppati in modo diverso ma nello stesso ordine l' uguaglianza risulta dal principio III (vedi *a*, 40).

§ 8.

Operazione dello scomporre — Gruppo nullo — Estensione dell' operazione del togliere.

30. *Def. Scomporre una cosa data X in parti* è l'operazione colla quale si determinano delle parti $A,B,C,D,....,N$ che insieme unite danno il tutto X.

a. Lo scomporre è l'operazione inversa dell'unire.

Perchè date le parti $ABCD... N....$ dall'unione di esse si ottiene il tutto, e collo scomporre si ottengono le parti $ABCD... N...$ del tutto (def. 12).

31. *Oss. I.* Se tolgo dalle parti $ABCD,.. N...$ di un gruppo una o più parti, ma non tutte, le parti non tolte sono le parti rimanenti (7).

Def. I. Per esprimere che togliendo tutte le parti dal tutto non vi è alcuna parte rimanente, diremo che *nulla* rimane. Per evitare distinzioni inutili, o che facendole complicano le questioni, diremo anche che si ottiene in tal caso un *gruppo nullo* [1]).

Conv. Nell'operazione del togliere una o più parti dal tutto d'ora innanzi riterremo compresa l'operazione dello scomporre il tutto in parti, quando la scomposizione non è già eseguita.

Oss. II. In questo senso le operazioni dell'unire e del togliere si possono considerare come inverse, imperocchè la prima operazione dalle parti ci dà il tutto, mentre la seconda, eseguita la scomposizione, dal tutto ci fa conoscere ciascuna parte facendo astrazione dalle altre (7).

Oss. III. Se si tratta di un gruppo ordinato, l'operazione del togliere, essendo inversa di quella dell'unire, segue nell'ordine inverso dell'operazione dell'unire.

---

1) In questo caso il nulla si considera per convenzione come qualche cosa, vale a dire come *un gruppo* di nessuna cosa.

§ 9.

Serie e gruppo ordinato limitati e illimtati — Serie limitata di 1ª specie — Serie di serie.

32. *Def. I.* Se una serie ha un primo ed un ultimo oggetto (22) si dice *limitata*.

Es. La serie delle mie idee *ABC* è limitata.

Def. II. Se la serie *non ha* un' ultima cosa si chiama *illimitata* o *senza fine*, e quindi se ogni oggetto della serie data ha una cosa consecutiva seguente (24) la serie che si considera è illimitata [1]).

33. *Def. I.* Quando le cose *A*, *B*, *C*, *D*,..., *N*,... di una serie si considerano in un nuovo ordine, in modo che le cose che precedevano e seguivano una data cosa la seguono, rispettivamente la precedono, nel nuovo ordine, la nuova serie e il nuovo ordine si chiamano *inversi od opposti* alla serie e all'ordine dati.

a. La serie inversa dell'inversa di una serie data è la serie data stessa.

In altre parole nell'ordine inverso dell'inverso le cose si succedono nello stesso ordine della prima serie. Difatti le cose che precedono e quelle che seguono una cosa qualunque *X* nella serie data, la seguono, rispettivamente la precedono, nell'ordine inverso (def. I); e nell'ordine inverso dell'inverso la precedono, rispettivamente la seguono (def. I).

b. L'ultimo oggetto di una serie è il primo oggetto della serie inversa.

Perchè tutte le cose che precedono un oggetto nella prima serie lo seguono nell'ordine inverso (def. I), e quindi tutte le cose che precedono l'ultima nella prima (22) la seguono nella seconda.

Es. Nell'ordine *AB* delle cose *AB*, *A* è la prima e *B* la seconda; nell'ordine inverso *BA*, *B* è la prima ed *A* la seconda.

b'. Se in una serie una cosa è compresa fra due altre, lo è pure nella serie inversa.

Difatti se la cosa *B* è dopo di *A* e prima di *C* nella serie data, le cose date si seguono nell'ordine *ABC* (16); e nella serie inversa *C* è la prima ed *A* è l'ultima, quindi la *B* è pure compresa fra *A* e *C* (def. 23).

b''. Se una serie non ha un ultimo oggetto, la serie inversa non ha un primo oggetto.

Difatti se lo avesse, la serie data avrebbe un ultimo oggetto (*b*).

Oss. I. La serie inversa ha però nel caso *b''* l'ultimo oggetto (def. 19).

Def. II. In tal caso diremo che la serie inversa *non ha principio*, ed è pure *illimitata*, come diremo illimitata una serie che non ha nè primo nè ultimo elemento.

Oss. II. Possiamo considerare non solo che siano date più cose *A*, *B*, *C*, *D*...*N*... al pensiero ma possiamo anche ritenere, senza cadere in contraddizione, che l'ordine sia un contrassegno proprio delle cose date (18).

---

1) Il concetto di successione di cose date (19) è indipendente dal fatto che questa serie sia o no limitata, e quindi i contrassegni di limitato e illimitato non sono in contraddizione col concetto di serie già dato. La negazione è anche in questo caso sufficiente a stabilire astrattamente l'esistenza della serie illimitata, perchè non è in contraddizione col concetto di serie limitata, che la prima comprende in sè. Il concetto dell'illimitato come si vedrà non è precisamente quello dell'infinito.

34. *Def. I.* La serie limitata, o illimitata, data può essere considerata come gruppo ordinato (oss. 28). Il gruppo ordinato che ne risulta si chiama *limitato* o *illimitato.*

Def. II. Considerando le cose $ABCD$... N... di una serie limitata o illimitata come costituenti un gruppo (13), questo gruppo nel primo caso (def. I) dicesi limitato nell'ordine $ABCD$... N... della serie; e nel secondo caso dicesi illimitato nell'ordine stesso.

35. *Oss.* **La prima formazione della serie si ottiene colla semplice ripetizione del medesimo atto mentale (15), e la prima serie così ottenuta ha una prima ed ultima cosa. Diamo quindi la seguente:**

Def. Una serie limitata che non contiene come parte alcuna serie illimitata (def. II, 32; def. I, 25; def. II, 33) si chiama serie *naturale* o *limitata di* 1ª *specie.*

a. Ogni cosa X di una serie limitata di 1ª *specie ha una consecutiva seguente e una consecutiva antecedente.*

Se X non ha una consecutiva antecedente e non è la prima, significa che vi sono cose nella serie che la precedono (def. 21). Fra una qualunque Y di queste e X vi è dunque un'altra cosa della serie, altrimenti Y sarebbe consecutiva antecedente di X (24), contro l'ipotesi. Dunque la serie data conterrebbe come parte una serie illimitata che precederebbe X, il che è assurdo (def.). X non può avere più consecutive antecedenti, ad es. Y e Z, perchè o Y precede Z, o Z precede Y (b, 21), dunque nel primo caso Y è consecutiva antecedente di Z, e Z consecutiva antecedente di X. Analogamente nel secondo caso; dunque X non può avere più consecutive antecedenti.

Similmente si dimostra che X deve avere una consecutiva seguente.

36. *Def.* Se nessuna cosa nella serie é ripetuta (15) la serie dicesi *semplice.*

a. Ogni serie può essere ritenuta come una serie semplice.

Essendo diversi i posti occupati nella serie dalla stessa cosa (20) possiamo indicare la cosa ripetuta in ogni ripetizione con un segno diverso dai precedenti, e quindi supponendo che la cosa ripetuta rappresenti più cose distinte vale la proprietà della def. per tutte le cose della seriè.

Oss. II. **Quando non diremo diversamente intenderemo che la serie sia semplice.**

b. In una serie semplice date le cose qualunque A, B, C; 1° *o A è compresa fra B e C;* 2° *o B è compresa fra A e C;* 3° *o C è compresa fra* A e B.

Difatti data la cosa A, le altre cose o la precedono o la seguono nella serie (b, 21), dunque o B e C seguono o precedono A, oppure B precede A e C segue A; o finalmente C precede A e B segue A. Se B e C seguono A nell'ordine della serie, in questo ordine o sarà prima B o C. Se è prima B, B è compresa fra A e C, perchè B segue A e precede C (23); analogamente se è prima C, C è compresa fra A e B, e si ottengono i casi 2° e 3.° Se B e C precedono A basta considerare la serie inversa alla data, e vale per questa il ragionamento precedente. Ma se una cosa è compresa fra altre in una serie lo è anche nella serie inversa (b', 33); dunque hanno luogo gli stessi casi secondo e terzo. Finalmente negli altri casi A è compresa fra B e C.

37. *a. Data una cosa A determinata, se non è stabilito che A è il gruppo di*

tutte le cose possibili che vogliamo considerare, possiamo pensarne un' altra non contenuta in A (vale a dire fuori di A) e indipendente da A.

Difatti considerando la cosa data A, la facciamo corrispondere ad un atto a del pensiero (4), e ripetendo ad es. una cosa B di A, che non sia un gruppo (def. I, 13; def. I, 26), se A è essa stessa un gruppo ordinato o non ordinato, e riguardando come contrassegno delle idee (9 e 4) l'ordine in cui si succedono (16), la seconda idea di B (3) è distinta dalle idee corrispondenti alle cose della prima (def. V, 8). Indicando questa seconda idea di B con B', la cosa B' è uguale a B (oss. III, 9) ma non coincide con B essendo distinta da essa (IV, def. V, 8).

Così se la seconda idea corrisponde a tutta la cosa A, riguardando l'ordine come contrassegno delle cose pensate si ha un'idea A' distinta da A ed uguale ad A, ma che non coincide con A, altrimenti A e A' non sarebbero distinte (def. V; e IV, 8 e 18).

E poichè l'atto mentale a cui corrisponde A' possiamo ritenerlo indipendente dall'atto cui corrisponde A, così A' è indipendente da A.

Se si dice invece che A contiene tutte le cose possibili che vogliamo pensare, con ciò escludiamo a *priori* le cose non contenute in A.

Oss. I. La negazione che una cosa non appartiene ad A, o il concetto di «fuori» (def. VI, 13) ha dunque sempre valore logico e quindi scientifico, applicabile anche al caso del gruppo ordinato. Avremo cura però ogniqualvolta faremo uso di questa legge nel campo ristretto delle nostre forme possibili di aggiungere altre ragioni in appoggio di essa.

Es. Dato lo spazio intuitivo S, separando l'idea del punto da quella dello spazio (vedi oss. emp. parte I, 1) se non si dice che lo spazio intuitivo contiene tutti i punti possibili, possiamo pensare un altro punto fuori di S, vale a dire uguale agli altri punti ma distinto da essi; oppure un altro spazio S' intuitivo uguale a S ma distinto da S.

a'. La serie delle cose che si ottiene ponendo una cosa B fuori di un'altra A, una cosa C fuori del gruppo AB, e così via, è illimitata.

Perchè supposto che si ottenga un ultimo gruppo A si può immaginare un' altra cosa B fuori di A (a).

b. Una serie limitata o illimitata può contenere come parte un'altra serie illimitata.

Difatti quando si dice che una serie è limitata non significa che essa non possa contenere un'altra serie illimitata come parte (def. II, 25), perchè essa è limitata soltanto pel fatto che ha un primo ed ultimo oggetto (def. I, 34); ma ciò non dà alcuna proprietà sugli oggetti intermedii (23). Nel caso del teorema a', A (o B) può essere anche un tutto limitato o illimitato ottenuto da una serie limitata o illimitata di serie limitate o illimitate considerate ciascuna come un oggetto.

Se si ha il tutto MN ove M è dato da una serie illimitata, MN è una serie limitata, e in questa seconda serie M è la prima cosa. Oppure se la serie M ha un primo oggetto A, la serie MN ha per primo oggetto A e per ultimo oggetto N.

Def. Se nelle successioni $ABCD...$, $A'B'C'D'...$, limitate o no si ha $A \equiv A'$, $B \equiv B'$, $C \equiv C'$, $D \equiv D'$ ecc. si dice che le cose delle serie sono *ordinatamente* o *rispettivamente uguali.*

Capitolo II.

Prime proprietà delle forme matematiche astratte.

§ 1.

Caratteri delle forme o grandezze matematiche astratte e concrete.

38, *Oss*, *I*. Le cose che vogliamo d'ora innanzi considerare oltre i contrassegni di tutto e di parte, di ordine o di serie hanno anche per contrassegno il *modo* con cui sono poste o date (9). L'ordine ci assicura quando una cosa è posta prima o dopo di un'altra, il modo riguarda invece le altre relazioni possibili di posizione (def. VI, 9 e def. IV, 8) che supponiamo esistano e non siano contenute nel concetto di ordine. Questa ipotesi non contraddice ai principii precedenti dovendo essere queste relazioni di posizione indipendenti dalle altre.

Es. 1. Posta l'idea A, ripeto l'idea A e poi ancora l'idea A. Se si tien conto del tempo trascorso in ogni ripetizione si ha una relazione di posizione non compresa nel concetto di semplice successione e di ordine, poichè il tempo trascorso nella prima ripetizione può essere differente da quello trascorso nella seconda.

Es. 2. Io pronuncio prima la vocale *a* a voce *bassa* e poi pronuncio la vocale *e* a voce *alta*; l'altezza della voce dà una relazione di posizione non compresa nel concetto di ordine in cui pronuncio le vocali *a* ed *e*.

Noi supponiamo inoltre che questi contrassegni siano determinati per via di *ipotesi* o di *costruzioni possibili* [1]).

Def. I. Le cose i cui contrassegni sono tutto, parte, ordine e modo di posizione, o che si possono paragonare mediante questi contrassegni (8 e 9) si chiamano *forme* o *grandezze matematiche astratte*; anche se si fa astrazione (7) da alcuni dei suddetti contrassegni.

Ma finchè non diremo diversamente intenderemo che le forme abbiano tutti i contrassegni considerati [2]).

---

1) Abbiamo già detto nella prefazione a quali condizioni devono soddisfare un'ipotesi, una costruzione o una dimostrazione matematica. Qui basta logicamente la semplice ipotesi che possono esistere tali relazioni all'infuori del concetto di ordine. Gli esempi citati sono un di più, ma l'ipotesi non è dipendente da essi. Abbiamo qui evitato di ricorrere ad esempi geometrici appunto per allontanare il sospetto che il *modo* con cui sono poste le parti nel tutto sia necessariamente dipendente dall'idea di spazio. Al n. 41 ricorriamo anche ad esempi tratti dai corpi e dalle loro qualità.

2) Questa definizione delle forme matematiche astratte vale certamente per tutte quelle che noi considereremo, ma non intendiamo però che questa definizione debba essere assoluta e quindi circoscriva fin d'ora il campo della matematica. Come ho avvertito nella nota del n. 4 non cerco definizioni o spiegazioni che valgano in ogni caso, ma soltanto nei casi che mano mano si presentano. *Euclide* non spiega in nessuna parte dei suoi Elementi il concetto di grandezza, come del resto non ne spiega molti altri. H. *Grassmann* chiama *grandezza* «ogni cosa che deve essere posta uguale o disuguale ad un'altra cosa» (Lehrbuch der Arithmetik, Berlin 1861, p. 1). Questa definizione per la grandezza matematica, accettata anche da *Stolz* (l. c. p. 5) a me pare troppo ristretta nel senso in cui è intesa da *Grassmann* nel libro suddetto il concetto dell'uguale; mentre in generale è invece indeterminata, se non si dice rispetto a quali contrassegni sono uguali o disuguali e se non si aggiunge anche che debbano potersi determinare nei loro stati onde si rendano suscettibili di confronto le loro modificazioni. Per noi questi contrassegni sono tutto e parte ordine e modo di posizione. Secondo *Stolz* (l. c. pag. 2) tutte le cose che sono confrontate (verglichen) con una cosa si dicono omogenee (gleichartige) e for-

Def. II. Se ad un concreto (oggetto reale esistente fuori del pensiero) corrisponde una forma matematica astratta, l'oggetto dato si chiama *forma matematica concreta* [1]).

§ 2.

Serie limitate o illimitate — Serie limitate o illimitate di prima specie.

39. *Def. I.* Le forme di un gruppo o di una serie, se teniamo conto del solo fatto che esse appartengono al gruppo o alla serie (def. IV, 13, o def. I, 27 e def. I, 29, 7) le chiameremo *elementi* del gruppo o della serie.

Def. II. Diremo che *una serie segue un'altra serie* quando ogni elemento della prima segue ogni elemento della seconda (21), e diremo che la seconda serie *precede* la prima.

a. Una serie limitata β che segue una serie limitata α dà colla prima una serie limitata γ.

Difatti nell'ordine della serie risultante $(\alpha\beta)\equiv\gamma$ gli elementi di α precedono quelli di β, e gli elementi di β seguono quelli di α (21). Poichè gli elementi di α e β, eccetto l'ultimo di β, precedono questo elemento in γ (21), e in γ non vi sono altri elementi oltre a quelli di α e β (II, 29; def. 26 e oss. 28), l'ultimo elemento di β non ha in γ elementi che lo seguono; e perciò é l'ultimo elemento di γ (def. 22 e def. I, 32).

a'. Una serie illimitata β che segue una serie limitata o illimitata α dà colla prima una serie illimitata γ.

Difatti l'ordine di α e β ci dà l'ordine della serie γ (def. II, 16 e 19), e poiché β segue α, e β non ha un ultimo elemento (def. II, 32), non lo ha neppure γ. Se lo avesse, esso sarebbe un elemento di β; ma in β vi è un elemento che lo segue che appartiene pure nello stesso ordine a γ (def. II, 32), dunque è assurdo che γ abbia un ultimo elemento (IV, 8).

a''. In una serie limitata la serie che segue una serie limitata, parte della serie data, è pure limitata.

Difatti se fosse illimitata la serie data sarebbe illimitata (*a'*).

---

mano un *sistema di grandezze.* Ma tutte le cose possono essere confrontate con una cosa data, perchè appunto dal confronto risulta che sono o non sono la cosa data (IV, 8) e il sistema di grandezze omogenee matematiche non ci pare così ben definito (vedi def. III, n. 111). *Stolz* aggiunge che due cose siccome non possono essere uguali in ogni loro contrassegno è troppo dire, secondo *Grassmann*, che due cose sono uguali quando in ogni giudizio si può porre l'una al posto dell'altra, e che nel suo libro ciò avviene soltanto nelle formule (l. c. p. 2). Ciò è giusto, ma bisogna osservare che due cose si possono dire identiche od uguali quando il concetto dell'una è il concetto dell'altra considerata ciascuna in sè e non in relazione di posizione con altre cose (def. III, oss. II, III, 91, oss. III, 58). *Grassmann* però nella sua Ausdehnungslehre (Leipzig 1844) dà, appoggiandosi sul criterio del discreto e del continuo, un concetto più determinato delle grandezze matematiche, ed osserva che per le forme bisogna stabilire diverse relazioni di uguaglianza e di diversità. *Du Bois Reymond* nel libro «Die Allg. Functionentheorie» (Tübingen 1882), si occupa dei concetti fondamentali matematici: Grandezza, limite, argomento e funzione; ma non definisce astrattamente il concetto di grandezza (l. c. 14). Studia una grandezza fondamentale che riferisce alla rappresentazione della retta e che non definisce astrattamente in tutte le sue parti. Su ciò avremo occasione di ritornare quando tratteremo della nostra forma fondamentale (vedi 2a nota, 71).

1) Da ciò è chiaro che per studiare con rigore logico le forme matematiche concrete bisogna per lo meno stabilire i principî fondamentali delle forme astratte che corrispondono alle prime, in quanto che noi ragioniamo non già sugli oggetti reali ma sulle corrispondenti rappresentazioni mentali (4).

a'''. La serie che segue una serie limitata in una serie illimitata a è pure illimitata.

Difatti se fosse limitata darebbe colla prima una serie limitata (a).

Def. III. Dirò che una serie illimitata che ha un primo elemento è illimitata di 1ª specie se le sue parti limitate aventi per primo elemento quello della serie data sono di prima specie (def. 1, 32; def. II, 25 e 35).

b. Ogni serie limitata di una serie illimiltata di 1ª *specie è di* 1ª *specie.*

Se la serie limitata β ha il primo elemento nel primo elemento della serie illimitata essa deve soddisfare a questa proprietà (def. III). Se non ha lo stesso primo elemento significa che nella serie illimitata esiste una serie α che la precede (def. II.). Se β non è limitata di 1ª specie (35) significa che deve contenere come parte una serie illimitata (35), ma la serie $\alpha\beta$ è limitata (a) collo stesso primo elemento della serie illimitata di 1ª specie, dunque essa conterrebbe come parte una serie illimitata (c, 26; oss. 28), il che è assurdo (def. III e 35).

c. La serie inversa di una serie limitata di 1ª *specie è pure limitata di* 1ª *specie.*

Difatti sia $ABCD....LM$ la serie data che ha A come primo ed M come ultimo elemento (10, 16 e def. I, 32). La serie inversa $ML....DCBA$ é limitata perchè M è il primo ed A è l' ultimo elemento di essa (a, 33), Ora se la seconda serie contenesse una serie illimitata ad es. $ML.....X.....$ precedente la serie $DCBA$ (def. II), nella serie $ML.....X....$ non vi sarebbe un ultimo elemento (def. II, 32) e perciò nella serie data D non avrebbe un elemento consecutivo seguente (24), perchè se lo avesse esso sarebbe l'ultimo elemento della serie $ML....X$ che precede $DCBA$ nella serie inversa (b', 33), e quindi la serie data non sarebbe limitata di prima specie (35).

d. La serie che segue una serie limitata in una serie illimitata di 1ª *specie α è pure illimitata di* 1ª *specie.*

Difatti è illimitata (a''); se non fosse illimitata di 1ª specie dovrebbe contenere almeno una serie illimitata e degli elementi fuori di questa serie (35 e def. III). Ma siccome gli elementi di essa sono per dato elementi di α, α non sarebbe illimitata di 1ª specie (def. I, II 25 e def. III).

e. Una serie illimitata contenuta in una serie illimitata di 1ª *specie è pure di* 1ª *specie.*

Dim. analoga alla precedente (def. I, 25).

f. Ogni sottogruppo di un gruppo ordinato naturale è pure un gruppo ordinato naturale.

Difatti se non fosse tale la serie dei suoi elementi sarebbe per lo meno illimitata di 1ª specie (25; oss. 28; 35, def. III.), e quindi la serie del gruppo dato conterrebbe una serie ilimitata contro l'ipotesi (35 e oss. 28; def. II, 25)

g. Ogni gruppo naturale (A) *che contiene come parte un gruppo* (B) *col primo elemento nel primo elemento di* (A), *si ottiene da* (B) *colla semplice unione successiva di altri elementi.*

O in altre parole la serie degli elementi di (A) che segue (B) è limitata di 1ª specie (def. II; 35; def. I, 26; oss. 28; def. II, 25). Se non lo fosse do-

vrebbe contenere almeno una serie illimitata, e quindi (A) non potrebbe essere un gruppo naturale (c, 26; 35).

h. Se (A), (B) *sono sottogruppi qualunque di un gruppo ordinato* (C) *aventi per primo elemento quello di* (C), *e non tutti gli elementi di* (B) *sono elementi di* (A), (A) *è sottogruppo di* (B).

Significa che (B) ha elementi che seguono quelli di (A) perchè ogni elemento che precede in (C) un elemento qualunque di (A) appartiene ad (A) (def. 21, def. II, 27 e oss. 28); dunque ogni elemento di (A) precede ogni elemento di (B) (def. 21 e oss. 28), dunque (A) è parte di (B) (def. II, 27).

i. I sottogruppi di un gruppo ordinato (A) *illimitato di* 1ª *specie che si ottengono dal primo elemento unendo successivamente gli elementi del gruppo al precedente sottogruppo, formano una serie illimitata di* 1ª *specie.*

Tutti questi sottogruppi per dato hanno lo stesso primo elemento (16, def. II, 27). Ciascuno di essi deve essere un gruppo ordinato naturale. (def. III; 26 e 35). Se tutti i sottogruppi suddetti formassero una serie limitata vi sarebbe un ultimo sottogruppo (B) di (A), il cui ultimo elemento X sarebbe anche ultimo elemento di (A), perchè se vi fosse in (A) un elemento Y consecutivo seguente di X, il sottogruppo (B) non sarebbe l'ultimo ma bensì (B) Y (22); dunque il gruppo (A) sarebbe limitato contro l'ipotesi. La serie deve essere illimitata di 1ª specie, chè altrimenti conterrebbe un sottogruppo limitato che non sarebbe di 1ª specie e per dato parte di (A), il che è assurdo (b).

l. Data una serie limitata o illimitata di 1ª *specie* $ABCD....LM....$ *per dimostrare che una proprietà* P *vale per tutte le forme della serie basta dimostrare:*

1. *Che* P *vale per la prima forma* A *della serie.*
2. *Che supposto valga per una forma* X *scelta ad arbitrio nella serie vale anche per la consecutiva seguente.*

Supponiamo che le forme della serie data che hanno la proprietà P diano una serie δ', la quale per (1) e (2) sarà parte della serie data da δ (def. II, 25). La δ' non può essere limitata perchè per ogni forma data di essa valendo la proprietà P vale anche per la consecutiva seguente di δ che appartiene perciò alla δ' (2). Ma se in δ vi fossero altre forme non contenute in δ', δ non sarebbe illimitata di 1ª specie perchè conterrebbe almeno un sottogruppo limitato che non sarebbe di 1ª specie (def. III); quello cioè dato da δ' e dall'elemento di δ fuori di δ'; dunque ecc.

l'. Se una proprietà P *vale per ogni forma data di una serie illimitata di* 1ª *specie vale per tutte le forme della serie.*

Difatti se vale per ogni forma data X vale anche per la consecutiva seguente, che è la prima forma dopo X, e quindi il teor. è dimostrato (l) [1].

---

1) Il sig. *B. Erdmann* già conosciuto dal pubblico matematico pel suo lavoro «Die Axiome der Geometrie» (1887), nella sua Memoria «Zur Theorie des Syllogismus u. der Induktion. Phil. Aufsätze-Eduard Zeller 1887. pag. 197-238» osserva che è inesatto chiamare la dimostrazione secondo le due regole di l dimostrazione per *induzione completa*, perchè l'induzione contiene sempre un' *ipotesi* e cioè che una verità che ha luogo in alcuni casi di una serie valga anche negli altri casi della serie; la dimostrazione egli dice è perfettamente deduttiva sebbene il criterio direttivo sia induttivo. Bisogna però dimostrare come abbiamo fatto noi che la serie δ è contenuta nella serie δ', come δ' è contenuta in δ. Come si vede però l è una conseguenza immediata delle def. della serie limitata e illimitata di 1 specie. Nel nostro ordine di idee, che ci pare il più naturale nella costruzione delle prime serie, limitate e illimitate, (3, 14, 15, 16, oss. 35, def. III), il principio suddetto deriva da questa costruzione come proprietà speciale di queste serie.

§ 4.

Legge associativa di un gruppo ordinato — Come l' operazione dell' unire possa non essere un' operazione a senso unico.

40. *a. Dati più sottogruppi di un gruppo ordinato che non hanno alcun elemento comune ma che contengono tutti gli elementi del gruppo, il gruppo può ritenersi dato dall' unione successiva dei sottogruppi nell' ordine in cui si seguono nel gruppo dato.* (Legge associativa dell' unire).

Si ha infatti:

$$(ABC)\,D \equiv ((AB)\,C)\,D \equiv (AB)\,CD \equiv (A\,(BC))\,D \equiv A\,(BC)\,D \equiv A\,((BC)\,D) \equiv$$
$$\equiv A\,(B\,(CD)) \equiv (AB)\,(CD) \equiv ABCD \quad (a,\ 29).$$

Supponiamo che ripetendo successivamente questa dimostrazione la proprietà suddetta valga per il gruppo ordinato naturale dato dalla serie $ABCD....A_1B_1$. Si avrà perciò:

$$(ABCD....A_1)\,B_1 \equiv ABCD....A_1B_1$$

intendendo col simbolo $(ABCD.....A_1)\,B_1$ che B_1 è unito al tutto $(ABCD....A_1)$ avente per ipotesi la suddetta proprietà, mentre col simbolo $ABCD....A_1B_1$ s' intende che B_1 è unito ad A_1, già unito a ecc., già unito a D, già unito a C, giá unito a B già unito ad A. Si avrà perciò:

$$((ABCD....A_1)\,B_1)\,C_1 \equiv (ABCD....A_1)\,B_1C_1 \qquad (a,\ 29).$$
$$\equiv ABCD....A_1B_1C_1 \qquad (b,\ 9;\ \mathrm{I},\ 29).$$

E siccome per ipotesi si ha ad es.:

$$ABCD....MN....A_1B_1 \equiv (ABCD....M)\,(N....A_1B_1)$$

si ha pure:

$$ABCD....A_1B_1C_1 \equiv (ABCD....M)(N....A_1B_1)\,C_1$$
$$\equiv (ABCD....M)\,(N....A_1B_1C_1).$$

Vale a dire si possono togliere le parentesi del gruppo naturale dato dalla serie ordinata $ABCD....A_1B_1C_1$ se si possono togliere nel gruppo dato dalla serie $ABCD....A_1B_1$. Ma questo gruppo si ottiene dal gruppo consecutivo precedente coll' unione di un altro elemento (def. I, 26; oss. 28), e siccome per il gruppo dato dalla serie ABC vale questa proprietà (III, 29), così vale anche per ogni gruppo limitato di un gruppo illimitato di 1ª specie (def III, *i*, *l* 39). Si vede facilmente che la proprietà vale per tutto il gruppo (*l'*, 39).

Il teorema vale anche nel caso che la serie delle forme che compongono il gruppo ordinato non sia di 1ª specie. Difatti il tutto che deriva da una serie illimitata di 1ª specie (oss. 28), e che indicheremo con T ed ha la proprietà suddetta, va considerato come una sola forma alla quale vengono unite altre forme. Se si unisce a T un' altra forma A' si ha il tutto TA'. Ma T è anche $T'T''$, ove T' è un sottogruppo limitato di T e la cui serie di elementi ha lo stesso primo elemento, e T'' è il sottogruppo rimanente; quindi avremo:

$$TA' \equiv (T'T'')\,A' \equiv T'\,(T''A').$$

In altre parole un gruppo illimitato in unione con altre forme viene scomposto in una serie limitata di sottogruppi che contengono tutti gli elementi

del gruppo dato e senza aver alcun elemento comune, e a questa serie in unione colla prima delle forme date è applicabile il principio di associazione. Se la serie delle altre forme date non avesse una prima forma si lascia scomporre anch'essa in una serie limitata di sottogruppi, di cui essa rappresenta l'unione successiva (26), Il teor. è così in ogni caso dimostrato.

Oss. S'intende che l'unire si riferisce qui a cose già date in posizione, e nel senso del semplice considerare insieme.

40. *Oss.* Se nell'operazione dell'unire considerando come condizioni di essa (def. I, 10) il modo di posizione delle parti fra loro e l'ordine di esse (oss. e def. I, 38). allora evidentemente il tutto dipenderà dal modo e dall'ordine con cui sono unite le sue parti e l'unione non sarà più a senso unico, potendo essere diversi gli ordini e i modi di unione delle parti. Da ciò si deduce che se le parti A, B, C, D di un tutto sono ordinatamente uguali alle parti di un altro tutto (def. 37), non risulta perciò che il primo tutto sia uguale al secondo; bisogna che siano anche gli stessi l'ordine e il modo di posizione delle parti nel tutto (def. III, 9). Può anche darsi che il tutto $ABCD$ sia identico al tutto $A'B'C'D'$, ma non sia identico al tutto $D'C'B'A'$ inverso al precedente. E perciò quando diciamo forme uguali le dobbiamo intendere tali nell'ordine in cui sono uguali, dato, come dobbiamo suppore da principio e in generale, che in un altro ordine non siano uguali.

Es. 1. Colle stesse pietre di mosaico di colore diverso e supposte uguali rispetto agli altri loro contrassegni si possono formare diversi mosaici. Possono essere poste nello stesso ordine rispetto alla loro successione e in modo differente, (formando disegni diversi); o nello stesso modo (formando lo stesso disegno) e in ordine differente. La differenza di ordine è data in tal caso dalla differenza di colore.

Es. 2. Coi pezzi di un bicchiere rotto unendoli insieme in un dato ordine e in un dato modo si ottiene il bicchiere primitivo (fatta astrazione dalle leggi fisiche), ma unendoli altrimenti si ottiene in generale un altro tutto non identico al bicchiere dato.

§ 5.

Corrispondenza univoca e nel medesimo ordine fra più gruppi.

40. *Def. I.* Quando tra gli elementi A e X, B e Y, C e Z ecc., che appartengono rispettivamente ai gruppi (A) e (A') esiste o si stabilisce una relazione qualsiasi comune (def. IV, 8) e tale che dato un elemento del primo gruppo qualunque (def. VIII, 13) sussista qnesta relazione rispetto ad uno o più elementi del secondo gruppo, si dirà che i gruppi si *corrispondono* secondo la relazione suddetta.

Gli elementi A e X, B e Y, C e Z ecc. si dicono elementi *corrispondenti* dei gruppi dati.

Def. II. Se ad ogni elemento A del primo gruppo corrisponde un solo elemento A' del secondo, e ad ogni elemento A' di questo corrisponde lo stesso elemento A del primo e questo solo, si dice che gli elementi dei gruppi dati si corrispondono univocamente, e la corrispondenza si chiama *univoca* e *reciproca* o soltanto *univoca* [1]).

---

1) Noi non ci occupiamo che di queste corrispondenze univoche, e quindi quando parleremo di corrispondenze univoche intenderemo anche reciproche. La relazione di corrispondenza è qualunque

Oss. I. Nessun elemento di un gruppo significa che si fa astrazione da ogni elemento del gruppo (7 e 29), quindi nessun elemento non è elemento del gruppo (IV. 8); dunque non può essere che ad un elemento del gruppo nella corrispondenza univoca corrisponda nessun elemento dell'altro gruppo.

Es. 1. Così fra le forme e i loro segni vi è una corrispondenza univoca se ad ogni segno corrisponde una cosa e ad una cosa un segno (5).

Oss. II. Se i gruppi (A) e (B) sono ordinati e si corrispondono univocamente in modo 1° che gli elementi corrispondenti siano compresi fra elementi corrispondenti, e quando essendo limitati il primo elemento s'intenda compreso fra l'ultimo e il secondo, e l'ultimo fra il primo e il consecutivo antecedente (24) dell'ultimo (penultimo), 2° che agli elementi che precedono un dato elemento corrispondono elementi che precedono l'elemento corsispondente al dato, *è giustificato dire che i gruppi* (A) *e* (B) *si corrispondono nel medesimo ordine.* Difatti la posizione relativa degli elementi corrispondenti nei gruppi rispetto alla definizione 21 (14, 16 def. VII, 8) è la stessa [1].

Def. III. Circa i gruppi (A) e (B) che soddisfano alle condizioni dell'oss. precedente, si dice che si corrispondono *univocamente* e *nel medesimo ordine.*

Se è soddisfatta soltanto la prima condizione dell'osservazione II diremo che (A) e (B) si corrispondono *univocamente in ordine inverso.*

Es. 2. Una serie di cose e la serie dei concetti corrispondenti (4), si corrispondono univocamente e nel medesimo ordine.

Es. 3. Se dati i gruppi $ABCDE$, $A'B'C'D'E'$ si fa corrispondere C' ad A, D' a B, E' a C, A' ad D, B' ad E, e inversamente; i gruppi si corrispondono univocamente e nel medesimo ordine.

Es. 4. Se invece nel caso precedente si corrispondono A e B', B e D', C e A', D e E', E e C', i gruppi si corrispondono univocamente ma non nello stesso ordine.

a. In gruppi (A) *e* (B) *ordinati che si corrispondono univocamente e nel medesimo ordine o in ordine inverso ad elementi consecutivi nell'uno corrispondono elementi consecutivi nell'altro.*

E inversamente;

Se si corrispondono a uno a uno gli elementi consecutivi i gruppi si corrispondono univocamente e nello stesso ordine o in ordine inverso.

Difatti se agli elementi consecutivi AB qualunque dell'uno (def. VIII, 13) [2] corrispondessero elementi non consecutivi dell'altro, l'elemento X corrispondente ad un elemente X' compreso fra gli elementi A' e B' (def. I, 23, 24) per ipotesi non sarebbe compreso fra A e B e i gruppi non si corrisponderebbero nel medesimo ordine o in ordine inverso (def. III e oss. II).

Se poi si corrispondono ad uno ad uno gli elementi consecutivi, ad ogni elemento X compreso fra gli elementi qualunque A e B nel primo corrisponde un elemento X' compreso fra gli elementi corrispondenti A' e B'; e perciò anche la proprietà inversa è dimostrata (def. III e oss. II).

b. Se i gruppi ordinati (o serie limitate) di prima specie $ABCD....LM$, $A'B'C'D'....L'M'$ *si corrispondono univocamente, nel medesimo ordine o in ordine inverso, in modo che al primo e secondo elemento del primo gruppo corrispondono ordinatamente il primo e il secondo elemento del secondo gruppo, gli ultimi elementi si corrispondono fra loro.*

---

1) Vedi nota, 9 e § 4, cap. IV.
2) Questa def. vale sia per la serie come per il gruppo ordinato.

Difatti all'ultimo elemento M della serie del primo gruppo per la corrispondenza univoca deve corrispondere un solo elemento della serie del secondo gruppo. Se ad M corrisponde un elemento X' precedente di M', ultimo elemento del secondo gruppo (21 e 22), l'elemento consecutivo seguente di M, ossia A (oss. II.) deve corrispondere a un elemento consecutivo di X' (a). Ma l'elemento corrispondente ad A è A'. Ora se A' è consecutivo seguente di X', X' è M' stesso (oss. II), e il teor. è dimostrato. Se invece A' è il consecutivo antecedente di X' (24), X' è il secondo elemento del gruppo $A'B'C'D'....M'$. Ma M non è il secondo elemento B del primo gruppo che corrisponde al secondo elemento B' del secondo per i dati stessi del teorema; dunque se X' fosse B', all'elemento B' corrisponderebbero gli elementi distinti B ed M del primo gruppo, ciò che contraddice alla corrispondenza univoca (def. II).

c. In gruppi (A), (A') *corrispondentisi univocamente i sottogruppi dell'uno corrispondono univocamente ai sottogruppi dell'altro.*

Sia (T) una parte del gruppo (A). Ad ogni elemento di (T) come elemento di (A) (def. V, 13) corrisponde un elemento di (A'), e tutti gli elementi in (A') che corrispondono a quelli di (T) formano un gruppo (T') che è parte di (A') (def. V, 13). Difatti ad un elemento X di (A) che non appartiene a (T) non può corrispondere in (A') un elemento di (T') perchè a questo corrisponderebbe in (T) un altro elemento diverso da X, perchè X è fuori di (T) (def. VI, 13) contro l'ipotesi della corrispondenza univoca (def. II). Supponiamo ora che a (T) corrispondano i gruppi diversi (T'), (T'') di (A). Perchè siano diversi bisogna che l'uno contenga almeno un elemento X' fuori dell'altro, altrimenti (T') é (T'') sarebbero lo stesso gruppo (b, 29). Sia X' contenuto in (T') e fuori di (T''). All'elemento X corrispondente di X' in (T) corrisponderebbero e l'elemento X' in (T') e un altro elemento diverso da X' in (T''), il che è pure contro l'ipotesi.

d. In gruppi ordinati (A) *e* (A') *corrispondentisi univocamente, nello stesso ordine o in ordine inverso, ad un sottogruppo dell'uno corrisponde un solo sottogruppo dell'altro.*

In gruppi che si corrispondono univocamente, ad un sottogruppo (T) di (A) corrisponde un solo sottogruppo (T') di (A') (c). Ma i gruppi (A) e (A') si corrispondono anche nel medesimo ordine o in ordine inverso, e quindi a elementi consecutivi dell'uno corrispondono elementi consecutivi dell'altro (a). Se A e B sono elementi consecutivi di (T) e quindi di (A) (def. II, 27), gli elementi corrispondenti A' e B' in (A') appartengono a (T') (c). Dunque (T') è formato da elementi consecutivi di (A') epperciò è un sottogruppo di (A) (def II, 27).

e. Gruppi corrispondenti univocamente ad un altro gruppo si corrispondono univocamente fra loro.

Siano (A), (A') i gruppi corrispondenti univocamente al gruppo (A''). Ad ogni elemento X del primo corrisponde un elemento X'' del terzo, e a questo elemento X'' corrisponde un elemento X' del secondo. In questo modo si fa corrispondere l'elemento X all'elemento X', e inversamente all'elemento X' l'elemento X per mezzo del terzo gruppo (A''). Difatti rispetto al solo concetto di corrispondenza univoca X e X'' si possono ritenere uguali fra loro, poichè non viene considerata la loro diversità, così X' e X'', e quindi anche X e X' (e, 8): mentre altri elementi Y, Y', Y'', corrispondenti possono riguardarsi di-

versi da X, X', X'' essendo rispettivamente distinti da essi (def. I, 13; def. V, 8; oss. III, 9).

f. Gruppi ordinati corrispondenti univocamente e nello stesso ordine ad un altro gruppo si corrispondono univocamente e nello stesso ordine fra loro.

La dim. è analoga alla precedente tenendo conto della def. III.

Oss. Nella corrispondenza univoca e del medesimo ordine o di ordine inverso al gruppo ordinato possiamo sostituire la serie di esso e inversamente, perchè in questa corrispondenza non si tien conto di ciò che distingue il gruppo dalla serie (oss. 28).

43. *a. Ogni gruppo ordinato naturale si può far corrispondere univocamente e nel medesimo ordine ad un solo sottogruppo di un gruppo ordinato qualunque illimitato di* 1ª *specie facendo corrispondere al primo elemento del primo un elemento dato qualunque del secondo.*

Difatti siano $(A) \equiv ABCD....M$ il gruppo ordinato naturale (35) e $(A') \equiv A'B'C'D'....M'NN'....$ il gruppo ordinato illimitato di 1ª specie. Posso far corrispondere al primo, secondo, terzo.... elemento di (A) il primo, secondo, terzo.... elemento di (A'); vale a dire all'elemento consecutivo seguente di un elemento qualunque X di (A) posso far corrispondere l'elemento consecutivo seguente dell'elemento corrispondente X'. Se in questa corrispondenza all'ultimo elemento M di (A) corrisponde un determinato elemento M' di (A'), il teorema è dimostrato perchè essendo M' dato, il gruppo $A'B'C'D'....M'$ è un gruppo limitato e perciò di prima specie (def. III, 39). Se invece ad M non corrisponde alcun elemento dato di (A'), vi deve essere però un ultimo elemento X di (A) cui corrisponde un elemento determinato X' di (A'); perchè per lo meno X è A, cui corrisponde A'. Ma in (A') l'elemento X' ha un elemento consecutivo seguente (24) essendo il gruppo (A') illimitato di 1ª specie (def. III, 39), e a questo elemento corrisponde il consecutivo seguente di X in (A), che è compreso per ipotesi fra X e M. Dunque X non può essere l'ultimo elemento di (A) cui corrisponde un elemento determinato di (A'), eccetto che X non sia l'ultimo elemento stesso di (A). Non può essere che ad (A) corrispondano sottogruppi diversi (B) e (B') di (A'), uno dei quali dovrebbe contenere un elemento almeno fuori dell'altro (b, 29), e quindi ad un elemento di (A) non corrisponderebbe un solo elemento di (B) e (B') ossia di (A'). Il teorema è dunque dimostrato.

È chiaro che la dimostrazione vale ugualmente se invece di far corrispondere l'elemento A all'elemento A' di (A') si fa corrispondere ad un altro elemento qualunque dato X' di (A').

b. Un gruppo ordinato illimitato di 1ª *specie si può far corrispondere univocamente e nel medesimo ordine ad un altro gruppo ordinato illimitato di* 1ª *specie.*

Siano $ABCD....N....$, $A'B'C'D'....N'....$ le serie dei gruppi dati coi primi elementi A e A'. Ad ogni serie limitata $ABC....N$ della prima si può far corrispondere univocamente e nello stesso ordine una serie limitata $ABC....N$ della seconda ed una sola facendo corrispondere i primi elementi e gli elementi consecutivi fra loro (a). Dunque ad ogni elemento dato N del primo gruppo corrisponde in tal modo un solo elemento N' del secondo, e inversamente, perchè

ogni elemento N (N') determina un solo gruppo formato dagli elementi che lo precedono e da N (N') (def., *b*, 21). Ciò vale per tutti gli elementi dei gruppi dati (*i*, *l*, 39); e per la corrispondenza delle serie di essi, ad elementi consecutivi dell'uno corrispondono elementi consecutivi dello stesso nome dell'altro (24) e quindi i gruppi dati si corrispondono univocamente e nel medesimo ordine (*a*, 42).

b'. *Un gruppo ordinato illimitato di* 1ª *specie si può far corrispondere univocamente e nello stesso ordine ad ogni gruppo ordinato illimitato contenuto nel primo.*

Pechè ogni gruppo ordinato illimitato contenuto in un gruppo illimitato di 1ª specie è pure di 1ª specie (*e*, 39), e quindi il teor. è dimostrato (*b*).

c. *Se i gruppi ordinati* (A) *e* (A') *si corrispondono univocamente, nel medesimo ordine o in ordine inverso,* (A') *è limitato o illimitato secondo che* (A) *è limitato o illimitato.*

Sia $(A) \equiv ABCD....M$, $(A') \equiv A'B'C'D'....M'.....$ Al primo elemento A di (A) (16) corrisponde uno ed un solo elemento ad es. A' di (A') (def. III, 42), e al consecutivo seguente B di A in (A) corrisponde un elemento consecutivo di A' in (A) (*a*. 42), ad es. il consecutivo seguente B'. Se X e X' sono elementi corrispondenti qualunque (def. VIII, 13 e def. I, 26), al consecutivo seguente Y di X, se esiste, deve corrispondere il consecutivo seguente Y' di X', perchè non gli può corrispondere il consecutivo antecedente essendo X compreso fra A e Y (def. III, 42). All'ultimo elemento M di (A) corrisponde un elemento M' di (A'); e poichè M ha per consecutivo seguente A (oss. II, 42). ad A deve corrispondere il consecutivo seguente di M'. Ma se (A') non ha ultimo elemento (22) il consecutivo seguente di M' non è A', e quindi ad A non corrisponderebbe un solo elemento di (A'), contro il dato (def. III, 42). Lo stesso accadrebbe se (A') non avesse il primo elemento ed avesse l'ultimo ad es. M'; agli elementi che precedono A' in (A') (21) non corrisponderebbero elementi di (A), e a maggior ragione se (A') non avesse nè primo nè ultimo elemento, il che è contro l'ipotesi (def. III, 42). Dunque quando all'elemento B di (A) corrisponde il consecutivo seguente B' di A' in (A'), il gruppo (A'), è limitato (def. I, 32; oss. 28).

Se invece all'elemento B corrisponde l'elemento consecutivo antecedente di A' in (A') (24) basta considerare il gruppo inverso (def. I, 33; def. I, 26). Si dimostra nello stesso modo che esso è limitato, e quindi anche (A) (*b*, 33).

Se (A) è illimitato, (A') non può essere limitato perchè lo sarebbe anche (A). Il teorema è così in ogni caso dimostrato.

c'. *Ogni gruppo ordinato* (A) *che corrispoude univocamente, nel medesimo ordine o in ordine inverso, ad un gruppo naturale* (A), *è un gruppo naturale.*

Perchè ogni sottogruppo di (A) corrisponde ad un sottogruppo di (A') (*d*, 42), il quale è limitato e non contiene alcun sottogruppo illimitato (def. 35 e oss. 42), dunque ogni sottogruppo di (A) è limitato e non contiene alcun sottogruppo illimitato (*c*), dunque *c'* (def. 35 e oss. 42).

c''. *Ogni gruppo ordinato* (A) *che ha un primo elemento e corrisponde univocamente e nello stesso ordine ad un gruppo illimitato* (A') *di* 1ª *specie, è illimitato di* 1ª *specie.*

Difatti ogni sottogruppo limitato di (A) è un gruppo limitato di 1ª specie (d, 42; c e c'), dunque ogni sottogruppo limitato di (A) col primo elemento nel primo elemento di (A) è limitato di 1ª specie, e quindi il teorema è dimostrato (def. III, e oss. 42).

44. *Def. I.* Quando gli elementi di un gruppo corrispondono agli elementi del gruppo stesso si dice che il gruppo *si trasforma in sè medesimo*, e si dice che la *trasformazione è univoca* quando ad ogni elemento del gruppo corrisponde uno ed un solo elemento dello stesso gruppo e a questo corrisponde il primo elemento e questo solo.

Si dice che la trasformazione è *univoca* e *dello stesso ordine* se il gruppo è ordinato e gli elementi corrispondenti sono compresi fra elementi corrispondenti e ad ogni elemento X che precede un elemento qualunque Y corrisponde un elemento X' che precede l'elemento corrispondente Y'.

Def. II. Il caso più semplice di una trasformazione univoca è quello in cui ogni elemento del gruppo corrisponde a sè stesso. In tal caso la trasformazione si chiama *corrispondenza o trasformazione di coincidenza.*

Oss. Nelle corrispondenze qui stabilite non si tien conto evidentemente del modo con cui sono posti gli elementi dei gruppi corrispondenti (oss. I, 38).

CAPITOLO III.

Il numero nella sua prima formazione.
Numeri naturali.

§ 1.

Primo concetto di numero.

45. *Def. I. Unità* si chiama una cosa qualunque X data (6) considerando che è una anzichè più cose (2, oss. 8), facendo astrazione dagli altri suoi contrassegni (9, 7).

a. Cose distinte considerate come unità sono uguali.

Invero si considerano rispetto al solo contrassegno uno (def. I; oss. III. 9); quindi il concetto uno dell'una è il concetto uno dell'altra, dunque a. (def. VI, 8).

Def. II. Dato un gruppo ordinato di oggetti ...$ABCDE$... qualunqne (26; b, 37), e se si considera ciascuno di questi oggetti come unità (def. I) e facendo astrazione dal modo con cui sono posti, non però dal loro ordine (7; def. I, 38), in modo che oggetti distinti danno unità distinte, il gruppo ordinato di unità che così risulta si chiama *numero* del gruppo dato [1]).

b. Gli elementi del gruppo ordinato (A) *e le unità del numero cui dà origine si corrispondono univocamente e nel medesimo ordine.*

Difatti gli elementi del gruppo e le unità del numero si corrispondono univocamente perchè ad ogni elemento A del gruppo corrisponde una sola unità del numero, e a questa unità corrisponde così il solo elemento A, poichè è data da questo solo elemento del gruppo (def. II), inoltre a un elemento C che segue A e precede B corrisponde un'unità che segue l'unità corrispondente ad A e precede quella corrispondente a B (def. II; def. III, 42).

b'. Ai sottogruppi di un gruppo ordinato corrispondono i numeri che sono parti del numero corrispondente al gruppo (def. II; d, 42 e def. II, 25).

Oss. *II.* L'unità è parte di tutti i numeri (b', def. I), ed è il numero corrispondente ad un gruppo di un solo elemento (def. III, 13; 19; 26).

1) Ciò non significa che ogni forma che chiameremo numero debba dedursi in questo modo (Vedi nota n. 4), come non significa che ci riferiamo soltanto al numero intero finito (Vedi § 2 e 3 Cap. VI). Scegliendo come def. del numero la seguente: «Si dice che i gruppi ordinati qualunque (A) e (B) hanno lo *stesso numero* quando si possono far corrispondere univocamente e nel medesimo ordine (def. II, 42) » si incontrerebbe il difetto gia notato altrove che si introdurrebbe il concetto d'identità (def. VI, 8), senza sapere se è in questo caso applicabile. Ciò potrebbe però essere giustificato facilmente. Ma così il *numero* verrebbe introdotto come un modo di dire per esprimere il concetto della corrispondenza univoca e del medesimo ordine, che non è ancora quello di numero da noi definito (def. II, 42, def. II e oss. I). È chiaro poi che nella nostra genesi il numero intero in generale e in particolare quello naturale (46) deriva dalle operazioni e dai concetti determinati e comuni del cap. I.

c. Numeri le unità dei quali si corrispondono univocamente e nel medesimo ordine, e di cui l'uno non è parte o uguale ad una parte dell'altro, sono uguali.

Se (A) e (B) sono gruppi ordinati dati di elementi, (A') e (B') le loro rappresentazioni mentali (4), (A) e (A'), (B) e (B') si corrispondono univocamente e nel medesimo ordine (es. 2, 42). Se si tien conto di questa sola corrispondenza come contrassegno di confronto fra i gruppi (A) e (B) (def. I, 9) e se i gruppi (A) e (B) si corrispondono univocamente e nel medesimo ordine se corrispondono univocamente e nel medesimo ordine ad (A'), e quindi rispetto al suddetto contrassegno sono uguali (def. I, 9).

Ma se si tien conto altresì, come si deve fare in generale (def. I, 38) della diversità degli elementi, e della diversità del modo di posizione fra gli elementi e da quella che risulta dall'essere un gruppo parte o uguale ad una parte dell'altro (def. II, 27), allora i gruppi (A) e (B) non sono più in generale uguali colla sola corrispondenza univoca e del medesimo ordine. Nei numeri di (A) e di (B) considerati come gruppi dati di unità (def. I e def. II), gli elementi sono uguali (a), ed è escluso il modo di posizione fra gli elementi (def. II) mentre non è escluso il terzo contrassegno di confronto. Se questa diversità non esiste e vi è la corrispondenza univoca e nel medesimo ordine come ammette la tesi, i numeri di (A) e (B) sono uguali (def. III, 9).

Oss I. Se il numero si fa dipendere invece dalla sola corrispondenza univoca e del medesimo ordine, o anche dalla sola corrispondenza univoca i numeri di (A) e di (B) sono uguali se vi è nel primo caso la corrispondenza univoca del medesimo ordine, e la sola corrispondenza univoca nel secondo caso.

§ 2.

Operazione del numerare. — Gruppi e numeri naturali. Addizione.

46. *Def. I.* L'operazione colla quale si determina il numero di un gruppo ordinato (def. II, 45), si chiama operazione del *numerare* o del *contare.*

Def. II. Ai gruppi ordinati naturali (35, oss. 28) corrispondono numeri che chiameremo *numeri naturali* (def. II, 45).

Oss. I. Il numero nella sua prima costruzione, o il numero naturale, è l'unione successiva di più unità ottenute colla semplice ripetizione limitata dell'unità (def. I, oss. 35 e def. 15).

a. Ogni parte di un numero naturale è pure un numero naturale (*f.* 39 e def. I).

b. I numeri naturali si possono far corrispondere univocamente e nel medesimo ordine ai sottogruppi di un gruppo ordinato illimitato di 1ª specie ed aventi con questo lo stesso primo elemento.

Sia (A) il gruppo naturale corrispondente ad un numero dato, (B) il gruppo ordinato illimitato di 1ª specie. Il gruppo (A) si può far corrispondere univocamente e nello stesso ordine ad un sottogruppo (A') di (B) collo stesso

primo elemento (*a*, 43), e quindi le unità del numero si possono far corrispondere univocamente e nello stesso ordine al gruppo (*A*) (*f*. 42).

c. Tutti i numeri naturali nel modo indicato dal teor. b formano una serie illimitata di 1ª specie.

Segue immediatamente dalla def. I e da *i*. 39.

Def. III. Chiameremo questa serie, per seguire l'uso comune, *serie naturale* dei numeri naturali e la indicheremo col segno (I).

c'. Ogni numero naturale si ottiene colla semplice unione successiva limitata dell'unità ad un numero precedente nella serie (I) [1]) (*c;* def. II, *h*, *g*, 39).

47. *a. L'operazione dell'unire l'unità (e quindi successivamente delle unità di un numero) o un numero all'unità o ad un numero, è a senso unico.*

L'unione semplice è un'operazione a senso unico (I, 29; def. II, 11); il gruppo ordinato di unità che ne deriva può dipendere dall'ordine e dal modo con cui sono posti i suoi elementi (def. I, 38). Ma l'ordine è in tal caso già stabilito, poichè ad es. al tutto (*ABCD*) si unisce l'elemento *E*. Il numero non dipende dal modo con cui sono posti gli elementi del gruppo corrispondente (def. II, 45), quindi il teor. è dimostrato.

Def. I. L'unione di un numero ad un altro numero (def. II, 45 e def. I, 26) si chiama *addizione*, e il risultato si chiama *somma* del secondo numero al primo. I numeri dati si chiamano *sommandi* o *addendi*.

Ind. I. Useremo il segno + per questa operazione.

Oss. I. Il gruppo ordinato [(*A*)) (*B*)] se (*A*), (*B*) rappresentano i numeri a e b rappresenta la somma $a+b$ (ind. 27).

Ind. II. Indicheremo l'unità col segno 1.

Ind. III. Il primo numero dopo l'unità si ottiene dall'unione dell'unità ripetuta all'unità cioè;

$$1+1$$

che indicheremo col segno 2 (*due*), e quindi:

$$1+1=2 \qquad (b,\ 9),$$

il primo numero dopo 2 è $2+1$ che indicheremo col segno 3 (*tre*), e quindi:

$$2+1=3$$

Così il primo numero dopo il tre è $3+1$, che indicheremo col segno 4 (*quattro*), ed avremo:

$$3+1=4$$

e così via. In generale dato un numero indicato con m il numero successivo della serie (I) si indica con $m+1$.

I numeri dedotti dalla ripetizione limitata dell'unità e che si seguono secondo l'ordine della serie (I) sono indicati come segue:

(1) 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11... 20, 21... 100. 101... 200...

---

1) Il nostro gruppo ordinato illimitato qualsiasi che ha un primo elemento (26) e nel quale ogni elemento dato ha un solo elemento consecutivo seguente e uno antecedente (24) soddisfa alle prime 8 delle 9 proprietà che il sig. *Peano* dà come assiomi nei suoi Arith. Principia (1889) per il segno N (numero), alcuni dei quali sono però proprietà logiche generali come $a=a$; se $a=b$ si deduce $b=a$; se $a=b$, $b=c$ si deduce $a=c$, che corrispondono alle proprietà I, def. VI; *d*. *e* del n 8. La proprietà 5 § 1 del sig. *Peano* esprime che l'uguaglianza ha luogo relativamente al solo concetto di numero. (vedi l'oss. IV, del num. 47). La proprietà 9 (§ 1) esprime appunto la nostra proprietà *l*. del n. 39. Come ulteriore proprietà caratteristica del gruppo ordinato illimitato che ha un primo elemento noi abbiamo invece la def. di serie e quindi di gruppo illimitato di 1. specie (Vedi nota n. 39 e 50).

e si chiamano successivamente uno, due, tre, quattro, cinque, sei, sette, otto, nove, dieci, undici... venti, ventuno... cento, cento e uno... duecento... [1])

Def. II. I segni (*cifre*) che servono ad indicare i numeri si chiamano pure numeri [2]).

Oss. II. I punti in (I) occupano il posto degli altri numeri della serie.

Oss. III. Si usano pure delle lettere ad es. a, b, ecc. per indicare i numeri della serie (I); ma mentre ad es. 9 indica un numero di posto determinato della serie (I), a indica invece un numero qualunque di essa (def. VIII, 13, 19), ed a si chiama pure un numero.

Quando però si dice che è dato un numero a di (I) s' intende in generale un numero qualunque di (I) (def, VIII, 13 e 19), ma che rappresenta in ogni operazione lo stesso numero di (I).

b. Se a e b rappresentano lo stesso numero di (I), *a e b, considerati come due numeri, sono uguali.*

Difatti possono sostituirsi uno all'altro, epperò scriveremo

$$a = b \quad \text{da cui} \quad b = a \quad (b,\ 9;\ d,\ 8).$$

Oss. IV. Ci basta pei soli numeri il segno = non considerando tra essi altra uguaglianza (oss. I, 9) [3]).

c. Due numeri uguali ad un terzo sono uguali fra loro.

Cioè se $a = b$, $b = c$ si ha $a = c$.

Se a, b, c sono segni di uno stesso gruppo di unità la proprietà è conseguenza di b, 9. Se invece a, b e c sono gruppi di unità distinti allora la proprietà è conseguenza del teor. e, 8.

Oss. V. Se bastasse la sola corrispondensa univoca o del medesimo ordine per l'uguaglianza dei numeri (oss. I, 45) a e b; b e c si corrisponderebbero nel secondo caso univocamente e nel medesimo ordine, e quindi anche a e c (f, 42) e quindi $a = c$.

Così se bastasse la sola corrispondenza univoca (oss. I, 45).

d. *Se* $a = a'$, $b = b'$ si ha $a + b = a' + b' = a' + b = a + b'$

Ossia: *Se a numeri uguali si sommano numeri uguali si ottengono numeri uguali.*

Difatti siano (A) e (A'), (B) e (B') i gruppi corrispondenti ai numeri a a'; b e b'. Il gruppo che si ottiene dall'unione del gruppo (B) al gruppo (A), cioè $[(A)(B)]$, rappresenta il numero $a + b$ (oss. I); il gruppo $[(A')(B')]$ rappresenta il numero $a' + b'$. Ma siccome $a = a'$, $b = b'$ si ha $a + b = a' + b'$ perchè l'addizione è a senso unico (a) e non si tien conto d'altra parte della diversità di posizione fra le unità dei numeri e quindi dei gruppi (def. II, 45 e 41).

---

1) Qui, se io non avessi bisogno dei concetti due, tre, ecc. e se non fosse poi opportuno adoperarli nel discorso, mentre li abbiamo esclusi fino ad ora, avrei potuto lasciare impregiudicata la questione del sistema di numerazione. Trattando completamente la teoria dei numeri interi, questo punto dovrebbe essere trattato con maggiore diffusione mentre altre considerazioni precedenti trattando esclusivamente questa teoria potrebbero essere tralasciate o semplificate.

2) I tedeschi hanno due vocaboli distinti pei numeri. Per quelli che si ottengono contando gli oggetti di un gruppo usano la parola «Anzahl» per i segni che li indicano il vocabolo «Zahl», e i due concetti sono ben distinti.

3) Questa indicazione diversa di uno stesso numero occorre spesso nelle operazioni numeriche quando prima o durante un'operazione si considera un numero che pure appartenendo alla serie (I) ed essendo sempre lo stesso, é indeterminato. E se vi è ancora un altro numero indeterminato, può darsi che eseguite le operazioni si trovi per l'uno e per l'altro lo stesso numero di (I). Ciò avviene anche per es. nelle dimostrazioni per assurdo quando i risultati di due operazioni numeriche si vogliono dimostrare uguali, ammettendo che non rappresentino lo stesso numero di (I) ed indicandoli perciò nella dimostrazione con segni diversi.

Oss. VI. Se bastasse la sola corrispondenza univoca e nel medesimo ordine per l'uguaglianza dei numeri (oss. I, 45) i gruppi a e a' ; b e b' si corrisponderebbero univocamente e nel medesimo ordine, e quindi anche i gruppi $a+a'$, $b+b'$ perchè questi non contengono altri elementi che non siano in a e a', b e b' (II, 29), e perciò anche in tal caso $a+a'=b+b'$.

Similmente se bastasse la sola corrispondenza univoca (oss. I, 45).

Def. III. Gli elementi di un gruppo ordinato naturale che corrisponde al numero n corrispondono successivamente ai numeri 1, 2.., $n-1, n$ delle serie, (I) (a, 43; i 39; c, 46; b, 43). L'ultimo elemento lo diremo perciò l'elemento n^{no} (*ennesimo*) del gruppo.

Def. IV. Ripetere un'operazione b (o *un numero b di*) *volte* significa che considerata ogni ripetizione (15) come un oggetto rappresentante l'unità, il numero che si ottiene da queste ripetizioni è b [1]).

e. La somma $a+b$ è un numero che si ottiene sommando successivamente le unità di b ad a e ai numeri che così si ottengono.

Siano (A) e (B) i gruppi corrispondenti ai numeri a e b; $[(A)(B)]$ rappresenta il numero $a+b$ (oss. I).

Il numero $a+1$ si ottiene unendo ad (A) il primo elemento di (B) (def. II, 45 e ind. III); il numero $(a+1)+1$ unendo al gruppo così ottenuto il secondo elemento di (B). Ripetendo l'operazione b volte, useremo tutti gli elementi di (B). Ma il gruppo così ottenuto è $[(A)(B)]$ (a. 40), dunque c (def. II, 45).

Oss. VII. Bisogna tener presente che:

$$(A)(B) \equiv (A_1 A_2 ... A_a)(B_1 B_2 .. B_b) \equiv (A_1 A_2 ... A_n B_1)(B_2 B_3 B_4 ... B_b) \text{ ecc.}$$
$$\equiv A_1 A_2 A_3 .. B_a B_1 B_2 .. B_b \quad (a, 40 \text{ e def. II}, 45).$$

f. Dati tre numeri a, b, c si ha:

$$(a+b)+c=a+(b+c)=a+b+c \quad (\textit{legge associativa}).$$

Essa vale anche per un numero qualunque di sommandi (def. II. 45 e a. 40; c, 46) [2]).

Oss. VIII. D'ora innanzi in questo capitolo e nei seguenti finchè non diremo diversamente considereremo soltanto i numeri naturali e li chiameremo perciò anche numeri soltanto.

48. *a. In un gruppo ordinato naturale dato, ogni elemento può essere considerato al posto di ogni altro mediante lo scambio di posto di elementi consecutivi.*

---

1) Ciò dimostra che per lo meno non è chiara l'osservazione di *G. Cantor* (Zeitschrift für Philosophie v. Fichte, Vol. 91 pag. 252) ove dice: l'addizione di uni (Einsen) non può servire alla definizione del numero, perchè non si può dire *quante volte* devono essere sommati senza il numero stesso che si vuol definire. Il numero in generale secondo la nostra def. II, n. 45, è ottenuto come gruppo ordinato dall'operazione dell'unire successivamente un oggetto ad un altro, senza che vi sia bisogno di dire quante volte noi ripetiamo questa operazione. Se si tratta poi di un numero particolare si può ottenere coll'addizione di unità. Il numero 2 si ottiene ripetendo *una* volta l'unità, il numero 3 ripetendo *due* volte l'unità, e così via. E supposto determinato così un numero qualunque che indico con $n-1$, il numero n si ottiene da 1 ripetendo $n-1$ volte l'unità.

2) *H. Grassmann* ammette la legge associativa dei numeri, come segni, pel seguente caso:

$$(a+b)+1=a+b+1$$

come anche $(a+b)+c=a+b+c$ (Lehr. d. Arith. 1861, p. 2 e 4). Vedi anche ad es. *Hankel* l. c. e *Helmoltz* (Das Zählens und. Messen. Phil. Auf. Eduard Zeller), *Peano* (l. c.), ecç,

La proprietà è chiara per il gruppo ordinato AB, che corrisponde al numero 2 (def. I, 46; ind. III, 47), basta considerare prima B e poi A (3 e 20), ossia scambiare nella nostra mente il posto di B con quello di A (def. I, 33). Supponiamo che ciò valga per il gruppo di elementi ordinato

$$ABCD\dots MN \qquad (1)$$

che corrisponde ad un numero n, e consideriamo il gruppo

$$ABCD\dots MNN' \equiv (ABCD\dots M)(NN') \qquad (2) \quad (a,\ 40),$$

cui corrisponde il numero $n+1$ (ind. III, 47).

Lasciando al medesimo posto in questo gruppo gli elementi ehe precedono NN', per quanto si è detto sopra, si possono scambiare fra loro N e N', e si ha il gruppo:

$$(ABCD\dots M)(NN') \equiv (ABCD\dots MN')N \equiv ABCD\dots MN'N \ (a,\ 40).$$

E siccome per ipotesi il posto di N si può scambiare nel gruppo (1) col posto di qualunque elemento che lo precede, così potremo scambiare N' in $ABCD\dots MN'$ col posto di qualunque altro elemento del gruppo $ABCD\dots M$; e poi considerato un elemento al posto di N' in $ABCD\dots MN'N$ lo potremo scambiare con N, che è il posto di N' nel gruppo dato (2). Ma la proprietà è vera per AB, è vera dunque per ogni gruppo naturale (a, 43; i e l, 39).

b. Cambiando l'ordine degli elementi di un gruppo ordinato [1] *si ottiene un gruppo che corrisponde univocamente al primo facendo corrispondere ogni elemento a sè stesso.*

Perchè ogni elemento dell' uno è elemento dell' altro (II, 29), ossia non vi è alcun elemento dell'uno che non sia elemento dell'altro; e quindi ad ogni elemento dell'uno, corrispondendo a sè stesso, corrisponde un elemento dell'altro, vale a dire si ha fra i due gruppi una corrispondenza univoca (def. II, 42).

c. Dato un gruppo ordinato naturale scambiando di posto degli elementi consecutivi si ottengono tutti i gruppi ordinati formati cogli elementi del primo.

Sia dapprima dato il gruppo ordinato $AB \equiv (A)$, che contiene i soli elementi A e B. Sia (A') un altro gruppo ordinato con questi stessi elementi. Se il primo elemento A' di (A') è A, siccome (A') deve avere anche l'elemento B, si ha $(A') \equiv (A)$ (II, b, 29). Se invece A' è B, allora B' secondo elemento di (A') è A, perchè non contiene altri elementi oltre A e B (II, 29). Un terzo gruppo è escluso perchè supposto che esista non può essere che (A) o (A'), dovendo essere A o B il primo elemento di un terzo gruppo cogli elementi A, B, e quindi B o A il secondo elemento, non potendo averne altri (II. 29).

Supponiamo ora che il teorema sia vero per un gruppo naturale:

$$(A) \equiv ABCD\dots X$$

e sia dato un gruppo indipendentemente dal numero che rappresenta

$$(B) \equiv ABCD\dots NP \equiv (A)P \qquad (a,\ 40)$$

e consideriamo un altro gruppo ordinato formato cogli elementi di (B), cioè:

$$(B') \equiv A'B'C'D'\dots N'P'$$

---

[1] Cambiando l'ordine ecc. significa considerare gli elementi dati in un ordine diverso.

In (B') l'elemento P occupa un dato posto, e si può scambiare con P' mediante scambi di elementi consecutivi (a), e si abbia così il gruppo ordinato:

$$(B'') \equiv A''B''C''...N''\, P$$

ove $A''B''C''...N''$ sono gli elementi di (A) indipendentemente dal loro ordine (II, 29) Facendo gli scambi inversi da (B'') si ottiene (B') (def. I, 33). Basta osservare che consideriamo P successivamente nei posti ad es. degli elementi che lo seguono in (B') (24, a, 35); che quando P' occupa il posto del suo consecutivo antecedente, ogni elemento che seguiva P è pensato nel posto del suo consecutivo antecedente; e che poi si considera P successivamente nel posto degli elementi precedenti (21) finchè occupa il posto di P, e che dopo questi scambi ogni elemento che seguiva dapprima P occupa il posto del consecutivo seguente nell'ordine dato; vale a dire dopo l'operazione ogni altro elemento che non sia P o P' occupa lo stesso posto (a. 33). L'operazione inversa ci dà perciò il gruppo primitivo (B). Dunque (B') si ottiene da (B'') con uno scambio di elementi consecutivi, ma (B'') si ottiene per ipotesi colla stessa operazione da (B), dunque (B') si ottiene da (B) con scambi di elementi consecutivi. Dunque se il teorema vale per il gruppo (A) vale per il gruppo $(A)\,P$; ma esso vale per il gruppo AB, dunque vale per tutti i gruppi ordinati naturali (a, 43, i e l, 39).

d. *Se due gruppi ordinati si corrispondono univocamente, ad ogni elemento dell'uno si può far corrispondere un elemento dell'altro scelto ad arbitrio, mantenendo la corrispondenza univoca fra gli altri elementi.*

Supponiamo che X e Y siano elementi qualunque del primo gruppo (def. VIII, 13) (che sono sempre distinti quando non si dice diversamente (oss. I, 8)); e ad essi corrispondono gli elemenli X' e Y' del secondo gruppo. Siccome possiamo scambiare di posto Y con X (a) all'elemento Y corrisponderà con questo scambio l'elemento X' nel secondo gruppo, perchè gli elementi X e Y, X' e Y' sono considerati separatamente dagli altri (7), i quali si corrispondono come prima. Facendo dunque corrispondere ad X l'elemento Y, i rimanenti elementi (7) si corrispondono univocamente. Il teor. è dunque dimostrato.

d'. *Se in due gruppi ordinati naturali che si corrispondono univocamente a b elementi qualunque dell'uno si fanno corrispondere b elementi dell'altro, i rimanenti elementi si corrispondouo univocamente.*

Siano $A_1\, A_2 ...\, A_b\, ...\, A_m$, $A'_1\, A'_2 ...\, A'_b\, ...\, A'_m$ i due gruppi dati.

Ad un elemento del primo ad es. A_1 si può far corrispondere un elemento qualunque dato X del secondo, i rimanenti elementi si corrispondono univocamente (d). Facendo astrazione dagli elementi A_1 e X, e ripetendo l'operazione b volte pei gruppi dati dai rimanenti elementi (def. IV, 47), i gruppi di elementi rimanenti dopo ciascuna di queste ripetizioni si corrispondono univocamente (d), e quindi anche dopo la b^a ripetizione (def. III, 47; l, 39).

e. *Se gli elementi di due gruppi ordinati naturali si corrispondono univocamente e nel medesimo ordine, cambiando l'ordine di uno qualunque di essi, si corrispondono univocamente.*

Siano $ABC..\, M$, $A'B'C'...M'$ i gruppi dati, e sia $A''B''C''M''$ un altro gruppo ordinato ottenuto cogli elementi del primo. Siccome il gruppo $A''B''C''...M''$ si

può far corrispondere univocamente al gruppo $ABC... M$ (*b*), e $A'B'C'...M'$ per dato corrisponde univocamente al gruppo $ABC..M$, i gruppi $A''B''C''.. M''$, $A'B'C'..M'$ si corrispondono univocamente (*e*, 42).

f. Un gruppo naturale non può corrispondere univocamente ad un suo sottogruppo.

Ciò è evidente per il gruppo AB perchè non può corrispondere univocamente ad un solo elemento A o B, altrimenti A o B non avrebbe elemento corrispondente nel sottogruppo dato, che in questo caso sarebbe di un solo elemento (def. III, 13 e oss. I, 42). Se tale proprietà ha anche un gruppo (A) si dimostra facilmente che l'ha anche il gruppo $(A)\, B$, cioè il gruppo dato dall'unione di un altro elemento B al gruppo (A). Supponiamo il contrario, e sia (A') una parte di $(A)\, B$, tale che si possano far corrispondere univocamente gli elementi di (A') con quelli di $(A)\, B$. Si presentano due casi: o B non è compreso in (A') o lo è. Nel primo caso all'elemento B si può far corrispondere un elemento qualunque ad es. l'ultimo di (A') (*d*), supposto che (A') sia ordinato. Indicando questo elemento con B' e con (A'') la parte rimanente di (A'), (A'') corrisponderebbe univocamente ad (A) (*d*) contro l'ipotesi. Se invece B fosse compreso in (A'), stabilita la corrispondenza fra (A') e $(A)\, B$, si potrebbe far corrispondere B a sè stesso (*d*); e quindi di (A') rimarrebbe una parte (A'') che corrisponderebbe anche in questo caso ad (A) (*d*) contro l'ipotesi. Il teorema se vale per (A) vale anche per $(A)\, B$; ma vale pel gruppo di elementi AB, dunque vale per tutti i gruppi naturali (*a*, 43; *i* e *l*, 39).

g. Se due gruppi naturali si corrispondono univocamente e nello stesso ordine essi rappresentano numeri uguali.

Non può darsi che due gruppi naturali e quindi anche due numeri (def. II, 45) si corrispondano univocamente e nel medesimo ordine e l'uno sia parte od uguale ad una parte dell'altro, perchè questo corrisponderebbe univocamente e nel medesimo ordine quindi anche univocamente ad una sua parte, contro *f*; dunque *g* (*c*, 45)

h. Qualunque sia l'ordine in cui si considerano gli elementi di un gruppo ordinato naturale esso rappresenta lo stesso numero.

Siano A e B gli elementi del gruppo (A), 1_a, 1_b le unità del numero corrispondente $1_a + 1_b$ (def. I, 46; ind. III, 47). Agli elementi B, A possiamo far corrispondere univocamente le stesse unità 1_a, 1_b perchè fatto corrispondere B a 1_a, l'elemento A non può corrispondere che a 1_b (*d*). La corrispondenza univoca può ritenersi in tal caso anche dello stesso ordine (oss. II, def. III, 42).

Supponiamo ora che la proprietà sia vera per un gruppo naturale qualunque dato

$$(M) \equiv ABCD... M$$

e

$$\mu = 1_a\ 1_b\ 1_c\ 1_d \dots 1_m$$

sia la serie delle unità corrispondenti agli elementi di (M); il numero corrispondente sia:

$$m = 1_a + 1_b + 1_c + 1_d + \dots + 1_m \quad \text{(def. II, 45; ind. I, oss. III, 47)}$$

Sia dato il gruppo:

$$(M)\, N \equiv ABCD... MN \qquad (a,\ 40)$$

cui corrisponde la serie di unità

$$\mu\ 1_n = 1_a\, 1_b\, 1_c\, 1_d \dots 1_m\, 1_n$$

e il numero

$$m + 1_n = 1_a + 1_b + 1_c + 1_d + \dots + 1_m + 1_n$$

Se inverto l'ordine di *M* ed *N*, vale a dire il posto di *M* con quello di *N*, il che è possibile *(a)*, ho il gruppo:

ABCD... NM (1)

e quindi facendo corrispondere agli elementi che precedono *N* le stesse unità 1_a 1_b 1_c 1_d... che precedono 1_m come pel gruppo *ABCD... MN* e ad *N* l'unità 1_m, all'elemento *M* dovrà corrispondere l'unità 1_n *(d)*; e quindi al gruppo *ABCD... NM* corrisponderà lo stesso numero $m + 1_n$ (def. II. 45, *f.* 42 e *g*). Ma nel gruppo *ABCD... N* si può scambiare il posto di *N* mediante scambi di elementi consecutivi con quello di qualunque altro elemento precedente (*a*) senza che per ipotesi cambî il numero corrispondente. Così scambiando poi di posto ognuno di questi elementi quando occupa il posto di *N* con *M* in (1), per ciò che si è detto testè al gruppo corrisponderà lo stesso numero. Ma in questo modo si ottengono tutti i gruppi ordinati dati dagli elementi del gruppo (*M*) *N* (*c*), dunque se il teorema è vero per il gruppo (*M*) vale anche pel gruppo (*M*) *N;* ma vale pel gruppo *AB* dunque vale per tutti i gruppi ordinati naturali (*a*, 43; *i* e *l*, 39). [1]).

1) In generale nel numero degli oggetti di un gruppo non si tien conto dell'ordine di questi oggetti, e non si segue il metodo di derivare le proprietà del numero dalla corrispondenza coi gruppi ordinati, mentre se il numero deriva nella sua più semplice costruzione dalla funzione logica del numerare (45 e def. I, 46), esso dipende dall'ordine nel quale si contano gli oggetti del gruppo dato. I numeri interi finiti (che corrispondono come vedremo ai nostri gruppi naturali) sono indipendenti dall'ordine degli elementi dei gruppi corrispondenti (*h*), ma ciò deve essere dimostrato, perchè vi sono gruppi di elementi cui corrispondono i numeri transfiniti di *G. Cantor*, pei quali non ha più luogo questa proprietà (Acta Math. vol 2 pag. 385, 1883. Grundlagen einer Mannigfaltigkeitslehre, Leipzig 1883 pag. 32 e seg. — Zeitschrift für Phil. v. Fichte Vol. 91 fasc· I e 2 1887, ecc.). Quanto dice *Clifford* del teor. *h*. (Il senso comune nelle scienze esatte, Milano 1888) é una spiegazione empirica ma matematicamente suppone la proprietà medesima. Così ha ragione *G. Cantor* quando rileva l'analogo difetto nello scritto di *Kronecker* (Phil. Aufs. Ed. Zeller-Ueber den Zahlbegriff, p. 268). *Peano* (l. c.) non se ne occupa. Per quanto so é lo *Schröder* che ha il merito di aver trattato per primo una tale questione (Lehrbuch der Arith. u. Algebra. Leipzig 1873). Da quanto egli dice nell'enunciato a pag. 8 pare che basti che siano le *stesse* cose che vengono contate in diversi ordini affinchè i numeri risultanti siano uguali; ma ciò ammette già il teor. suddetto perchè anche nelle due serie 1 2 3...*n*... 23...*n*... 1 si hanno le stesse cose, ma i numeri sono diversi. Così il teor. di pag. 20 è enunciato in generale, ma nella dimostrazione non completa comunicatagli dal prof. *Lüroth* egli dichiara di avere ammesso tacitamente che si tratta di una molteplicità finita limitata (endlich begrenzte Menge) che non ci pare ben definita. Secondo noi la proprietà che ad un elemento non può corrispondere univocamente nessun elemento, analoga a quella che *Schröder* assume come assioma, è compresa nella corrispondenza univoca stessa (oss. I. 48).

G. Cantor distingue due specie di numeri: il Cardinalzahl o Mächtigkeit (potenza) e l'Idealzahl. Il « Cardinalzahl » secondo *Cantor* si ottiene da una molteplicità di cose facendo astrazione e dalle proprietà di queste cose e dall'ordine di esse, e *chiama* uguali due molteplicità quando si corrispondono univocamente, e quindi ad esse corrisponde lo stesso « Cardinalzahl »; L'Idealzahl » l'ottiene invece facendo astrazione dalle proprietà delle cose ma non dall'ordine in cui sono date o si considerano. Il « Cardinalzahl » così definito non deriva certo dalla funzione logica del numerare poichè quando si conta si conta in un dato ordine salvo poi a vedere se cambiando l'ordine del conteggio si ottiene lo stesso numero.

Anzichè dire che due molteplicità fatta astrazione dalle proprietà delle cose che le compongono e dell'ordine di esso si *chiamano uguali* quando si corrispondono univocamente, nello stesso ordine o no, si può dimostrare che se due molteplicità sono identiche (def. VI, 8 e def. III, 9) esse si corrispondono univocamente e nello stesso ordine, e se una è contenuta nell'altra questa è contenuta nella prima; e se si tien conto soltanto della sola corrispondonza univoca fra una molteplicità e la sua rappresentazione mentale (4), si dimostra pure che se due molteplicità si corrispondono univocamente senza tener conto che l'una sia o no parte dell'altra, le due melteplicità *sono* uguali.

Oss. I. **D' ora innanzi possiamo dunque non tener conto dell' ordine dei gruppi che corrispondono ai numeri naturali.**

i. Due gruppi naturali che rappresentano lo stesso numero si possono far corrispondere univocamente.

Siano $A, B, C, D... M; A', B', C', D',... M'$ i gruppi dati. Le unità del numero di un gruppo corrispondono univocamente e nello stesso ordine agli elementi del gruppo (b, 45). Gli elementi del primo gruppo ordinato siano:

$$A_1 \; A_2 \; A_3 ... \; A_n \qquad (A)$$

e le unità del numero corrispondente

$$a_1 \; a_2 \; a_3 ... \; a_n \qquad (a)$$

perchè le unità possiamo indicarle in tal caso anche con segni diversi da 1. La unità di (a) per dato corrispondono univocamente e nello stesso ordine agli elementi del secondo gruppo $A'_1 \; A'_2 \; A'_3 ... \; A'_n \equiv (A')$. Siccome i gruppi (A) e (A') corrispondono univocamente e nel medesimo ordine al gruppo (a), così si corrispondono univocamente e nel medesimo ordine fra loro (f, 42). Ma il numero del primo gruppo non cambia se si cambia l'ordine dei suoi elementi (h), e cambiando quest'ordine i due gruppi si corrispondono univocamente (e). Dunque ecc.

i'. Se due numeri naturali sono uguali le unità di essi si corrispondono univocamente (i e def. II, 46).

l. Due gruppi naturali che si corrispondono univocamente rappresentano lo stesso numero (g e h).

l'. Se le unità di due numeri a e b si corrispondono univocamente, i due numeri sono uguali.

m. La somma del numero b al numero a non cambia se si cambia l'ordine dei due numeri (legge commutativa).

Dim. 1. Il numero a sia rappresentato dal gruppo $(A) \equiv ABC... M$ ed il numero b dal gruppo $(A') \equiv A'B'C'... N'$; la somma $a + b$ viene rappresentata dal gruppo $[(A)(A')] \equiv ABCD... M \; A'B'C' \; N'$ (oss. I, 47). Si abbia un altro gruppo (B) che corrisponda univocamente al gruppo $[(A) \; (A')]$. Se ai primi b elementi del secondo si fanno corrispondere gli ultimi b elementi del primo i rimanenti elementi si corrispondono univocamente (d'), e perciò devono essere a in ambidue i gruppi (l). Ma i due gruppi (B) e $[(A) \; (A')]$ rappresentano lo stesso numero (l) dunque:

$$a + b = b + a$$

Dim. 2. Il gruppo $[(A')(A)]$ ha tutti gli elementi del gruppo $[(A)(A')]$ come questo ha tutti gli elementi del primo, perchè ogni elemento del primo o del secondo appartiene ad (A) o (A') (II, 29); e quindi i due gruppi differiscono solo per l'ordine e perciò si corrispondono univocamente (b) e rappresentano lo stesso numoro (l).

Dim. 3. Supponiamo dapprima che ad un elemento A sia unito un gruppo $A_1 \; A_2 \; A_3 ... \; A_{m+1}$ di $m + 1$ elementi. Facciamo corrispondere l'elemento A all'elemento A_1, A_1 all'elemento A_2, ecc. l'elemento A_{m-1} all'elemento A_m, A_m ad A_{m+1}, vale a dire ogni elemento al suo consecutivo seguente nella serie $A \; A_1 \; A_2 ... \; A_{m+1}$. I gruppi $A \; A_1 \; A_2 ... \; A_m$, $A_1 \; A_2 ... \; A_{m+1}$ si corrispondono così uni-

vocamente e nel medesimo ordine (a, 42), e quindi corrispondono allo stesso numero (l), cioè:

$$1 + m = m + 1 \qquad (1)$$

Ammettiamo che il teorema sia vero per m ed n,

$$m + n = n + m \qquad (2)$$

Si ha (d, f, 47): $m+(n+1)=(m+n)+1=(n+m)+1=n+(m+1)=(n+1)+m$. Ma il teorema è vero per $n+1$ (1), dunque il teorema vale in generale (c', 46; d. 39 l, 39) [1]).

§ 3

Concetto di un numero maggiore o minore di un altro. Altre proprieta dei numeri.

49. *Def. I.* Se due gruppi naturali $ABCD \ldots N$, $A'B'C'D' \ldots N'$ non hanno lo stesso numero, nella corrispondenza univoca dei loro elementi consecutivi a cominciare dai primi cioè A e A', B e B', C e C' ecc. vi sono elementi dell'uno ad es. del primo a cui non corrispondono elementi del secondo, perchè altrimenti rappresenterebbero lo stesso numero (h, 48). Si dice perciò che il primo contiene *più* elementi del secondo, ed il secondo *meno* elementi del primo; oppure che il primo è *maggiore* del secondo e il secondo è *minore* del primo.

Def. II. I numeri a e b che corrispondono ai due gruppi non essendo uguali si chiamano *disuguali*, e quello che corrisponde al primo dicesi *maggiore* di quello che corrisponde al secondo, e questo *minore* del primo. Si scrive:

$$a > b, \quad b < a.$$

a. Ogni gruppo ed ogni numero naturale è maggiore di ogni sua parte (def. I, II; f e h, 48).

50. *a. Se a numeri dati sommando numeri uguali si ottengono numeri uguali, i numeri dati sono uguali.*

Siano (A) e (B) i gruppi corrispondenti ai numeri dati a e b, e si uniscano rispettivameate ad essi i gruppi (A') e (B'), che rappresentano i due numeri a' e b' uguali, che vengono sommati ad a e b. Si hanno i gruppi $[(A)(A')]$ $[(B)(B')]$ che rappresentando per ipotesi numeri uguali si corrispondono univocamente (i, 48). Ma si corrispondono univocamente per la stessa ragione i gruppi (A') e (B'), dunque si corrispondono anche univocamente i rimanenti gruppi (A) e (B) (d, 48); e quindi i loro numeri corrispondenti a e b sono uguali (h, 48, e b, 47).

a'. Se a numeri uguali sommando numeri dati si ottengono numeri uguali, i numeri dati sono uguali.

Se a e a' sono numeri uguali e b e b' i numeri aggiunti, c e c' i risultati, si ha:

$$a + b = c, \quad a' + b' = c'$$

ma si ha pure:

$$b + a = c, \quad b' + a' = c' \qquad (m, 48)$$

---

1) La legge commutativa come si vede facilmente vale anche per un numero qualunque dato di sommandi (l, 39).

e quindi si ricade nel teorema a.

b. Se $a = b$, $b > c$ si ha $a > c$
$a = b$, $b < c$ » $a < c$.

c. Se $a > b$, $b < c$ » $a > c$
$a < b$, $b < c$ » $a < c$

d Se $a' > a$; $b < b'$ si ha: $a + b > a + b''$
$> a' + b'$
$> a + b'$

e se $a < a'$; $b < b'$ » $a + b < a' + b'$
$< a' + b$
$< a' + b'$

Per dimostrare che se

$$a > a', \quad b > b' \text{ si ha } a + b > a' + b'$$

si procede nel seguente modo. Siano $(A) \equiv A_1\, A_2 ... A_a$, $(B) \equiv B_1\, B_2 ... B_b$ i gruppi che rappresentano i numeri a e b; il numero $a + b$ è rappresentato dal gruppo $[(A)(B)] \equiv A_1\, A_2 ... A_a\, B_1\, B_2 ... B_b$ (oss. I, V, e, 47). Siano $(A') \equiv A'_1\, A'_2 ... A'_a$, $(B') \equiv B'_1\, B'_2 .. B'_b$ i gruppi rappresentanti i numeri a' e b'; il numero $a' + b'$ è rappresentato dal gruppo $[(A')(B')] \equiv A'_1\, A'_2 ...\, A'_a\, B'_1\, B'_2 .. B'_b$. Ma per ipotesi $a > a'$, $b > b'$; e se consideriamo i primi a' elementi del gruppo (A) e i primi b' elementi del gruppo (B), sia nell'uno che nell'altro rimangono altri elementi (def. I e II, 49) che non hanno in corrispondenza univoca elementi corrispondenti in (A'), (B'), e perciò nel gruppo $[(A)(B)]$ vi sono elementi che in corrispondenza univoca con $[(A')(B')]$ non hanno in questo gruppo elementi corrispondenti (II, 29); e perciò $a + b > a' + b'$ (def. I e II, 49).

Analogamente si dimostrano le altre relazioni b, c, d.

e. Se $a = a'$, $b > b'$ si ha $a + b > a + b'$
» $a > a'$, $b = b'$ » $a + b > a' + b'$

Ossia:

Se a numeri uguali (disuguali) si sommano numeri disuguali (uguali) si ottengono numeri disuguali.

Questo teorema si dimostra in modo analogo al precedenie.

f. I numeri della serie (I) sono tutti disuguali. Nessuno di essi è maggiore degli altri.

Considerando difatti un numero a determinato della serie dei numeri naturali (c, def. III, 46) i numeri che precedono a sono minori di a, perchè i gruppi corrispondenti a questi numeri contengono meno elementi di quello corrispondenti ad a (c', 46, def. I, e II, 49), sono invece maggiori quelli che seguono a. I numeri di (I) costituiscono così due classi di numeri rispetto ad a, quelli minori e quelli maggiori eccettuato a.

L'ultima proprietà deriva dall'essere la serie (I) illimitata (def. II, 32 e def. I, II; c', 46).

g. Se $a > a'$ vi è un solo numero x tale che $a' + x = a$ [1]).

I numeri a e a' devono occupare in (I) due posti determinati (def. I, 20),

1) I teoremi di questo numero specialmente e, g come a, d, 47 non è necessario darli con assiomi speciali o con definizioni dei segni stessi. Essi derivano dal principio di corrispondenza univoca dei gruppi rappresentativi.

e a' deve precedere a (f; c, 46). Il numero a si ottiene da a' unendo a questo numero altre unità, cioè le unità di un altro numero (c', 46 e g, 39). Non vi possono essere due numeri x e x' ($x' \gtrless x$) che godano questa proprietà. Difatti si deve avere

$$a' + x' = a, \quad a' + x = a$$

od anche

$$x' + a' = a, \quad x + a' = a \qquad (m,\ 48)$$

e quindi

$$x = x' \qquad (a)$$

Oss. Se indichiamo la somma $a + b$ con c si ha:

$$a + b = c \qquad (1)$$

ove c è un numero dato della serie (I). L'uguaglianza (1) va considerata sotto due aspetti: o c è usato per indicare il nuovo numero $a + b$ non avendolo fatto prima, come ad es. col segno 2 abbiamo indicato la somma $1 + 1$, con 3 la somma $1 + 1 + 1$ ecc.; oppure c è un numero già noto adoperato quale simbolo di un'altra operazione, per es. di un'altra somma $a' + b'$, ed allora bisogna provare l'esattezza dell'uguaglianza (1).

Es. Nell'uguaglianza:

$$11 + 1 = 12$$

il 12 indica il numero risultante dall'addizione di 1 al numero 11, e nulla vi è da dimostrare; *bisogna invece dimostrare che*

$$7 + 5 = 12$$

la quale ci dà una proprietà fra i numeri 7, 5 e 12. E perciò basta scomporre i tre numeri nelle loro unità, e riflettere che le unità del numero $11 + 1$ corrispondono ad una ad una a quelle del numero $7 + 5$ (i, 48). Difatti sia $(A) \equiv ABCDEFG$ il gruppo corrispondente al numero 7 e $(A') \equiv A'B'C'D'E'$ quello che corrisponde al numero 5. Il primo elemento di (A') unito con (A) dà il gruppo corrispondente al numero

$$7 + 1 = 8$$

Rimane di (A') un gruppo $(A'') \equiv B'C'D'E'$ formato cogli elementi rimanenti di (A'). Il primo elemento di (A'') unito al gruppo (A) ci dà il numero

$$8 + 1 = 9.$$

Del gruppo (A'') gli elementi rimanenti formano un gruppo

$$(A''') \equiv C'D\ E'$$

il cui primo elemento C' unito al gruppo

$$((A)\ A')\ B' \equiv (A)\ (A'B') \qquad (a,\ 40)$$

dà il numero

$$9 + 1 = 10.$$

E così unito il penultimo elemento D' di (A') al gruppo $(A)\ (A'B'C')$ si ha il numero $10 + 1 = 11$. E finalmente unendo l'ultimo elemento E' di (A') al gruppo (A) $(A'B'C'D')$ si ha il numero

$$11 + 1 = 12$$

che corrisponde al gruppo $[(A)\ (A')] \equiv ABCDEFGA'B'C'D'E'$ il quale rappresenta anche il numero $7 + 5$ (oss. I, e, 47), dunque

$$12 = 7 + 5.$$

La dimostrazione del teorema pei numeri dati qualunque di (I) si fonda evidentemente sulla regola di segnatura dei numeri o *numerazione*, la più comune delle quali è quella decimale.

Ad es. si pone in questo sistema:

$$1x = 10 + x$$

dove x prende successivamente i segni 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 e 9. Il numero successivo al 19 si indica con 20 che si ottiene dall'unione di due gruppi di dieci elementi (*decine*).

Così:

$$2x = 20 + x \quad (x, = 1,\ 2,\ 3, \ldots .\ 9).$$

Analogamente un numero compreso fra quello corrispondente al gruppo composto di dieci gruppi di 10 elementi (*centinajo*) e quello composto di due decine si indica con

$$1xy=100+xy$$

dove xy è un numero che precede il 100 nella serie (I).

Per dimostrare che

$$41+53=94$$

si osservi che

$$41=40+1, \quad 53=50+3$$

e quindi

$$41+53=40+50+4=90+4=94 \quad ^{1)}.$$

§ 4.

Sottrazione — Moltiplicazione — Divisione.
Numero zero.

51. *Sottrazione.*

Def. I. Se si ha $a+b=c$ (1) il primo numero a si dice *differenza* del secondo b dal terzo c, e l'operazione colla quale si determina il numero a dai numeri c e b si chiama *sottrazione.*

Oss. I. Il numero a si ottiene evidentemente togliendo il numero b dal numero c (def. I, 7; def. III, oss. I e II, 31).

Def. II. Il numero c, si chiama *minuendo, b sottraendo,* e a si chiama anche *resto* della sottrazione.

Possiamo anche dire:

Def. I'. La sottrazione di un numero b da un altro numero c maggiore di b significa trovare un numero a tale che sommato a b dia c.

a. La sottrazione è l' operazione inversa dell' addizione (12, def. I).

Ind. I. La sottrazione di b da c dà per risultato a e si indica nel seguente modo:

$$a=c-b \qquad (2)$$

essendo — il segno di questa operazione.

---

1) In questa genesi del numero ci stacchiamo ad es. dai sig. *Helmoltz*, *Kronecker* e *Dedekind* i quali (l. c). trattano prima del numero come puro segno (Zahl), e poi del numero come «Anzahl» cioè del numero degli oggetti di un gruppo. Essi lavorano con questi segni stabilendo con annotazioni speciali le loro leggi. Pur riconoscendo l'acutezza e l'importanza dei lavori dei tre valentissimi matematici, mi permetto di osservare che prima ancora di parlare di «Anzahl» essi usano continuamente nel discorso la parola *uno* (ad es. *un* oggetto A) la quale corrisponde ad un concetto fondamentale determinato e che dà precisamente l'Anzahl dell'oggetto A (def. I, II, 45). L'Anzahl dell'oggetto A non è secondo me un segno o nome arbitrario scelto a caso per indicare il primo posto od oggetto di una serie (16, 20), ma è *uno* intendendo con questa parola il concetto che vi è legato. E in questo concetto non vi è l'indicazione dell'oggetto ad es. *Paolo*, *albero* ecc. ma il giudizio che esprime la nostra mente, che è cioè uno anzichè più oggetti (2). L'addizione in Dedekind perde il suo significato dell'unione successiva dell'unità ripetuta all'unità data (l. c. 44); è un'annotazione colla quale dal segno di un elemento di una serie (secondo noi illimitata di 1. specie) si ottengono per mezzo di eleganti teoremi i segni degli altri elementi seguenti. Ci stacchiamo poi maggiormente dal sig. *Peano* (Arithmetices principia, nova methodo exposita. Torino 1889). Fatta astrazione dal sistema di segni introdotto per meglio scindere e indagare le parti semplici di un gruppo di proprietà o di dimostrazioni matematiche quando però è possibile ridurle nei segni finora conosciuti nell'ordine che si crede migliore, ma senza che sia necessario, egli considera più che gli altri l'aritmetica come un sistema di segni assoggettati a certe definizioni, che per chi non conosce l'aritmetica sono scelte ad arbitrio (vedi pref. e appendice).

b. Il sottraendo è il resto della sottrazione del resto primitivo dal minuendo.

Si ha infatti da (2) la (1), e la (1) ci dà $b+a=c$ (m, 48) da cui

$$b=c-a \qquad (3).$$

Dalla definizione stessa si ha:

c. Per la sottrazione non vale la legge commutativa.

Non si ha cioè

$$b-c=a$$

perchè è $c>b$ e non si può togliere pel concetto di numero fin qui considerato un numero maggiore da un numero minore.

d. La sottrazione è un'operaziene a senso unico.

Vale a dire la sottrazione di un numero b da un numero c si eseguisce in un solo modo e dà un solo risultato (def. II, 11).

Si abbia infatti

$$c-b=a \quad c-b=a'$$

si avrà per la definizione stessa

$$c=a+b, \quad c=a'+b$$

vale a dire a' è uguale ad a (a, 50).

e. Se da numeri uguali si sottraggono numeri uguali si ottengono numeri uguali.

Se $b=b'$, $c=c'$, $c>b$ si ha:

$$c-b=c'-b'$$

Difatti ponendo $c-b=a$, $c'-b'=a'$ si ricava

$$a+b=c, \quad a'+b'=c' \qquad \text{(def. I e ind.)}$$

ma $b=b'$, $c=c'$ dunque $a=a'$ (a, 50).

f. Se $a'<a$ vi è un solo numero x tale che $a-x=a'$.

Vale a dire $a'+x=a$. Per un altro numero x' tale che $a-x'=a'$, sarebbe $a'+x'=a$, e perciò $x'=x$ (a', 50).

g. Se da due numeri uguali si sottraggono numeri disuguali si hanno numeri disuguali.

Sia $$a-x=b, \quad a-x'=b', \quad x' \gtrless x$$

si ha $$b+x=a, \quad b'+x'=a \qquad \text{(def. I e ind.)}.$$

Non può essere $b=b'$ altrimenti x sarebbe uguale a x' contro l'ipotesi (a', 50), dunque ecc.

h. Togliendo da un gruppo di a elementi prima b elementi e poi c dal gruppo rimanente ($b<a$, $c \leqq a-b$) è lo stesso che togliere ($c+b$) elementi dal gruppo a.

Siano $CC''...B'B'...$ gli ultimi $c+b$ elementi del gruppo (X), e $A'A''...$ gli elementi che li precedono in questo gruppo. Indicando con (A), (B), (C) i tre gruppi di (X), si ha:

$$[(A)(C)](B)=(A)[(C)(B)]=(X) \qquad (a, 40)$$

dunque togliere gli ultimi b elementi (B), e dal gruppo rimanente $[(A)(C)]$ gli ultimi c elementi (C), equivale a togliere gli ultimi $c+b$ elementi $[(C)(B)]$ dal gruppo (X), poichè il risultato in ambedue le operazioni è il gruppo (A) (d.)

h'. $a-(c+b)=(a-b)-c=(a-c)-b \qquad (l;\ m,\ 48)$.

Ind. II. Il numero $(a-b)-c$ lo indicheremo anche col simbolo $a-b-c$.

h''. $a-b-c=a-c-b$ (b, 9; ind.).

Oss. II. La proprietà $(a-b)-c=a-(b+c)$ si può chiamare legge associativa dalla sottrazione.

i. $(a-b)+(a'-b')=(a+a')-(b+b')$ $(a>b, a'>b')$.

Se si ha infatti un gruppo di elementi composto di due sottogruppi a e a', togliere da essi rispettivamente i sottogruppi b e b' è lo stesso che togliere il sottogruppo $b+b'$ dal gruppo dato $a+a'$ poichè i due gruppi risultanti si corrispondono univocamente (d', l, 48).

52. *Moltiplicazione.*

Oss. I. Dato un gruppo di a elementi, come nuovo elemento possiamo considerare il gruppo stesso. e quindi la nuova unità sarà il numero corrispondente al gruppo (def. I, 45). E come ripetendo l'unità e unendo questa all'unità già data abbiamo ottenuto i numeri della serie (I), così ripetendo la nuova unità si ottiene un'altra serie di numeri. Ma evidentemente *ciascuno di questi numeri è un numero della serie* (I),

Invero consideriamo il numero b rispetto alla nuova unità a; esso non è che la somma del numero a ripeluto b volte o come si dice anche *tante* volte *quante* sono le unità di b.

Def. I. L'operazione colla quale il numero a viene sommato tante volte quante sono le unità di un altro numero b si chiama *moltiplicazione.*

Oss. II. La moltiplicazione non è dunque che un'addizione abbreviata.

Def. II. Il risultato della moltiplicazione si chiama *prodotto,* e si indica con $a\times b$; a e b i *fattori, a moltiplicando, b moltiplicatore,* essendo $\times$ il segno di questa operazione. Il prodotto si indica anche con $a.b$ o con ab.

a. La moltiplicazioue del numero a pel numero b è un' operazione a senso unico.

b. Il prodotto non cambia mutando l'ordine dei fattori.

c. Se $a\times b=c$ *non vi è un altro numero* $b' \lessgtr b$ *tale che* $a\times b'=c$.

c'. Se i prodotti di due numeri a e b per un terzo o per numeri uguali sono uguali, a e b sono uguali.

d. Per la moltiplicazione vale la legge associativa, cioè $(a\times b)\times c=a\times(b\times c)$.

Ind. I. Il prodotto $(a\times b)\times c$ si indica perciò anche col simbolo $a\times b\times c$.

Queste proprietà, come altre, della moltiplicazione derivano dai teoremi analoghi dell'addizione.

e. $(a'\pm a'')\,b=a'\,b\pm a''\,b$ (*legge distributiva*).

Se

$$a'+a''=a$$

si ha evidentemente (m, e nota 3ª, 48).

$$(a'+a'')b=(a'+a'')_1+(a'+a'')_2 ... +(a'+a'')_b=a'_1+a'_2+...+a'_b+a''_1+...+a''_b$$

e perciò

$$=a'\,b+a'\,b$$

Pel segno — basta applicare la formula i, 51 tenendo conto dei teoremi d, f, 47.

Def. III. Il numero $a.b$ si chiama *multiplo* di a secondo il numero b, e $b.a$ è *multiplo* di b secondo il numero a; a e b si chiamano *multipli* di ab o ba.

Ind. II. Il prodotto di a per a si scrive anche col simbolo a^2, il prodotto di a^2 per a con a^3; e in generale il prodotto di a^{n-1} per a si indica con a^n.

Def. IV. Il numero a^n si chiama *potenza* n^{ma} di a, n l'*esponente* della potenza, e a la *base.*

53. *Divisione.*

Def. I. L'operazione inversa della formazione di un gruppo con più gruppi uguali, equivale a quella di scomporre un gruppo in sottogruppi uguali, cioè di ugual numero di elementi quando ciò sia possibile. (12, 31). Essa ci conduce all'operazione inversa della moltiplicazione che si chiama *divisione.* Vale a dire dato il prodotto $a \times b = c$ e il fattore b, la divisione è quell'operazione colla quale si determina l'altro fattore a.

Def. II. Il risultato dicesi *quoziente*, c *dividendo,* b *divisore.* e si scrive

$$c : b = a$$

essendo: il segno della divisione.

Def. I'. Si può anche dire: Dividere un numero c per un altro b significa trovare un numere a tale che il prodotto di esso col numero b sia uguale a c, o il numero delle volte che b è contenuto in c.

Da ciò risulta che c deve essere multiplo di b secondo il numero a.

a. La divisione è un'operazione a senso unico.

Supponiamo si abbia:

$$a = c : b, \quad a' = c : b$$

si deve avere

$$a \times b = c, \quad a' \times b = c \qquad \text{(def. I).}$$

oppure

$$b \times a = c, \quad b \times a' = c \qquad (b,\ 52).$$

da cui

$$a = a' \qquad (c,\ 52).$$

b. Numeri uguali divisi per numeri uguali danno numeri uguali.

Difatti se $\quad a : b = c, \quad a' : b' = c', \quad a = a', \quad b = b'$

si ha $\quad c.b = c'.b'$ da cui $c = c'$ (c', 52).

c. Per la divisione non vale la legge commutativa (def. I).

d. Se due numeri divisi per numeri uguali danno quozienti uguali i due numeri sono uguali.

Cioé se $\quad a : b = a' : b'$ e $b = b'$ si ha: $a = a'$.

Difatti si ponga $a : b = c, a' : b' = c$ (def. I) da cui $a = b.c$, $a' = b'.c$.

Ma essendo $\quad b = b'$ si ha $a = a'$ $\quad$ (d, 47 e def. II 52).

e. $$a.b : b = a.$$

Difatti ponendo $a.b : b = c$ si ha $a.b = c.b$ (def. I), da cui $a = c$ (c', 52).

f. $$(a.c) : (b.c) = a : b.$$

Difatti si ponga $(a.c) : (b.c) = d$, si ha $a.c = d.(b.c) = (b.d).c$ (b, d, 52).

da cui $\quad a = d.b$ (b, c', 52), e quindi $a : b = d$ $\quad$ (def. I)

e perciò anche $\quad a : b = (a.c) : (b.c)$ $\quad$ (d, 47 e def. II, 52)

g. $$(a : c) : (b : c) = a : b.$$

Si ponga $d.c = a$, $e.c = b$ (def. I). si ha $(d.c):(e.c) = a:b$ (b)
ed anche $(d.c):(e.c) = d:e$ (f). Ma $d = a:c$, $e = b:c$ (def. I) dunque

$$(a:c):(b:e) = a:b \qquad (b)$$

h. Per la divisione non vale la legge associativa.

Non è cioè $a:(b:c) = (a:b):c$ perchè si ha $a:(b:c) = (a.c):b$ e $(a:b):c = a:(c.b)$ (f), mentre in generale non è $(a.c):b = a:(c.b)$.

i. Per la divisione vale la legge distributiva.

$$a:c \pm b:c = (a \pm b):c$$

Difatti si ha $(a:c \pm b:c)c = a \pm b$ (e, 52; def. I), e quindi dividendo per c i membri dell'uguaglianza si ha:

$$(a \pm b):c = a:c \pm b:c \qquad (h;\ d,\ 8).$$

Oss. Qui si suppone che a e b siano divisibili per c (def. I).

54. *Numero zero.*

a. I numeri della serie (1) si possono ottenere colla sottrazione di un numero da un altro.

Difatti se a è un numero qualunque di (I) e si unisce ad a un altro numero b si ha: $a + b = c$, da cui $a = c - b$.

Oss. I. Qui si presenta un caso particolare degno di nota che ci induce a introdurre un nuovo numero. Se si toglie un numero da un altro numero ad esso uguale vale a dire se facciamo astrazione da esso (7), non si ottiene alcuno dei numeri della serie (I); si ha cioè che il gruppo corrispondente è un gruppo nullo o di nessun elemento (def. I, 31). Ma siccome ogni sottrazione dà un numero di (I), non volendo fare rispetto a questa operazione, oppure rispetto alla corrispondenza coi gruppi, alcuna eccezione *conveniamo di dire che la sottrazione a—a ci dà un nuovo numero.*

Def. I. Il numero $a - a$ (oss. I) si chiama numero *zero*, e lo si indica col segno o, vale a dire

$$a - a = o \qquad (b,\ 9).$$

b. $a - a = b - b = o$, *dove a e b sono numeri qualunque di (I).*

Difatti se al gruppo nullo che si ottiene togliendo b elementi da un gruppo di b elementi si aggiungono a elementi si ottiene un gruppo di a elementi, chè altrimenti il gruppo nullo dovrebbe contenere esso stesso degli elementi contro l'ipotesi (II, 29). Dunque si ha pei numeri corrispondenti

$$b - b + a = a.$$

Ma togliendo dal gruppo risultante il gruppo di a elementi si ottiene il gruppo primitivo, essendo l'operazione del togliere a senso unico (a, 11), quindi si ha

$$b - b = a - a.$$

Oss. II. Osserviamo che il segno o ha un significato ben diverso da quello che ha quando entra nel simbolo di un numero, come ad es. nel numero *10*, perchè in tal caso viene posto di seguito all'unità per comodità di segnatura o di numerazione.

c. Il numero zero è minore di tutti i numeri della serie (I).

Perchè è rappresentato da un gruppo che non ha elementi (def. I, e II, 49).

Oss. III. Volendo ordinare tutti i numeri in una nuova serie mantenendo in essa la proprietà della (I), che i numeri precedenti un numero a sono minori di a, e quelli che lo seguono sono maggiori di a (c', 46; f, 50), il numero o dovrà occupare il primo posto, e si avrà la serie

(I') 0, 1, 2, 3, ... 10, ... 20 .... 100 .... 200 ....

d. $$a \pm o = a, \quad o + a = a$$

Difatti le due relazioni si possono scrivere così: $a \pm (a-a) = a, (a-a) + a = a$.

Il primo membro della prima uguaglianza riferendoci ai gruppi ci dice che al gruppo a non si è aggiunto alcun elemento; o dal gruppo di a elementi non si è tolto alcun elemento; nell'uno e nell'altro caso si ha dunque per risultato il gruppo di a elementi.

Il primo membro della seconda uguaglianza ci dice invece che dal gruppo a fu tolto lo stesso gruppo, il che ci dà per risultato nessun elemento (def. I, 31), e che a questo risultato fu aggiunto un gruppo di a elementi. Anche in questo caso il risultato finale è un gruppo di a elementi (II, 29).

e. $$o \times a = o \times b = o.$$

Perchè ripetendo un gruppo che non ha elementi tante volte quante sono le unità contenute nel numero a, si ha sempre un gruppo senza elementi (15; oss. I, 52; II,29).

e'. $$a \times o = b \times o = o.$$

Perchè ripetere un gruppo a *nessuna* volta significa che non si considera affatto (7, e 31).

Oss. IV. Se un gruppo nullo si considera nessuna volta, il che vuol dire che non si considera, *in questo senso* non si ha alcun risultato (def. I, 31), e si ha:

$$o \times o = o.$$

f. $$o : a = o : b = o$$

Ciò risulta dalla definizione della divisione (53) e da *e*.

g. $o : o = a$, $o : o = b$; $o : o = o$, o in parole: *La divisione di o per o non è un'operazione a senso unico* [1].

Ciò risulta analogamente da *e'* e dall'oss. IV.

Il teor. *e'* basta a dimostrare il seguente principio:

h. Se con forme date eseguendo una data operazione si ottengono risultati uguali non deriva da ciò solo che le due forme siano uguali se si fa astrazione nei risultati dalle forme date.

Oss. IV. Non ci diffondiamo ulteriormente nelle operazioni dei numeri della serie (I) perchè ne faremo pochissimo uso nei fondamenti della geometria, nostro scopo principale, e d'altronde le proprietà qui svolte sono le proprietà fondamentali di questi numeri. Così faremo pei numeri che introdurremo in seguito.

---

1) Si badi che *g* non è in contraddizione colla proprietà *b* e *e* del n. 8, perchè qui o; o è un segno che non rappresenta una sola cosa, ma da *e* risulta invece che rappresenta numeri, e quindi anche concetti (4), diversi.

Capitolo IV.

Dei sistemi di elementi e in particolare di quelli ad una dimensione.

§ 1.

Considerazioni empiriche sul continuo intuitivo rettilineo [1]).

55. Che cosa è il *continuo?* Ecco una parola il cui significato senza bisogno di alcuna definizione matematica tutti intendiamo, perchè *intuiamo* il continuo nella sua forma più semplice come contrassegno comune a più cose concrete, quali sono, per dar esempio di talune fra le più semplici, il *tempo* e il *luogo occupato* nell'ambiente esterno dall'oggetto qui tracciato, od a quello di un filo a piombo, di cui non si tenga conto delle sue qualità fisiche e della sua grossezza (in senso empirico [2])). Rilevando le particolarità di questo continuo intuitivo dobbiamo cercare una definizione astratta del continuo, nella quale non entri più come elemento necessario l'intuizione o la rappresentazione sensibile, in modo che inversamente questa definizione possa servire astrattamente con pieno rigore logico alla deduzione di altre proprietà dello stesso continuo intuitivo. Che queta definizione matematicamente astratta si possa dare, vedremo in seguito. D'altra parte se la definizione del continuo non è puramente nominale e vogliamo invece corrisponda a quello intuitivo suddetto, deve evidentemente scaturire dall'esame di questo, anche se poi la definizione astratta in conformità a principii matematicamente possibili comprenderà questo continuo come caso particolare.

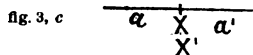
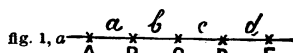



fig. 1, *a* — *a b c d* — A B C D E

fig. 2, *b* — *a* X X' *a'*

fig. 3, *c* — *a* X X' *a'*

L'oggetto della fig. 1, *a* si chiama *rettilineo*. Esaminando dunque il continuo (fig. 1, *a*) vediamo che si può ritenere composto di una serie di parti consecutive identiche *a, b, c, d* ecc. disposte da sinistra verso destra, e che ciò vale entro certi limiti dell'osservazione. Le parti sono separate dalle croci segnate sull'oggetto stesso, e sono pure continue. Inoltre scorrendo coll'occhio da sinistra verso destra osserviamo che le parti *a, b, c, d* come pure *ab, bc, cd,* ecc.; *abc, bcd* ecc. ecc. sono identiche da sinistra verso destra, e che queste particolarità hanno pure luogo da destra verso sinistra.

Si ha ancora che fra due parti consecutive *a* e *b* e *c* della serie *abcd* ecc. non vi è altra parte, mentre ad es. fra le parti *a* e *c* vi è la parte *b*;

1) Per stabilire i concetti matematici possiamo benissimo ricorrere a nozioni acquistate empiricamente, senza poi che nelle definizioni stesse e nelle dimostrazioni dobbiamo farne alcun uso.

2) Vedi oss. emp. n. 1, parte I.

e se si fa astrazione dalla parte *b*, l'oggetto rettilineo non è più continuo. Ciò che vale per le parti *a* e *b* l'osservazione ci assicura che vale fra due parti consecutive qualunque di una qualunque di esse, o in altre parole *non vi è* altro tutto colle stesse proprietà dell'oggetto rettilineo le cui parti separino due parti consecutive dell'oggetto stesso, o meglio del luogo da esso occupato (23 e def. II, 25).

Oltre a ciò vediamo che tanto sperimentalmente (cioè con una serie limitata naturale (35) di scomposizioni), come anche astrattamente (vale a dire secondo ogni ipotesi od ogni operazione matematicamente possibile che non contraddica ai risultati dell'esperienza), noi possiamo arrivare ad una parte non ulteriormente scomponibile in parti (*indivisibile*), colla quale è composto il continuo (come è per il tempo un istante).

È poi la esperienza stessa che ci spinge a cercare l'indivisibile in modo da non poterlo ottenere praticamente, perchè essa ci dimostra come una parte considerata indivisibile rispetto ad un'osservazione non lo sia più rispetto ad altre osservazioni eseguite con istrumenti più esatti o in condizioni diverse. E ammessa la parte indivisibile noi vediamo che anche sperimentalmente possiamo ritenerla indeterminata, e perciò più piccola di qualsiasi parte data dell'oggetto rettilineo.

Occorre inoltre distinguere una parte data *a* del continuo dalle altre per poterla considerare indipendentemente da queste; e se facciamo astrazione da essa, la parte rimanente *bcd* ecc. nell'ordine *bcd* ecc., che indichiamo pel momento con α, non possiamo considerarla come avente una parte comune con *a*. Rimanendo la parte *a* al suo posto nel continuo per distinguerla dalla parte α dobbiamo immaginare qualche cosa, un segno (*punto*), che serva a indicare il posto di unione delle due parti, pur rimanendo inalterata la proprietà gia sopra osservata che cioè fra *a* e α non vi è alcuna parte di altro tutto nel senso indicato. Il segno che separa la parte *a* dalla parte α è dunque un prodotto della funzione di astrazione della nostra mente e di scomposizione del continuo in parti, e non è parte dell'oggetto rettilineo; se fosse una parte α' di α consecutiva ad *a*, da sinistra verso destra potremmo ripetere fra *a* e α' la stessa considerazione. Da questo punto di vista noi siamo dunque costretti ad ammettere che il segno di separazione o di unione fra *a* e α, anche come appartenente al continuo non sia parte di esso. E si può ritenere come appartenente ad entrambe, considerate indipendentemente l'una dall'altra. Indicando con A, B, C ecc. i segni di separazione delle parti *a* e *b*; *b* e *c*; *c* e *d* ecc. (fig. 1, *a*), la parte *b* potremo indicarla col simbolo (AB), la parte *c* col simbolo (BC) ecc.

Tutto ciò è suffragato dalla stessa osservazione. Supponiamo ad es. che la parte *a* dell'oggetto rettilineo sia dipinta in rosso, la parte rimanente α in bianco, supponendo inoltre che fra il bianco e il rosso non vi sia altro colore. Ciò che separa il bianco dal rosso non può avere colore nè bianco nè rosso, e quindi non può essere parte dell'oggetto perchè ogni sua parte è per ipotesi bianca o rossa. E questo segno di separazione o di unione del bianco e del rosso si può anche considerare appartenente o alla parte bianca o alla rossa considerandole indipendentemente l'una dall'altra. Se ora si fa astrazione dal

colore il segno di separazione delle parti *a* e *α* possiamo supporlo appartenente all'oggetto stesso.

Un altro esempio. Tagliamo un filo finissimo nel posto indicato da X con la lama sottilissima di un coltello e stacchiamo le due parti *a* e *a'* (fig. 1, *a*), e supponiamo che si possa poi ricomporre il filo senza che si osservi il posto ove avvenne il taglio (fig. 1, *c*), in altre parole come se nessuna particella del filo andasse perduta; il che si ottiene apparentemente guardando il filo così ricomposto in certa lontananza da esso. Osservando ora la parte *a* da destra verso sinistra come indica la freccia della fig. 1, *b* sopra *a*; ciò che si vede della parte tagliata non è certamente parte del filo, come ciò che si vede di un corpo non è parte del corpo stesso. Analogamente succede se si guarda la parte *a'* da sinistra verso destra. Se il segno X di separazione della parte *a* da *a'* supposto appartenente al filo stesso fosse parte di esso, guardando *a* da destra verso sinistra non si vedrebbe tutta questa parte, mentre ciò che separa la parte *a* da *a'* è soltanto ciò che si vede nel modo suindicato, quando si suppone poi ricomposto il filo [1]).

L'ipotesi che il punto non è parte del continuo rettilineo (e nemmeno ha parti in sè [2]) vuol dire che tutti i punti che possiamo immaginare in esso, per quanti siano, non *costituiscono* uniti insieme il continuo, e scelta una parte (XX') piccola quanto si vuole dell'oggetto (fig. 1ª *a*) (per il tempo un istante) e per quanto indeterminata vale a dire senza che X e X' siano fissi nel nostro pensiero l'intuizione ci dice che *essa è sempre continua.*

Scorrendo poi coll'occhio da destra verso sinistra, o viceversa, vediamo che ogni punto occupa una posizione determinata sull'oggetto rettilineo, e a cominciare da un dato punto non lo incontriamo più nè da destra verso sinistra nè da sinistra verso destra, vale a dire l'oggetto rettilineo non ha nodi.

Vediamo inoltre che una parte per quanto piccola ad es. quella indicata da un trattino X apparentemente indivisibile (fig. 1, *c*) è limitata alla destra e alla sinistra da parti del continuo, e quindi da due punti. E siccome una parte costante limitata da due punti e indivisibile rispetto ad un'osservazione, può non esserlo rispetto ad altra osservazione, così siamo indotti anche sperimentalmente ad ammettere che ogni parte limitata da due punti che rimangono sempre gli stessi nelle nostre considerazioni, sia pure divisibile in parti.

Di più se consideriamo l'oggetto rettilineo da A verso destra possiamo ammettere che la serie di parti *abcd* ecc. in questo ordine sia illimitata (def. II, 32), perchè dall'esperienza ripetuta siamo indotti a ritenere che, se non l'oggetto rettilineo il luogo però da esso occupato nell'ambiente esterno sia parte di un tutto illimitato. Così da destra verso sinistra.

Inoltre tra due punti anche indeterminati di posizione X e X' ma che non coincidono (def. V, 8) vi è sempre *una parte continua.* E poichè il continuo è

---

1) Vediamo dunque che l'idea del punto che non è parte del continuo è tutt'altro che una pura astrazione, che non trovi giustificazione nell'esperienza stessa. Certo che facciamo uso della nostra facoltà di astrarre, ma è impossibile specialmente in matematica di non farne uso. È quindi per lo meno inutile anche regolandosi secondo l'osservazione di ammettere che il punto sia il *minimo sensibile* dell'empirista come fa il sig. Pasch (Vedi pref. e appendice).

2) Noi non avremo però bisogno per lo svolgimento teorico della geometria di stabilire che il punto non ha in sè parti. Dicendo «in sè» non intendiamo dire ciò che è una cosa indipendentemente da noi, ma ciò che è nella sua rappresentazione mentale (4).

determinato matematicamente dai suoi punti, siamo indotti ad ammettere che fra due punti anche indeterminati, per quanto vicini essi siano, esista sempre almeno un altro punto distinto dagli estremi (def. V, 8). A questa ipotesi siamo condotti inoltre dall'osservazione che dato un punto X sull'oggetto rettilineo si guò immaginare una parte di esso (AB) che contenga X e tale che A e B si avvicinino sempre più a X senza mai coincidere con X, e che quindi si possono immaginare delle parti cogli estremi indeterminati quanto piccole si crede che contengano almeno un altro punto X oltre agli estremi.

Finalmente riceviamo l'impressione che nell'oggetto rettilineo (fig. 1, *a*) intorno ad un suo punto B vi sono due parti (BA) e (BC) tali che considerata la prima da B verso A e la seconda da B verso C esse sono identiche, e che la parte (AB) percorsa de B verso A è identica alla stessa parte percorsa da A verso B (def. III, 9).

Tutti questi contrassegni dell'oggetto rettilineo si possono essi stabilire astrattamente senza bisogno di ricorrere alla intuizione? Se sì, sono essi sufficienti per distinguere il continuo come forma astratta da altre forme possibili? Oppure alcuni di essi non sono conseguenza necessaria degli altri sebbene evidenti?

Ecco le questioni che dobbiamo risolvere in questa introduzione; e noi vedremo che i contrassegni suindicati sono sovrabbondanti [1]).

---

1) Ad es. *G. Cantor, Dedekind* nei loro pregevoiissimi lavori dicono che è arbitraria la corrispondenza univoca a partire da un punto delia retta fra i punti delia retta stessa e i numeri reali che costituiscono il continuo numerico ottenuto mediante una serie di definizioni astratte di segni, per quanto possibili arbitrarie sempre. A Dedekind *sembra* anche (l, c. pag. XII-XIII) che dati tre punti A, B, C non in linea retta in modo che i rapporti delle loro distanze siano numeri algebrici, i rapporti delle loro distanze dai punti dello spazio dai tre punti alla distanza AB possano essere soltanto numeri algebrici — di modo che lo spazio a tre dimensioni e quindi anche la retta sarebbero discontinui. Secondo Dedekind per chiarire anzi la rappresentazione dei continuo dello spazio occorre il continuo numerico (l. c.) Secondo me invece è il continuo intuitivo rettilineo mediante l'idea di punto senza parti rispetto al continuo stesso che serve a darci le definizioni astratte del continuo, di cui quello numerico non è che un caso particolare. In questo modo le definizioni non appariscono come uno sforzo della mente nostra, ma trovano la loro piena giustificazione nella rappresentazione sensibile dei continuo; del che bisogna certo tener conto nella discussione dei concetti fondamentali, senza uscire s'intende dal campo puramente matematico (vedi pref.). E d'altronde sarebbe veramente meraviglioso che una forma astratta così complessa qual' è il continuo numerico ottenuto non solo senza la guida di quello intuitivo, ma come si fa oggi da alcuni autori da pure definizioni di segni si trovasse poi d'accordo con una rappresentasione così semplice e primitiva qual' è quella del continuo rettilineo.

Il continuo intuitivo rettilineo è indipendente dal sistema di punti che noi vi possiamo immaginare. Un sistema di punti considerato il punto come segno di separazione di due parti consecutive della retta o come estremo di una di queste parti, non può mai dare in senso assoluto tutto il continuo intuitivo perchè il punto non ha parti; soltanto, troviamo che un sistema di punti può rappresentare *sufficientemente* il continuo nelle ricerche geometriche. Il continuo rettilineo non è mai composto dai suoi punti ma dai *tratti* che li congiungono due a due e che sono pur essi continui. In questo modo il *mistero* della continuità viene ricacciato da una parte data e costante della retta ad una parte indeterminata quanto piccola si vuole, che è pur sempre continua, e dentro alla quale non ci è permesso di entrare più oltre colla nostra rappresentazione. Ed è in questo mistero che si ravvolge in fondo il concetto fondamentale di *limite*. Ma matematicamente, è bene rilevarlo, questo mistero non ha alcuna influenza, poichè ci basta la determinazione del continuo mediante un sistema ordinato ben definito di punti; però è altresì da osservare che la determinazione per punti è casuale perchè l'intuizione del continuo l'abbiamo ugualmente senza di essa. Se si considera infatti il punto senza parti allora come si è detto facendo anche corrispondere a tutti i numeri reali conosciuti i punti della retta a partire da un' origine, non otteniamo tutto il continuo. Se si considera il punto come parte quanto piccola si vuole ma costante, allora nemmeno tutti i numeri razionali sono rappresentabili sul segmento rettilineo a cominciare da uno dei suoi punti come origine; eppure esso rimane continuo nell'intuizione.

§ 2.

Elemento fondamentale — Elementi e forme differenti di posizione e coincidenti in senso assoluto o relativo. Leggi di determinazione oppure di esistenza o di costruzione delle forme.

56. Ripigliamo le nostre considerazioni sulle forme astratte.

Conv. I. Il gruppo ordinato $abc \equiv a(bc) \equiv (ab)c$ (III, e a, 29) ha per parti a, b, c; ab, bc (def. II, 27). Siccome è contrassegno di questo gruppo il modo con cui è posto a rispetto a bc e perciò anche la parte ab rispetto alla parte bc (def. I, 38), così *conveniamo* di dire che il gruppo abc si ottiene anche unendo la parte bc alla ab anzichè dire che esso si ottiene dall'unione di bc ad a (III, 29). Con questa operazione b deve essere considerato però una sola volta. Diremo che b serve di separazione o di unione della parte ab dalla o colla parte bc nel tutto.

Così se si ha una serie di forme ....$abcd$....mn....x.... illimitata *conveniamo* di dire che il gruppo ordinato che ne risulta (def. I, 26 e oss. 28) si ottiene anche dall'unione della parte illimitata o limitata (mn....x....) alla parte limitata o illimitata (....$abcd$....m) (a, 40) in modo però che la forma comune alle due parti deve essere considerata una volta sola.

Se finalmente si considera il punto come parte indefinitamente piccola nello stato cioè di indeterminata piccolezza, allora ad ogni numero reale corrisponde un punto senza assioma speciale. L'intuizione spaziale ci dice in fondo che se (A) è la forma astratta corrispondente al luogo occupato dall'oggetto rettilineo non vi è nessun'altra forma astratta (B) della stessa natura di (A) di cui una parte separi due parti consecutive di (A) (22, 24). Dire che la retta potrebbe essere discontinua e data da tutti i punti considerati senza parti, che rappresentano ad es. a cominciare da una data origine tutti i numeri algebrici, è ammettere per sè un fatto che *ripugna all'intuizione*, e cioè che la forma astratta corrispondente alla retta appartenga ad un altra forma astratta possibile che comprende in sè tutti i numeri reali, i cui elementi (che in essa sono parti, a, 27) separino quelli della prima. E non solo in conformità a questo principio siamo costretti ad ammettere che a cominciare da un punto della retta tutti gli altri punti rappresentino i numeri reali, ma ad ammettere altresì vi siano in essa punti che corrispondano eventualmente ad altri possibili numeri compresi fra i numeri reali, rimanendo intatte le altre proprietà caratteristiche della retta. Osservo ancora che noi consideriamo la parte indefinitamente piccola indipendentemente dalla distinzione di numeri razionali e irrazionali, e che sarebbe per noi molto più arbitraria e incerta l'ipotesi che non tutte queste parti contengano almeno un punto oltre gli estremi. Di più, se si ha un proiettile che dal punto A vada a colpire il punto B in linea retta, dividendo il cammino di esso nella serie di parti

$$\frac{1}{2}, \ \frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}, \ \frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}, \ldots$$

e se noi l'accompagniamo nella serie di queste parti non vediamo col pensiero uscire mai la punta del proiettile dalla serie stessa. Ma abbiamo però d'altra parte la rappresentazione del fatto che il proiettile colpisce il punto B, il quale è il *limite* a cui giunge la punta del proiettile, e (AB) è il *limite* della serie suddetta, nel senso cioè che finchè la punta X del proiettile rimane nella serie si avvicina indefinitamente al punto B, ossia (XB) diventa piccola quanto si vuole. Così se si ha una serie di parti consecutive sempre crescenti sulla retta stessa, senza che essa a partire da un punto A oltrepassi un dato punto B nel campo della nostra osservazione, per rappresentarci *tutta* questa serie abbiamo bisogno di *uscire* colla rappresentazione dalla serie e di rappresentarcela limitata ad un altro punto C compreso fra A e B ma *fuori* della serie, se (AB) stesso non è il limite della serie. E anche in questo caso *ripugnerebbe all'intuizione l'ipotesi contraria.* Si noti inoltre che l'intuizione è certo essenziale per la geometria, sebbene essa non debba entrare come elemento necessario sia nell'enunciato delle proprietà o delle definizioni sia nelle dimostrazioni (vedi pref.).

Che vi siano sistemi discontinui di punti i quali soddisfino a tutte le proprietà dello spazio date dall'esperienza a quanto sappiamo non è stato ancora dimostrato; ma in ogni caso ciò non direbbe ancora nulla contro la continuità delle spazio.

Per quali ragioni poi non si abbia a porre a base dei fondamenti della geometria il continuo numerico veggasi la prefazione e l'appendice e il n. 123 di questa introduzione. — (Vedi anche 2 nota n. 97 e 2 nota n. 96).

57. *Def. I.* Per *elemento fondamentale* o per *elemento* intendiamo una prima forma qualunque data, e chiameremo elementi fondamentali tutte le forme ad essa identiche (def. III, 9) [1]).

Def. II. Considerando più elementi dati distinti (def. V, 8) diremo anche che hanno una *posizione diversa* (oss. III e def. VI, 9).

Oss. I. In generale dunqne dovremo tener conto del modo con cui sono posti gli elementi (oss. I e def. I, 38).

Def. III. Anzichè dire un elemento diremo anche due o più elementi *coincidenti* [2]). Due elementi invece che non sono lo stesso elemento ma potranno essere considerati in qualche modo come un solo elemento, si diranno *coincidenti rispetto al modo anzidetto.* Se dovremo distinguere l'un caso dall'altro, diremo che nel primo caso *coincidono in senso assoluto* o *assolutamente,* mentre nel secondo caso diremo che *coincidono in senso relativo* o *relativamente.*

E se coincidono in senso relativo in diversi modi bisogna dire rispetto a quale di questi modi coincidono.

Oss. II. In generale però quando parleremo di due o più elementi intenderemo che non siano lo stesso elemento e quindi siano distinti. E se diremo due o più elementi qualunque intenderemo elementi distinti, qualunque siano le loro relazioni di posizione (def. VIII, 13), eccetto che non si dica diversamente.

Def. IV. In generale per *forma* intenderemo in seguito un sistema determinato da elementi (def. I, 11), sebbene anche l'elemento sia una forma (def. I).

Def. V. Forme determinate da elementi differenti saranno dette forme di *diversa posizione* anche se identiche (oss. III e def. VI, 9); e *coincidenti* se i loro elementi coincidono (def. III).

Ind. Indicheremo generalmente gli elementi con lettere majuscole e le forme con lettere minuscole.

58. *Def. I.* L'insieme dei contrassegni comuni di una forma che sono sufficienti a distinguerla dalle altre forme (def. I, 9 ed es. 10) e sono indipendenti fra loro, dicesi *legge* di *determinazione* della forma.

Def. II. Se la forma si considera come data, la legge di determinazione si chiama legge di *esistenza,* se si considera invece come costruita (def. II, 10) dicesi *legge di costruzione* o di *generazione* della forma.

Oss. I. Se gli elementi di una forma sono costruiti prima colla legge di costruzione possiamo supporli poi dati (I, 18), e la legge di costruzione diventa legge di esistenza; se invece sono dati e si vuole costruirli, la legge di esistenza diventa legge di generazione.

Def. III. La rappresentazione in parole della legge di determinazione di una forma dicesi *definizione* della forma.

Oss. II. Possono forme diverse avere una comune proprietà, ma allora questa proprietà se serve a definire il loro tutto o insieme, non serve a determinare nessuna di esse singolarmente, e oltre alla comune proprietà occorreranno altre proprietà speciali per determinare ciascuna di esse.

Def. IV. Riferire una forma ad altre forme significa considerare il gruppo dato dalla prima colle forme date. Queste si chiamano forme di *riferimento.*

---

1) Qui non intendiamo dunque che l'elemento non abbia in sè parte alcuna.
2) Vedi anche def. V, 8.

Oss. III. Siccome nelle forme identiche non possiamo tener conto della loro diversità di posizione rispetto ad altre forme, non già però nei gruppi di forme identiche (def. III, oss. III, 9 e oss. e def. I, 38; 41) ne consegue che, considerate in sè, la loro legge di determinazione è la medesima, ma non è generalmente più la medesima se si riferiscono ad altre forme, perchè indicate le due forme identiche con a e b e con c una forma di riferimento può essere che la forma ac non sia identica alla forma bc.

Def. V. Invece di dire che gli elementi di una forma sono dati o costruiti con una data legge diremo anche che in virtù di questa legge, da uno o più elementi della forma *nascono* o si *ottengono* gli altri elementi.

Def. VI. Dicesi anche di ogni forma che è la *rappresentazione* della *sua legge di determinazione.*

§ 3.

Determinazione delle forme — Corrispondenza d'identità delle forme — Concetto di maggiore e di minore.

59. *a. Si possono immaginare delle forme indipendenti che contengano un elemento dato qualunque e soltanto questo elemento.*

Dato un elemento A si possono immaginare più forme che abbiano in comune il solo elemento A (def. VII, 13) perchè data una forma f che contiene A, si possono immaginare altri elementi fuori di f e indipendenti da f (a, 37), i quali con A dànno un'altra forma f' indipendente da f (def. IV, 57 e def. II, 10). Si può supporre che A non determini da solo altri elementi distinti da A in modo che ogni forma che contiene A contenga anche gli altri, perchè in tal caso come elemento si potrebbe considerare il gruppo di questi elementi (definiz. I, 57).

a'. Gli elementi di una forma, e quindi la forma stessa sono determinati dalle forme indipendenti che li contengono.

Ho detto anche la forma, perchè essa è determinata dai suoi elementi (def. IV, 57).

Oss. Le forme si possono ritenere dunque determinate da altre forme (def. I, 11).

60. *a. Forme date, determinate da forme identiche, sono identiche.*

Oss. I. L'ordine e il modo con cui sono poste alcune delle forme determinatrici (def. I, 38) si possono ritenere determinati dalle altre forme determinatrici (a', 59).

a'. Se forme identiche determinano altre forme, queste forme sono identiche.

Difatti le due forme risultanti sono determinate da forme identiche (a).

a''. Se forme determinate da altre forme non sono identiche, le seconde forme non sono identiche.

Se lo fossero, determinerebbero forme identiche (a').

a'''. Forme costruite colla stessa operazione mediante forme identiche sono identiche.

Oss II. Nell' operazione riteniamo compreso anche l'ordine delle forme generatrici e il modo con cui sono poste (def. I, 38) se ad essi non si accenna esplicitamente. È inutile anche dire che l'operazione è a senso unico (def. II, 11) perché se desse i risultati Y, Y', Y'' ecc. sarebbe a senso unico rispetto a tutto il risultato Y, Y', Y'' ecc.

Se non lo fossero non lo sarebbero neppure le forme risultanti (a^{IV}).

I principî a e a''' sono conseguenza immediata della definizione d'identità (def. VI, 8; def. III e oss. III, 9) perchè da a o da a''' segue che le condizioni di determinazione delle forme sono tutte uguali (def. I, 11) e quindi anche tutti i contrassegni che servono a distinguere le due forme dalle altre (def. I, 9); e perciò queste forme sono identiche (def. III, 9).

Oss. III. Nel principio a le forme si considerano come date, in a''' si considerano come costruite. I principii a e a''' sono in fondo un solo principio riguardato sotto aspetti diversi, in quanto che anche l'operazione con cui si ottiene un dato risultato si può ritenere data dalle forme (condizioni, 10) che determinano le forme costruite (a, 59 e I, 18).

a^{IV}. *Forme non identiche colla stessa operazione dànno forme non identiche.*

Perchè le condizioni di determinazione delle forme risultanti non sono tutte identiche (def. VIII, 8; def. I, 11).

a^{V}. *Se da forme date colla stessa operazione si ottengono forme identiche, le forme date sono identiche.*

a^{VI}. *Se da forme date colla stessa operazione si ottengono forme non identiche, le forme date non sono identiche.*

Difatti se lo fossero lo sarebbero anche le forme risultanti (a''').

a^{VII}. *Se da forme identiche con date operazioni si ottengono forme identiche, le operazioni sono identiche.*

Difatti se non lo fossero le condizioni di determinazione non sarebbero le stesse (def. II, 10), e le forme risultanti non sarebbero identiche (def. VIII, 8).

Oss. IV. È da osservare come abbiamo fatto altrove (g, 54) che non risulta da a^{V} che due forme non identiche non possano determinare colla stessa operazione forme identiche quando *però* queste si considerino indipendentemente dalle forme generatrici; nè in ciò vi è alcuna contraddizione con a^{IV}. (oss. V, 9).

b. *Alle forme di una forma data si possono far corrispondere univocamente e nello stesso ordine forme identiche di un'altra forma identica alla data.*

Difatti se due forme a e b sono identiche esse corrispondono allo stesso concetto c rispetto a tutti i loro contrassegni, considerate ciascuna in sè (def. VI, 8; 4; oss. III, 9; oss. II, 58). Ad ogni elemento A di a corrisponde una rappresentazione C in c, o un elemento di c, e a questo l'elemento A come anche un elemento B di b (es. 2, 42). Le forme a e b, che sono date da gruppi di elementi (def. IV, 57) corrispondono cosi univocamente a c, e quindi anche fra loro (e, 42). Di più se è data una serie di elementi di a ad essa corrisponde una serie di elementi di c che corrispondono ai primi univocamente e nello stesso ordine (es. 2, 42). Alla serie di c corrisponde nello stesso modo una serie di elementi di b; dunque gli elementi delle due serie a e b si corrispondono univocamente e nello stesso ordine (f, 42). È in questo senso che alle forme di a corrispondono univocamente e nello stesso ordine le forme di b.

Si può dire anche così: siccome fra le forme a e b non si tien conto della diversità di posizione rispetto ad altre forme (oss. III, 9; oss. III, 58), nella relazione di identità possiamo considerare, fatta astrazione da questa diversità, che ogni elemento dell'una coincida con un elemento dell'altra, e viceversa; vale a dire che sia un elemento dell'altra (def. III, 57).

Def. I. Fra gli elementi e le forme di due forme identiche si stabilisce

così una corrispondenza univoca e dello stesso ordine mediante il concetto c, che si chiama *corrispondenza d'identità* o *di uguaglianza.*

Oss. V. Non è escluso che una tale corrispondenza fra due forme si possa stabilire in più modi.

Oss. VI. Le forme corrispondenti di due forme identiche sono identiche, come deriva da b e dalla def. I.

b'. *Se in forme identiche con forme corrispondenti si eseguisce la stessa operazione le forme risultanti sono identiche.*

Se da forme corrispondenti di due forme identiche con la stessa operazione si ottengono altre forme queste sono identiche (b e a''').

b''. *Se le parti di una forma disposte in una serie illimitata corrispondono univocamente e nello stesso ordine a parti di un' altra forma ordinatamente identiche alle prime, le due forme sono uguali relativamente alle serie di parti date.*

Invero se si considerano due serie di parti identiche corrispondenti delle due forme:

$$....ABCDEF....$$
$$....A'B'C'D'E'F'....$$

in modo che

$$A \equiv A', \ B \equiv B',$$
$$AB \equiv A'B', \ AC \equiv A'C',....$$
$$BC \equiv B'C', \ BD \equiv B'D'....$$
$$\text{ecc.}$$
$$ABC \equiv A'B'C', \ ....ABCD \equiv A'B'C'D'...,$$
$$BCD \equiv B'C'D', \ ....BCDE \equiv B'C'D'E'....$$

le due serie determinano due forme uguali perchè queste vengono determinate nello stesso modo da forme ordinatamente identiche, o meglio dalle due serie (a).

Abbiamo detto uguali relativamente alla serie di parti (def. IV, 9) perchè date le forme indipendentemente dalle serie, esse possono essere non identiche nel senso che una di esse sia parte dell'altra senza essere cioè tutta quest'altra, vale a dire senza che ogni elemento della seconda sia anche elemento della prima (def. II, 27, oss. II, 9).

Oss. VII Se una o ciascuna delle forme è composta di una serie limitata di parti contenente come parte una serie illimitata di parti (b, 37; def. II, 27 e def. I. 38) nelle condizioni del teor b'', allora l'uguaglianza ha luogo soltanto rispetto alle serie di parti uguali (def. III, IV, 9).

c. *Forme identiche ad una terza sono identiche fra loro* (e, 8; def. III, 9; def. I, 38).

Oss. V. Questi principî valgono evidentemente anche nel caso dell'uguaglianza in senso relativo, quando essa riguarda i soli contrassegni comuni delle forme che si confrontano (def. II, 9), poichè in questo caso sono sostituibili rispetto a questi contrassegni nella relazione di uguaglianza (def. IV, 9).

Oss. VI. È chiaro che i principî suddetti dànno l'identità di due forme mediante l'identità di altre forme, e quindi se dovessero servire per stabilire l'identità di tutte le forme conterrebbero una petizione di principio. Vedremo al n. 71 come possano servire colla considerazione della forma fondamentale. Veggasi le parti I, II; ad es.: cap. I, § 14.

61. *Def. I.* Se si ha una forma c ottenuta coll'unione di una forma b ad una forma a (def. I, 26), la forma c (*tutto*) si dice *maggiore* di a e b (*parti*), e che a e b sono *minori* di c; e si scrive:

$$c > a \text{ ossia } a < c \;;\; c > b \text{ ossia } b < c \qquad (1)$$ [1].

Def. II. Così se c' si ottiene da a' unendo ad essa b' nello stesso modo che b è unito ad a, essendo

$$a \equiv a, \quad b \equiv b' \qquad (2)$$

si ha

$$c \equiv c' \qquad (a^{\text{IV}}, 60)\,. \qquad (3).$$

Diremo che c è *maggiore* di a' e di b'; e a', b' *minori* di c; e scriveremo:

$$c > a' \text{ ossia } a' < c \;;\; c > b' \text{ ossia } b' < c \qquad (4).$$

Oss. I. Per la stessa ragione a e b sono minori di c' e quindi

$$c' > a, \text{ ossia } a < c', \;;\; c' > b \text{ ossia } b < c' \qquad (5).$$

a. Il concetto di maggiore e di minore fra le forme è indipendente dalla relativa posizione delle forme fra loro.

Difatti secondo (1), (2), (3), (4) nella relazione $c > a$ ossia $a < c$ possiamo sostituire a c o ad a una forma identica qualunque (oss, III, 58) c' o a' (def. VIII, 13).

b. Se $a > b$ *o* $a < b$ *non è* $a \equiv b$ (f, 8).

b'. Se $a \equiv b$ *non è* $a \gtrless b$ [2]

perchè se fosse $a \gtrless b$ non potrebbe essere $a \equiv b$ (b).

c. Se $a \gtrless b$ *non è* $a \lessgtr b$.

Difatti a si ottiene nel primo caso dall'unione di una forma y alla forma b o ad una forma identica a b (def. I o II), e se fosse $a < b$, b si otterrebbe dall'unione di una forma x alla forma a o ad una forma identica ad a, dunque b si otterrebbe dall'unione della forma x alla forma (by), e quindi si avrebbe

$$b(yx) \equiv b \qquad (a, 40)$$

ciò che è assurdo (def. III, 8; def. I e b).

Se $a < b$ non è $a > b$, perchè se ciò fosse per quanto si è detto testè non sarebbe $a < b$.

d. Se è $a > c$, $b > c$ *si ha* $a > c$.

Difatti in a vi è una parte a' identica a b senza che a' sia tutto a, altrimenti sarebbe $a \equiv b$ (def. I e b). In b vi è una parte b' identica a c che non è b, epperciò in a' vi è una parte identica a c e quindi anche in a (b, 60). Dunque $a > c$.

d'. Se è $a < b$, $b < c$ *si ha* $a < c$ (d).

---

1) Non occorre dunque dare un assioma come fa Euclide per dire che il tutto è maggiore della sua parte e la parte è minore del tutto. Ciò è una definizione, e la (1) si basa sull'operazione dell'unire nella sua più semplice espressione (I, 29), e della quale fa uso anche Euclide negli altri suoi assiomi o nozioni comuni senza alcuna spiegazione.

2) Con questo doppio segno intendiamo che ha luogo l'una oppure l'altra disuguaglianza.

Oss. II. Se $a>b$ e $b<c$ risulta soltanto che in a e in c vi sono parti identiche a b, ma non risulta punto che in c vi sia una parte identica ad a, o in a una parte identica a c [1]).

e. Se $a \equiv b$ e $b \lessgtr c$ si ha $a \lessgtr c$.

Ciò deriva con un analogo ragionamento del precedente dalle def. I e II.

§ 4.

Sistema ad una dimensione — Segmenti del sistema, loro estremi — Segmento indivisibile — Versi del sistema — Sistema semplice ad una dimensione chiuso od aperto — Prolungamenti di un segmento nel sistema.

62. *Def. I.* La forma data da una serie qualunque di elementi che ha o non ha un primo ed ultimo elemento e il cui ordine a cominciare da un suo elemento qualunque (def. 21) è contrassegno dato della forma (def. I, 38), e dalla serie inversa, chiamasi *sistema* ad *una dimensione* [2]).

Oss. I. Elementi consecutivi della forma sono quelli consecutivi nell'ordine dato o nell'ordine inverso (24; def. I, 33), in modo che considerati gli elementi in un altro ordine quelli consecutivi in questo nuovo ordine non sono più tali per la forma data, poichè l'ordine delle serie di elementi della forma a cominciare da un suo elemento è già stabilito (def. I, 26).

Oss. II. Le parti della forma oltre gli elementi ...A, B, C, D...., sono anche AB, BC, CD ecc. ABC, BCD...., ecc. (def. I, 38; def. II, 27).

Oss. III. L'ordine degli elementi della forma determina l'ordine in cui si seguono tutte le sue parti AB, BC, CD ecc., ABC, BCD ecc., e l'ordine di ciascuna di queste parti, poichè in quello della forma C segue B, D segue C ecc. (I, 18; def. I, 21; def. II, 39).

Def. II. L'ordine dato e l'ordine inverso rispetto ad un elemento qualunque del sistema si chiamano *versi* del sistema, e uno qualunque di essi si dice *opposto* all'altro.

Def. III. Ogni parte del sistema che contiene almeno due elementi distinti si chiama *segmento* del sistema [3]).

Def. IV. Se gli elementi A e B limitano un segmento essi si chiamano *estremi, termini* o *limiti* del segmento. Indicheremo il segmento con (AB).

Quando non si dirà diversamente intenderemo sempre che un segmento sia limitato da due elementi determinati.

---

1) Da quanto abbiamo detto ai n. 3 e 9 e sull'operazione dell'unire (29 e 38 e 41) nei numeri di questo paragrafo risulta chiara la indeterminatezza dei cosidetti *assiomi* di *Euclide* sulle grandezze (vedi trad. di *Betti* e *Brioschi* libro I) che nel testo greco tradotto da *Heiberg* sono però chiamati *nozioni comuni* (vedi pref.).

2) Si badi che qui il concetto di dimensione non contiene quello di misura, che verrà spiegato più tardi. Sarà opportuno che nel corso del lavoro il lettore rammenti che il vocabolo *forma* indica gli oggetti matematici in generale (def. I, 38), mentre il gruppo (13), la serie (19), il gruppo ordinato (26), il sistema ad una dimensione, sono in fondo oggetti diversi che possono essere indicati col vocabolo forma. Così ad es.: il sistema ad una dimensione può essere chiamato anche gruppo ordinato se lo si considera soltanto in un solo verso (veggasi anche nota n. 4).

3) Questo vocabolo geometrico non significa già che qui intendiamo un segmento rettilineo o curvilineo, e nemmeno un segmento continuo, perchè gli elementi $ABCD$.... sono distinti e qualunque.

Def. V. Se nella forma data fra due elementi A e B nell'ordine di essa non vi sono altri elementi della forma stessa (23), il segmento (AB) lo chiameremo *segmento indivisibile.*

Def. VI. Se di un sistema ad una dimensione dato l'elemento A costruiamo l'elemento consecutivo B, poi l'elemento consecutivo C ecc., nel verso ABC ecc., diremo anche che *applichiamo la legge di costruzione del sistema a cominciare dall'elemento A nel verso dato* (def. II, 58).

Def. VII. Per *segmenti consecutivi in un dato verso* del sistema intenderemo due segmenti dei quali il secondo estremo del primo è primo estremo del secondo nel verso dato.

Oss. IV. Come ogni forma dipende dalla sua legge di determinazione (58), così da questa dipendono anche le relazioni di posizione tra gli elementi di essa. E quindi in generale se due sistemi ad una dimensione hanno due elementi A e B comuni non significa per questo che i segmenti determinati da A e B nei due sistemi debbano essere identici, poichè si può supporre a *priori* senza contraddizione, che le leggi di determinazione siano diverse. Avremo fra poco una conferma a *posteriori* della nostra osservazione. (Vedi nota n. 64). Del resto abbiamo frequenti esempi nel mondo esterno di tale diversità.

63. *Def. I.* Se applicando la legge di costruzione a cominciare da un elemento A di un sistema ad una dimensione dopo avere ottenuti tutti gli altri elementi si ottiene di nuovo (o si *riproduce*) quell'elemento; il sistema si dice *chiuso;* al contrario dicesi *aperto.*

a. Il sistema ad una dimensione chiuso si può considerare come un segmento cogli estremi coincidenti in un elemento qualunque di esso.

Tale proprietà è una conseguenza immediata della def. I, delle def. III, IV, n. 62 e delle def. III, 57, def. VIII, 13.

a'. Un sistema ad una dimensione che ha un primo elemento ed è illimitato è sempre aperto.

Difatti se fosse chiuso si potrebbe considerare come un segmento coi due estremi coincidenti nel primo elemento del sistema ed avrebbe un ultimo elemento e non sarebbe quindi illimitato (def. II, 32 e oss. 28).

Def. II. Se in un sistema ad una dimensione chiuso od aperto nessun elemento è ripetuto (nel primo caso prima che si ottengano tutti gli altri elementi) il sistema dicesi *semplice,* oppure *semplicemente chiuso* o *semplicemente aperto.*

E nel caso sia aperto quando non si dirà diversamente intenderemo che il sistema non abbia un primo e un ultimo elemento, ossia non abbia elementi che lo limitino.

Oss. I. Considerando il sistema chiuso come tutto dato esso non ha elementi che lo limitano, come lo è un segmento (AB) (def. IV, 62). Appare subito come tale quando lo consideriamo da un elemento dato di esso. Possiamo dire nel primo caso che esso è *illimitato*, ma bisogna osservare che non lo è nel senso che le sue serie (def. I, 62) illimitate abbiano un primo od ultimo elemento oppure che a cominciare da un loro elemento siano illimitate nel senso suddetto (def. II, 32 e 33). Sotto questo aspetto il sistema chiuso è invece limitato da due elementi coincidenti in uno qualunque dei suoi elementi dati (a).

b. Il sistema chiuso si può considerare come un sistema illimitato a cominciare da un suo elemento qualunque dato.

Difatti dopo aver ottenuto a cominciare dall'elemento dato A in un verso stabilito tutti gli altri elementi e quindi di nuovo l'elemento A (def. I), basta considerare A dopo questa operazione come un elemento A' diverso da A (oss. III, 9), e così per tutti gli altri elementi che si ottengono colla ripetizione dell'operazione suddetta. E ottenuto A' lo si indica con A'', e così via illimitatamente (def. II, 32).

c. In un sistema ad una dimensione semplicemente aperto un elemento lo scompone (divide) in due parti illimitate, l'una in un verso l'altra nel verso opposto a cominciare dall'elemento dato.

Ciò risulta immediatamente dalla definizione stessa del sistema, che esso non ha cioè elementi che lo limitano nei due versi (def. II, 63).

d. In un sistema semplice ad una dimensione i cui elementi sono:

$$....A^{(-s-1)}....\ A^{(-s)}....\ A^{(-2)}....\ A^{(-1)}....\ AA^{(1)}....\ A^{(2)}....\ A^{(s)}....$$ [1])

scelto un primo elemento A ed uno dei suoi consecutivi, se esiste, ad es.: $A^{(1)}$, come secondo elemento, il verso del sistema è determinato.

Il sistema ha due versi rispetto ad ogni suo elemento (def. II, 62). Se è dato il consecutivo $A^{(1)}$ di A che deve seguire A, uno dei due versi del sistema è pienamente determinato. Perchè se il sistema è chiuso ogni altro suo elemento X può considerarsi dopo di A e $A^{(1)}$, e precederà un altro elemento qualunque Y del sistema se sarà compreso fra A e Y, $A^{(1)}$ e Y (23), il che è dato (def. I, 62). Se il sistema è aperto A lo divide in due parti, che non hanno alcun elemento comune trattandosi di un sistema semplice (c). Considerando quindi A come primo elemento della parte ove si trova $A^{(1)}$, ogni altro elemento X di essa è dopo di A e $A^{(1)}$ e precede ogni altro elemento Y se è compreso fra A e Y. Gli elementi dell'altra parte precedono A e $A^{(1)}$, e uno qualunque X di essi segue ogni altro elemento Y se X è compreso fra Y e A. In questo modo si determina dunque il verso

$$....AA^{(1)}....\ A^{(2)}....\ A^{(s)}....$$

Gli elementi

$$....A....A^{(-1)}....\ A^{(-2)}....\ A^{(-s)}....$$

determinano il verso opposto.

e. Un verso del sistema a cominciare da un elemento A determina un verso a cominciare da ogni altro elemento B del sistema.

Difatti sia $A....A^{(1)}....\ A^{(s)}....\ A^{(s+1)}....$ il verso a cominciare da A. Se B è ad es.: dopo di A, supponiamo sia $A^{(s)}$, è determinato il verso $A^{(s)}....\ A^{(s+1)}.....$ Se non è dopo di A ed è ad es.: $A^{(-s)}$, e se il sistema è chiuso si cade nel caso precedente, perchè si può considerare che sia anche dopo di A nel verso dato (def. II), e si ha pel casoprecedente il verso $A^{(-s)}....\ A^{(-s+1)}....\ A....$ Se il sistema è aperto è determinato il sistema $....A....A^{(-1)}....\ A^{(-s)}....$ inverso al precedente (def. I, 33), e quindi il suo verso $A....A^{(-1)}....\ A^{(-s)}....$, e perciò anche pel caso precedente il verso $A^{(-s)}....\ A^{(-s-1)}....$, dunque anche il verso opposto $A^{(-s)}....A^{(-1)}....A$ (def. II, 62).

f. Se un sistema semplice ad una dimensione β è contenuto in un altro sistema analogo α, un verso del primo determina un verso qualunque del secondo.

---

1) I segni ....(-s), ...(-2) (-1) (1) (2).... (s) non hanno per ora alcun significato numerico.

Siano A e B due elementi consecutivi del sistema β nel suo verso dato (def. I, 25 e def. II, 62). Se fra A e B in α (23) non sono contenuti altri elementi, A e B sono pure consecutivi di α (24), e quindi l'ordine in cui si seguono AB in β dà anche l'ordine in cui si seguono gli stessi elementi in α (d). Se invece fra A e B in α sono compresi altri elementi (23), per es.: $A'A''....B'$, allora l'ordine AB del sistema β determina l'ordine in cui si seguono gli elementi $AA'A''....B'B$ di α. Dato invece l'ordine degli elementi $AA'A''...B'B$ di α è evidentemente determinato l'ordine in cui si seguono gli elementi AB di β.

f'. Si può dire che i sistemi β e α hanno nel caso precedente lo stesso verso o versi uguali.

Indichiamo con $....A_1....A'_1....A''_1....$ i posti occupati dagli elementi di α (20). Un verso di α determina un verso del sistema $....A_1A'_1A''_1....$, e questo stesso verso è determinato dal verso corrispondente del sistema β a cominciare da un suo elemento qualunque, che è elemento di α. Possiamo dunque dire che i versi considerati di α e β sono *uguali*, perchè corrispondono al medesimo verso del sistema $....A_1....A'_1....A''_1....$ ossia perchè possono sostituirsi l'uno all'altro nella determinazione del verso di $....A'_1....A''_1....$ (def. VII, 8; nota n. 9).

f''. I versi di un sistema semplice sono indipendenti dall'elemento dato dal quale si considerano.

Difatti considerando il sistema α da due elementi qualunque B e C, un verso a cominciare da B determina un verso a cominciare da C (e), e si ottengono così due sistemi β e γ a cominciare da B e C che appartengono al sistema α e che determinano un verso di esso (def. I, 62, def. II, 27 e f). I due sistemi a cominciare da A e da B hanno lo stesso verso (f'), dunque ciò significa che è indifferente cominciare da B o da C per determinare i versi di α.

f''' Ogni segmento del sistema semplice ad una dimensione ha due versi che sono i versi del sistema.

Perchè ogni segmento del sistema è un sistema che appartiene al dato (def. III, I, 62 e 27).

64. *a. Dato un segmento limitato a due estremi A e B di un sistema semplice ad una dimensione, uno dei versi di esso si può ritenere determinato da uno dei suoi estremi, e l'altro verso dall'estremo rimanente.*

Il segmento non può contenere alcuna parte chiusa altrimenti un elemento del segmento e quindi del sistema sarebbe ripetuto, mentre il sistema contiene altri elementi fuori del segmento suddetto, e quindi esso non sarebbe semplice (def. III, 62 e def. II 63).

Uno dei versi del segmento (AB) può ritenersi determinato evidentemente dall'elemento A e il verso opposto dall'altro estremo, perchè considerando come primo elemento A, gli altri elementi del segmento seguono A, ed un elemento X precede un altro elemento Y se X è compreso fra A e Y (def. I, III, 62).

Ind. I. Quando non si dirà diversamente intenderemo che il simbolo (AB) determini anche un verso di questo segmento, quello cioè che si ottiene cominciando da A. Si otterrà il verso opposto cominciando dall'elemento B.

b. Nel sistema semplicemente aperto bastano due elementi per determinare un segmento limitato da essi.

Difatti dato il sistema:

$$....B'....A....B....C....B''.... \quad (1)$$

Se si considerano due elementi A e C, essi determinano nel sistema le tre parti:

$$A....B....C, \quad A....B'...., \quad C....B''....$$

di cui una soltanto ha per estremi A e C; le altre due hanno un solo estremo e sono illimitate (c, 63).

b'. Un verso del sistema semplicemente aperto è determinato dall'ordine di due elementi.

Siano A e C i due elementi nell'ordine in cui si seguono i loro segni; essi determinano il segmento (AC) e il verso da A a C, e quindi anche un verso del sistema (a, ind. I; f''' 63).

c. Due elementi di un sistema ad una dimensione semplicemente chiuso determinano due segmenti che insieme uniti in un dato verso costituiscono l'intero sistema.

Ciò risulta dal ragionamento del teor. b quando B' e B'' in (1) coincidono (def. II, 57). Si hanno cioè i due segmenti:

$$A'....B....C, \quad C....B'....A \quad [1]).$$

c'. Per determinare un segmento del sistema semplicemente chiuso basta dare oltre gli estremi un altro elemento di esso.

Perchè per individuare il segmento $A....B....C$ dando oltre gli estremi A e C l'elemento B, questo elemento non può essere compreso nell'altro segmento $C....B'....A$ determinato da A e C, essendo il sistema semplice (def. II, 63).

Ind. II. Un segmento di questo sistema determinato da tre elementi ABC essendo A e C gli estremi lo indicheremo col simbolo (ABC).

Oss. I. Quando dunque si considera il segmento isolatamente dal sistema come ente a sè basta il simbolo (AC); se invece lo si considera unitamente al sistema a cui appartiene bisogna indicarlo col simbolo (ABC). Si può indicarlo anche in questo caso col primo simbolo, ma allora bisogna dire espressamente in quale dei due versi del sistema si deve considerarlo a cominciare da A per togliere ogni indeterminatezza.

d. Un verso di un sistema semplicemente chiuso viene determinato da tre elementi ABC; il verso opposto viene determinato dagli elementi CBA nell'ordine in cui si seguono i loro segni.

Essendo infatti il segmento (ABC) pienamente determinato (c') è determinato anche uno dei suoi versi se si comincia da A (a), e il suo verso opposto se si comincia da C; e quindi vengono così determinati anche i versi del sistema mediante i tre elementi ordinati ABC e CBA (f''', 63).

d'. Se ABC sono tre elementi ordinati di un sistema semplicemente chiuso

---

1) Qui abbiamo una conferma di quanto abbiamo osservato al n. 62 (oss. IV):, e cioè che i due segmenti $A....B...C$, $C....B'....A$ determinati da due elementi A e C nella forma semplicemente chiusa possono non essere uguali, perchè se lo fossero basterebbe prendere in uno di essi ad es.: $A....B....C$ un elemento A' distinto da A e C e si avrebbe:

$$(A'....B....C) < (A....B....C) \qquad \text{(def. I, 61)}$$

ed anche

$$(C....B'....A') > (C....B'....A) \qquad \text{»}$$

ed essendo per ipotesi $(A....B....C) \equiv (C....B'....A)$ si ha: $(A'....B...C) < (C....B'....A)$ e quindi $(A'....B....C) < (C....B'....A')$ (d', 62).

i gruppi ordinati BCA, CAB determinano lo stesso verso di ABC; mentre i gruppi CBA, BAC, ACB determinano il verso opposto.

Invero, gli elementi B e C del segmento (ABC) sono estremi di un solo segmento (BC) che appartiene al segmento dato (27), e il verso di (AC) a cominciare da B è lo stesso verso del segmento (ABC) a cominciare da A (a; f e f''', 63). Così è del segmento (AB) di (ABC). La seconda parte del teorema deriva dalla dimostrazione precedente e da d.

65. *a. Dato un segmento (AC) in un sistema semplice ad una dimensione gli altri segmenti a cominciare da A nel verso di (AC) sono minori o maggiori di (AC).*

Se il sistema è illimitato da A, vi è sempre nel verso dato un segmento (AC') che contiene (AC) senza che C' e C coincidano.

La prima proprietà deriva immediatamente dalla definizione del sistema ad una dimensione semplice (def. II, 63 e def. I, 62) o dalle proprietà della serie di elementi (def. I e b, 36) e dalla def. I, 61. L'ultima parte del teorema è pure evidente, perchè se C' e C fossero un solo elemento il sistema non sarebbe più illimitato, in quanto che abbiamo sempre supposto che si tratti di elementi distinti (def. I, 62, def. II, 32; def. V e oss. I, 8 o oss. II, 57).

Oss. I. L'ultima proprietà ha pure luogo per il sistema chiuso se a cominciare da un elemento A lo si considera come illimitato nel senso del teor. b, 63.

b. Dato il verso in cui si seguono gli elementi di un sistema qualunque ad una dimensione esso si può sempre considerare come un sistema semplice (def. II, 63, def. I, 62 e a, 36).

66. *Def.* Si abbia la parte (AB) del segmento (A_1B_1) di un sistema ad una dimensione semplice nel verso (A_1ABB_1); se A_1 e A, B e B_1 non sono il medesimo elemento le parti (AA_1), (BB_1) si chiamano *prolungamenti* del segmento (AB) nei due versi del sistema; cioè la parte (BB_1) nel verso A_1ABB_1, la parte (AA_1) nel verso opposto.

§ 5.

Applicazione del linguaggio del movimento ai sistemi ad una dimensione

67. *Def. I.* Invece di dire che dall'elemento A applicando la legge di costruzione di un sistema ad una dimensione

$$(A) \qquad ....A^{(-s)}....A^{(-2)}....A^{(-1)}....A.... A^{(1)}....A^{(2)}....A^{(-s)}....$$

si ottengono in un dato verso gli elementi $A^{(1)}$, $A^{(2)}$ ecc. del sistema (def. VI, 62) diremo che $A....A^{(1)}....A^{(2)}....$ sono *posizioni differenti di uno stesso elemento* X che si *muove* secondo la legge del sistema, come un corpo cambia la sua posizione nel mondo esterno, senza però intendere che effettivamente l'elemento goda questa proprietà, imperocchè l'elemento è una forma astratta e senza alcun significato o contenuto speciale (def. I, 57).

Def. II. Siccoma nel sistema ad una dimensione semplice abbiamo due versi che sono determinati a cominciare da un elemento qualunque di esso, noi diremo anche; un elemento *può generare* un sistema dato ad una dimen-

sione nei due versi opposti *movendosi* da un elemento di esso secondo la legge di generazione del sistema (def. II, 58).

Def. III. La prop.: il sistema ad una dimensione β che appartiene al sistema analogo α è *diretto* nello stesso verso o ha la stessa *direzione* di α significa che β e α hanno lo stesso verso (*f*, 63).

Def. IV. La prop.: I prolungamenti di un segmento (AB) di un sistema ad una dimensione *vengono generati* da un elemento che *si muove* secondo la legge del sistema nell'uno o nell'altro verso *partendo* dai due estremi di esso, significa che i prolungamenti (BB_1), (AA_1) (66) si ottengono in uno e nell'altro verso applicando la legge di costruzione del sistema (def. II, 58 e def. VI, 62) a cominciare dagli elementi estremi di (AB) (def. IV, 62).

Def. V. La prop.: nel sistema semplicemente chiuso a *partire* da un elemento A dopo aver *percorso* l'intero sistema in una data direzione o nella direzione opposta si *ritorna* all'elemento di partenza senza essere *passati* più d'una volta per un altro elemento del sistema; oppure anche la prop.: se un elemento *parte* dall'elemento A in un verso o nel verso opposto e dopo aver *percorso* l'intero sistema *ritorna* nella posizione primitiva o *iniziale* o di *partenza*, senza essere passato più d'una volta per un altro elemento, esprimono in altre parole la definizione del sistema semplicemente chiuso (def. II, 63).

Def. VI. Se in un sistema ad una dimensione si considerano in un dato verso i segmenti:

$$(AA^{(m)}) > (AA^{(m-1)}) > \dots > (AA^{(1)})$$

e riguardando successivamente $A^{(m)}, A^{(m-1)}, \dots A^{(1)}$ come posizioni di uno stesso elemento X (def. I) diremo che X si *avvicina* ad A. Se invece le posizioni di X sono successivamente $A^{(1)}A^{(2)}\dots A^{(m)}$ diremo che X si *allontana* da A.

Def. VII. Così se consideriamo i segmenti $(AA^{(1)})$, $(A^{(1)}A^{(2)})$ ecc. consecutivi nel medesimo verso potremo dire che sono posizioni differenti di un segmento (XY) nel verso dato che si *muove* o *varia* nel sistema. Il segmento (XY) si chiama in tal caso segmento *variabile* per distinguerlo da un segmento $(AA^{(1)})$ dato che è sempre lo stesso nelle nostre considerazioni e si chiama *costante*.

I segmenti $(AA^{(1)})$, $(AA^{(2)})$, $(AA^{(3)})$ ecc. si chiamano *stati* del segmento variabile (AX).

Oss. Ciò non significa però che i segmenti $(AA^{(1)})$, $(A^{(1)}A^{(2)})$ ecc. debbano essere identici.

Noi non intendiamo d'introdurre in questo paragrafo nuovi principî, ma di esprimere con altre parole quelli gia spiegati o definiti, tanto è vero che di questo paragrafo potremmo, volendo, far di meno [1]).

---

1) Una delle forme concrete più semplici ad una dimensione è il tempo. Una successione di cose, come già ho detto (nota n. 19) non è il tempo, ma il tempo è necessario per potere pensare successivamente a queste cose diverse o perchè possano aver luogo successivamente gli avvenimenti nel mondo esterno ed interno. Essendo dato un sistema ad una dimensione possiamo, se vogliamo, supporre che gli elementi considerati siano ottenuti nella medesima parte di tempo applicando la legge di costruzione del sistema in modo che da A nasca A' (def. V, 58), e nella stessa parte di tempo da A' nasca A'', e così via. In tale ipotesi i segmenti (AA'), $(A')(A'')$ ecc. sono dedotti nella medesima parte di tempo, ma non per questo deriva da ciò che essi debbano essere uguali, mentre potrebbero essere generati in parti non uguali di tempo ed essere identici. La nostra mente può considerare gli elementi consecutivi o i segmenti di un sistema ad una dimensione nella medesima parte di tempo

Capitolo V.

Della forma fondamentale.

§ 1.

Definizione del sistema ad una dimensione omogeneo in un dato verso, e sue prime proprietà.

68. *Def. I.* Se in un verso di un sistema ad una dimensione esistono due segmenti identici ad ogni segmento dato nello stesso verso, aventi l'uno per primo l'altro per secondo estremo un elemento qualunque dato A, il sistema si dirà *omogeneo nel verso dato* [1]).

a. Il sistema omogeneo in un dato verso, se è aperto, è illimitato in ambedue i versi a partire da un suo elemento qualunque.

Difatti da un suo elemento A nel verso dato non vi può essere un ultimo elemento X (22) perchè dato un tale elemento X, esiste nel verso dato un segmento (XY) identico a qualunque altro segmento del sistema nel verso dato, ad es. ad (AX) (def. I). Nè può essere limitato nel verso opposto perchè ogni elemento X del sistema è anche secondo estremo di un segmento identico ad (AX) nel verso stabilito.

Oss. I. Anche se è chiuso lo possiamo considerare come aperto (*b*, 63).

b. Scelto un elemento X qualunque del sistema omogeneo in un dato verso e dato un segmento (AB) diretto in questo verso, vi è un solo segmento uguale ad (AB) nello stesso verso di cui X è il primo o il secondo estremo.

Difatti essendo dato il verso del sistema omogeneo ad una dimensione si può sempre ritenere come un sistema semplice (*b*, 65). Ora a partire da X nel verso considerato come primo elemento vi è un segmento (XY) identico ad (AB) (def. I), e poichè ogni altro segmento nel medesimo verso a partire da X è maggiore o minore di (XY) (*a*, 65) si ha che (XY) è il solo segmento identico ad (AB) nel verso del sistema, perchè le relazioni $A > B$ oppure $A < B$ escludono la relazione $A \equiv B$ (*b*, 61).

c. Se nel sistema omogeneo si hanno due segmenti (AC), ($A'C'$) nel verso

---

o successivamente in parti di tempo diverse. Noi veniamo col linguaggio del movimento a dotare l'elemento di questa facoltà del pensiero, e supponiamo perciò che sia l'elemento stesso o il segmento che acquista successivamente le posizioni degli altri elementi o degli altri segmenti, anche se il sistema non è continuo (I. 18). Il risultato è il medesimo, soltanto la dicitura ne guadagna in chiarezza e comodità, ma per la precisione è bene usare questo linguaggio nella geometria coi dovuti riguardi per non confondere questo movimento *nominale* con quello *reale* dei corpi (vedi prefaz. e parte I).

1) Esamineremo in seguito se le parti di questa definizione sono indipendenti. Osserviamo intanto che il concetto del sistema ad una dimensione è più generale di quello omogeneo, perchè non mancano sistemi ad una dimensione, come ad es: la maggior parte delle curve geometriche, i quali non godono la proprieta del sistema omogeneo. Che non basti poi un solo segmento dato si vede subito supponendo il sistema composto di una serie limitata o illimitata che contenga come parte una serie illimitata (Vedi oss. II, 81).

dato scomposti nelle parti consecutive (AB) (BC), $(A'B')$ $(B'C')$ *e* $(AB) \equiv (A'B')$, $(BC) \equiv (B'C)$, *è* $(AC) \equiv (A'C')$

Difatti a partire da A' nel verso dato vi è un segmento ed uno solo uguale ad (AC) (b) il quale, per la corrispondenza d'identità con questo segmento, deve scomporsi in due segmenti $(A'B'')$, $(B''C'')$ rispettivamente identici ad (AB) e (BC) $(b, 60)$. Ma si ha pure $(A'B'') \equiv (A'B')$, $(B''C'') \equiv (B'C')$ $(c, 60)$; dunque B'' deve coincidere con B' e C'' con C' (b), e perciò $(A'C'')$ con $(A'C')$ (def. V, 57; b, a, 65; def. I, 61).

c'. Il sistema omogeneo è un sistema semplicemente chiuso od aperto.

Supponiamo che A sia un elemento ripetuto nel sistema, e siano (BA) e (AC) due segmenti nel verso di esso che abbiano l'elemento A comune, il che è possibile immaginare essendo il sistema illimitato nei suoi due versi (a). Ogni altro elemento A' si può considerare come elemento comune di due altri segmenti $(B'\ A')$ e $(A'\ C')$ dello stesso verso e rispettivamente identici a (BA) (AC) (def. I); e siccome $(BC) \equiv (B'C')$ (c) l'elemento A' ha in $(B'C')$ la stessa proprietà che ha A in (BC) $(b, 60)$. Dunque se A è ripetuto lo è anche A' e perciò o il sistema si riduce a un solo elemento, ciò che è escluso, nel concetto stesso del sistema ad una dimensione che si compone di elementi distinti, salvi casi eccezionali (def. I, 62 e oss. I, 57); oppure il sistema è considerato più volte; ed in questo caso il sitema considerato una sola volta è semplice (def. I, 62); e siccome il sistema non è limitato da due elementi (a) ne consegue che è semplicemente chiuso od aperto (def. I e II, 63).

c'' Gli elementi del sistema a partire da due elementi dati A e A' si corrispondono univocamente e nel medesimo ordine nel verso dato.

Basta far corrispondere A ad A', e A' ad A, e ad ogni elemento X a partire da A nel verso dato si faccia corrispondere l'elemento X' a partire da A' nel medesimo verso in modo che $(AX) \equiv (A'X')$ (def. I). Se X precede A nel verso dato, basterà considerare X' tale che in questo verso sia $(XA) \equiv (X'A)$ (def. I). In tal modo la corrispondenza univoca è pienamente stabilita la quale è anche dello stesso ordine (def. III, 42). Difatti se si ha:

$$(AB) < (AX) < (AC)$$

si deve avere pure:

$$(A'B') < (A'X') < (A'C') \qquad (a, 61)$$

c''' I segmenti indivisibili, se esistono, sono uguali.

Siano (AB) e (XY) i segmenti indivisibili (def. V, 62). Nel verso di (XY) possiamo considerare a partire da X un segmento $(XY_1) \equiv (AB)$ (def. II, 61, def. I). Se (AB), e perciò (XY_1), non è uguale a (XY) $(h$, (8, è (XY_1) maggiore o minore di (XY) $(c, a, 65)$. Se $(XY_1) < (XY)$, l'elemento Y_1 appartiene al segmento (XY) (def. I, 61, def. I, 62 e def. II, 27), e perciò (XY) non sarebbe indivisibile contro l'ipotesi. Così se fosse $(XY) < (AB)$.

Def. II. D'ora innanzi per *elementi consecutivi* di un sistema omogeneo intenderemo anche quelli di un altro sistema omogeneo nello stesso verso che appartiene al primo (def. I, 27; def. I, 62 e def. I), i cui elementi consecutivi sono separati da elementi del primo sistema (23).

Oss. I. Risulta immediatamente dalla definizione stessa che gli estremi dei

segmenti consecutivi uguali nel verso del sistema omogeneo si possono pure considerare come elementi consecutivi.

69. *a. Se due segmenti* (AB), (CA) *di uno o due sistemi qualunque ad una dimensione sono identici considerati in un dato verso, sono identici anche nel verso opposto.*

Difatti stabilita la corrispondenza d'identità fra i due segmenti (b e def. I, 60) a C corrisponde A, a D corrisponde B, e (BA) e (DC) si ottengono dai segmenti (AB) e (CD) colla stessa operazione a senso unico, considerandoli cioè nel verso opposto a partire dagli elementi corrispondenti B e D (b', 60).

b. Il sistema ad una dimensione omogeneo in un dato verso è omogeneo anche nel verso opposto.

Difatti dato un segmento qualunque (BA) diretto nel verso opposto del sistema, a partire da un elemento X qualunque si possono considerare due segmenti (ZX) e (XY) identici ad (AB) nel verso dato del sistema (def. I, 68), e quindi (XZ). (YX) che sono diretti nel verso opposto sono identici a (BA) (a). Il teor. è dunque dimostrato (def. I, 68).

b'. Dato un elemento X qualunque del sistema omogeneo e dato un segmento (AB) *in un dato verso, in questo verso vi sono due soli segmenti identici ad* (AB) *di cui X è estremo comune.*

A partire da X nel dato verso (def. I, 68) il teorema è niente altro che b, 68. Ma esistono pure due e due soli segmenti $(Y'X)$ e (XY) nel verso opposto identici a (BA) coll'estremo comune X (b; b', 68).

c. Il sistema omogeneo aperto a partire da un suo elemento A in un dato verso è identico a partire da un altro elemento qualunque A' nel medesimo verso rispetto alla disposizione in serie delle sue parti limitate.

Invero, fatti corrispondere gli elementi A e A' fra di loro e ai segmenti consecutivi a partire da A i segmenti consecutivi uguali a partire da A' nel medesimo verso, che si limitano fra loro (def. VII, 62), le due serie di segmenti si trovano nelle condizioni del principio b'' del n. 60.

Oss. I. Si badi bene che le parti del sistema a partire da A e A' nel verso dato non si possono dire identiche (def. III, 9) senz'altro, cioè senza una convenzione speciale, perchè si verrebbe alla contraddizione che il tutto A è identico alla sua parte B, e cioè che *A è e non è A* (def. I, 62, def. II, 27 e def. VI, 8), in quanto che le relazioni $A < B$, $A < B$ escludono la relazione $A \equiv B$ (b, 61).

d. Se il sistema omogeneo è chiuso il teorema (c) *sussiste in senso assoluto.*

Difatti due elementi A e B dividono il sistema in due parti (c, 64), e scelto un elemento C tale che in un dato verso sia $(AB) \equiv (BC)$ e potendo considerare da C nel verso ABC un segmento (CB') identico all'altro segmento determinato dagli elementi A e B, cioè (BA), (def. I, 68; b, 69) i risultati sono identici (c, 68). Ma gli estremi del segmento risultante nel primo caso coincidono in A, dunque devono coincidere anche nel secondo, vale a dire l'elemento B', deve coincidere con B.

Conv. I. Siccome trattiamo il sistema omogeneo nella ricerca delle sue proprietà fondamentali come sistema aperto o chiuso, così senza far distinzioni tra il sistema aperto e il sistema chiuso rispetto alle proprietà (c) e (d) *conveniamo* di dire che anche la parte del sistema omogeneo aperto a partire da

un suo elemento in un dato verso è *uguale* alla parte dello stesso sistema a partire da un altro elemento A' nel verso considerato, *purchè però, quando fa bisogno, l'uguaglianza delle due parti si debba interpretare nel senso del teorema c* [1]).

§ 2.

Prime proprietà del sistema identico nella posizione delle sue parti.

70. *Oss. I* Da quanto precede non risulta che se si ha in un verso dato

$$(A^{(-s)}....A) \equiv (A....A^{(s)})$$

sia pure

$$(A....A^{(-s)}) \equiv (A....A^{(s)}) \qquad (1)$$

e tanto meno

$$(A....A^{(s)}) \equiv (A^{(s)}....A) \qquad (2)$$

La seconda relazione implicherebbe evidentemente la prima. Ora l'essere un tutto, ad es. $ABCDE$ identico ad un tutto $A'B'C'D'E''$, non significa che lo stesso tutto $ABCDE$ sia identico al tutto $E'D'C'B'A'$ (oss. 41).

E se il segmento (AB) del sistema omogeneo non è uguale allo stesso segmento considerato nel verso opposto cioè (BA), le proprietà del sistema omogeneo (def. I, 68) rimangono inalterate.

Frequenti esempi si hanno in geometria di segmenti di curve che non sono uguali agli stessi segmenti considerati nel verso opposto [2]). Dunque:

Anche se il sistema è omogeneo in un dato verso e nel verso opposto (*b*, 69) *ciò non significa che il sistema in un verso a partire da un suo elemento qualunque sia identico al sistema nel verso opposto.*

Ora vogliamo che il nostro sistema sia assoggettato anche a questa proprietà.

Def. I. Se un sistema omogeneo ad una dimensione a partire da un suo punto dato A in un verso è identico al sistema considerato dallo stesso punto nel verso opposto, lo chiameremo *sistema identico nella posizione delle sue parti.* [3])

---

1) Nei trattati di geometria elementare cogli assiomi esprimenti che una figura può muoversi rimanendo invariabile, rimanendo quindi conservate tutte le relazioni di tutto e di parte, e che la retta (che si considera aperta) può ruotare intorno ad un suo punto fino a passare per un punto qualunque dello spazio, non si evita la contraddizione dell'oss. I, la quale però non ha alcuna influenza finchè si rimane nel campo finito di un'unità, come meglio si vedrà in seguito. (Vedi anche pref.).

2) Si immaginino ad es. secondo una legge determinata degli archi identici consecutivi di curva, ad es. di ellisse. Considerando soltanto gli estremi, le cui relazioni di posizione sono date appunto dagli archi di ellisse di cui sono estremi, essi costituiscono un sistema ad una dimensione omogeneo in un verso, senza che in generale da un elemento A esso sia identico allo stesso sistema nel verso opposto. Daremo in seguito il principio del continuo (ip. VI, VIII) per il sistema omogeneo, ma mentre potremo dimostrare la divisibilità in parti uguali di un segmento dato (AB) e la legge commutativa della somma di segmenti, per la dimostrazione della proprietà $(AB) \equiv (BA)$ ci occorrerà appunto la definizione del sistema identico nella posizione delle sue parti (Vedi oss. II, 81).

3) La proprietà che distingue il sistema omogeneo in un dato verso e quella che distingue il sistema identico nella posizione delle sue parti dagli altri sistemi ad una dimensione le abbiamo riscontrate sull'oggetto rettilineo limitatamente all'osservazione. Soltanto che qui è da osservare che il nostro sistema identico della posizione delle sue parti non è necessariamente continuo come si considera la retta, e che le nostre definizioni sono indipendenti dall'osservazione. È inoltre da aggiungere che mentre l'oggetto rettilineo è un oggetto limitato di prima specie rispetto alle sue parti consecutive, non è necessario di supporre questa proprietà per il nostro sistema. Le proprietà date dalle definizioni I, 68 e I, 70 si ammettono pure sotto altra forma nei trattati di geometria elementare per la retta, facendo uso dell'assioma del movimento delle figure senza deformazione, anzi si va più in là perchè si ammette la seconda proprietà per ogni punto della retta, mentre basta ammetterla per un punto solo, e rimanendo nel campo finito di un'unità, come avviene nei trattati suddetti, basta ammetterla per un solo segmento limitato, come pure basta ammettere là def. I, 68 per un solo segmento dato (Vedi oss. II, 81). Noi dimostreremo in seguito che $(AB) \equiv (BA)$, che pure si dà come assioma (Vedi n. 99 e 104).

a. La parte del sistema identico nella posizione delle sue parti a cominciare da un suo elemento dato A in un verso qualunque è uguale alla parte dello stesso sistema considerata da un altro elemento dato qualunque A' nell'uno come nell'altro verso.

Sia A l'elemento rispetto al quale il sistema in un verso è identico al sistema nel verso opposto (def. I). Il sistema essendo omogeneo in uno e nell'altro verso (def. I, e *b*, 69) la parte di esso in uno o nell'altro verso a partire da A' è uguale alla parte del sistema considerata da A nello stesso verso (*c*, *d*, conv. I. 69), ma anche da A nel verso opposto (def. I, *c*, 60); e quindi per la stessa ragione la parte del sistema a partire da A' in un verso è uguale alla parte del sistema da A' nel verso opposto.

a'. Dato un elemento qualunque X del sistema identico nella posizione delle sue parti, in uno e nell'altro verso esiste un segmento identico ad un segmento dato (AB) (*a; b*, 60).

a''. Un elemento qualunque di un sistema aperto identico nella posizione delle sue parti lo divide in due parti che a partire da esso sono identiche (*c*, 63; *a;* conv. I, 69).

Def. II. Nel sistema ad una dimensione identico nella posizione delle sue parti possiamo considerare a cominciare da un elemento dato quale primo estremo, in uno e nell'altro verso, una serie di segmenti limitati identici consecutivi. Applicando quindi il linguaggio del movimento (def. VII, 67) possiamo dire: In un sistema ad una dimensione identico nella posizione delle sue parti una sua parte può *muoversi* o *scorrere mantenendosi identica a sè stessa* ossia *mantenendosi invariabile.*

Oss. II. Da quanto precede non risulta ancora che abbia luogo la proprietà (2) dell'osservazione I qualunque sia il segmento $(A.... A^{(s)})$. Se $(A... A^{(s)})$ è un segmento indivisibile di un sistema ad una dimensione identico nella posizione delle sue parti (def. V, 62), nel verso opposto a partire da $A^{(s)}$ possiamo considerare un segmento $(A^{(s)}A')$ identico ad $(AA^{(s)})$. Se A' non coincidesse con A significherebbe che o l'elemento A' sarebbe contenuto in $(A^{(s)} A)$ o ciò che è lo stesso in $(AA^{(s)})$, oppure l'elemento A sarebbe contenuto in $(A^{(s)} A')$, essendo il sistema semplicemente chiuso od aperto (def. I; *c'*, 68; def. II, 63; *b*, 36 e *b'*, 33). E ciò non può essere perchè $(AA^{(s)})$ e $(A^{(s)} A')$ sono per ipotesi indivisibili (def. V, 62). Quindi la proprietà (2) resta dimostrata per il segmento indivisibile. Facilmente la si dimostra poi per ogni segmento composto di un numero n qualunque dato della serie (I) di segmenti indivisibili consecutivi (def. VII, 62); ma per ora non possiamo dimostrarla per un segmento qualunque senza premettere molte altre considerazioni [1]).

§ 3.

Ancora della identità di due forme. Forma fondamentale. — Necessità di essa. — Ipotesi I e II.

71. *Oss. I.* I principî *a* e *a'''* del n. 60 sulle forme identiche, dai quali abbiamo derivato sotto forma diversa o per dimostrazione gli altri principî dello stesso numero, essendo derivati essi stessi dal principio d'identità $A \equiv A$ applicato a forme di-

---

1) Vedi n. 99 e 104.

stinte (def. V, e VI. 8; def. III, oss. III e IV, 9; def. I, 38; oss. III, 58; oss. I, a, 59), *si appoggiano sull'identità di altre forme,* come già osservammo al n. 60 (oss. VI).

Per non cadere quindi in un circolo vizioso e rendere possibile l'applicazione di quei principî nella costruzione delle forme *dobbiamo ammettere* che per una forma almeno sia stabilita l'identità fra le sue parti in base alla def. VI del n. 8 senz'altro, o in altre parole *dobbiamo ammettere* che le forme da noi considerate siano determinate, costruite o costruibili per mezzo di una forma almeno.

Ip. I. **Vi è una forma che serve a determinare tutte le altre.** Chiameremo questa forma *forma fondamenlale.*

Le forme fondamentali sono identiche [1].

Oss. II. Gli elementi di una forma qualunque, e perciò la forma stessa, sono determinati in posizione da altre forme (oss. I, 59 e oss. III 60). Anche sotto questo rispetto il *caso più semplice* è quello in cui siano determinati da tutte le forme identiche ad una data, che li contengono, o, come diremo anche in questo caso o in casi simili, da una sola forma, considerando un individuo per la classe.

Oss. III. Per le altre forme l'identità deve risultare dalla loro costruzione per mezzo della forma fondamentale, o in altre parole:

Le relazioni fra le diverse forme e fra le parti di una forma stessa (def. I, 38) *si riducono a relazioni fra le parti di una o più forme fondamentali date.*

La forma fondamentale non può essere determinata da altre forme.

Questo in fondo significa l'ipotesi I.

Infatti per la ip. I stessa essa può essere determinata soltanto da altre forme ad essa identiche o dalle forme che essa stessa determina o serve a costruire, o in altre parole da sè stessa; altrimenti si cadrebbe in un circolo vizioso. E quindi le sue proprietà non possono dipendere dalla sua costruzione per mezzo di altre forme perchè la sua costruzione dipende dalle sue proprietà (def. II, 10).

Ip. II. **La forma fondamentale è un sistema ad una dimensione identico nella posizione delle sue parti.**

Oss. IV. Spiegheremo alla fine le ragioni di questa scelta. La forma fondamentale non è però ancora determinata pienamente fra le altre forme; sappiamo soltanto che è un sistema ad una dimensione indentico nella posizione delle sue parti (def. I, 70) chiuso od aperto (c', 68). Finchè non sarà determinata fra questi sistemi, tutte le sue proprietà, che svolgeremo nei numeri seguenti, valgono tacitamente anche per tutti i sistemi ad una dimensione identici nella posizione delle loro parti e non identici ad essa [2].

---

1) Questa ipotesi rappresenta un certo grado di necessità per la trattazione matematica della forme astratte (38) più delle altre che riguardano le proprietà particolari della forma fondamentale, e per stabilire le quali ci serve sempre di guida il continuo rettilineo intuitivo senza (per questo porci restrizioni non consentite dalla libertà del pensiero matematico (Vedi pref.).

2) *Du Bois Reymond* (l. c. pag. 15) ricorre anche lui ad una forma fondamentale (Grundform) che chiama grandezza lineare. Egli ha però soltanto in vista l'analisi, e perciò la sola grandezza numerica, mentre noi consideriamo come contrassegno essenziale delle nostre forme la diversità di posizione di esse (def. I, 38 e ad es. def. II, 45). Di più per stabire i suoi principî I-VI della grandezza lineare (pag. 44-48) egli non solo ricorre alla rappresentazione sensibile della retta, come facciamo noi e abbiamo fatto per stabilire le proprietà del sistema identico nella posizione delle sue parti, ma l'enunciato di questi principi non è sempre reso indipendente dalla rappresentazione (come il principio I) in modo che è necessario ricorrere all'osservazione per costruire coi principî dati il concetto della sua grandezza lineare. E questo è ciò che non facciamo e non dobbiamo fare. *D. B. R.* a pag. 47 dichiara però che non ha inteso di ridurre per via logica i suoi principî al minor numero possibile, sebbene anche questo sia uno dei problemi fondamentali della matematica. D'altra parte egli non si occupa di definire e di spiegare astrattamente i concetti dei quali in questi principî fa uso (Vedi nota n. 85). Osservo inoltre che finchè trattiamo la forma fondamentale come sistema identico nella posizione delle sue parti essa corrisponde in sè non solo alla retta, ma anche, ad es. al cerchio.

§ 4.

Operazioni dell' unire e del togliere sulla forma fondamentale e loro nuovo significato. — Segmento nullo. — Altra indicazione di un segmento percorso nei suoi due versi. — Relazioni fra tre elementi qualunque della forma.

72. *Oss. I.* Per il senso in cui abbiamo usato fin qui l'operazione dell'unire (def. I e oss. 13; def. I, 26 e I, II, 29) la forma risultante dall'unione sulla forma fondamentale di un segmento (BC) ad un segmento (AB) aventi un solo elemento comune B, deve avere per elementi tutti gli elementi delle forme unite. Per ora dunque non è possibile che in questa operazione (BA) e (BC) siano di verso opposto, perchè essendo la forma fondamentale un sistema semplice, in questo caso dovendo essere C prima di B nel verso di (AB) (ind. I, 61, f'', 63), o C coinciderebbe con A, o C sarebbe contenuto in (BA), vale a dire in (AB), oppure A sarebbe contenuto in (BC) (def. I, 70; c', 68; def. II, 63; b, 36 e b', 33); in ogni caso avrebbero dunque i segmenti (AB) e (BC) più di un elemento comune.

Il risultato inoltre dell'unione sulla forma fondamentale del segmento (BC) al segmento (AB) dello stesso verso é il segmento (AC) che ha per parti consecutive (AB) e (BC) (def, VII, 62).

Def. I. Addizionare o *sommare* (BC) ad (AB) significa unire il segmento (BC) al segmento (AB). Questa operazione (*addizione* del segmento (BC) al segmento consecutivo (AB) (def. VII, 62) la indicheremo così: $(AB)+(BC)\equiv(AC)$, usando per essa il segno $+$ come per l'addizione dei numeri (ind. I, 47).

Def. II. Il segmento (AC) si chiama *somma* del segmento (BC) al segmento (AB).

a. L'addizione di due segmenti nella forma fondamentale è un' operazione a senso unico.

La posizione e l'ordine dei segmenti sono stabiliti (def. I), e quindi *a* (def. I; 29 e 41).

b. Somme di segmenti rispettivamente uguali sono uguali (def. I; *c*, 68).

Oss. II. Per ottenere dunque il segmento (AC) basta dato (AB) percorrere il segmento (BC) nel verso di (AB) a partire da B.

73. *a. Se è* $(AC)\equiv(AB)+(BC)$ *e nel verso di* (AC) *si sceglie il segmento* $(AC')\equiv(BC)$, *è* $(AC')<(AC)$; *e se si sceglie il segmento* $(A'C)\equiv(AB)$, è $(A'C)<(AC)$.

Perchè è $(BC)<(AC)$ (def. I, 61) ed essendo $(AC')\equiv(BC)$ (def. I, 68 e *b*, 69; def. I, 70) si ha $(AC')<(AC)$ (def. II, 61).

Per la stessa ragione $(A'C)<(AC)$ [1].

b. Dati due segmenti (AB), $(A'B')$ *della forma fondamentale, non identici, l'uno è maggiore o minore dell'altro.*

Difatti nel verso di $(A'B')$ si può considerare a partire da A' un segmento $(A'B'')$ identico al segmento (AB) (def. I, e a', 70). Siccome B'' non può coincidere con B', perchè $(A'B'')$ non è identico ad $(A'B')$ (h, 8) esso deve essere contenuto nel segmento $(A'B')$, oppure B' deve essere contenuto nel segmento $(A'B'')$ (def. I, 70; c', 68; def. II, 63 e b, 36). Nel primo caso è $(A'B')>$

1) Ciò non significa ancora che $(C'C)$ sia identico nel 1. caso ad (AB). (Vedi n. 99 e 104).

$(A'B'')$ e nel secondo $(A'B') < (A'B'')$ (def. I, 61), e perciò anche nel primo caso $(A'B') > (AB)$ e nel secondo $(A'B') < (AB)$ (def. II, 61).

c. Per vedere se un segmento $(A'B')$ è maggiore, uguale o minore di un segmento (AB) è indifferente considerare un segmento uguale ad $(A'B')$ nel verso di (AB) a partire da A come primo estremo o da B come secondo estremo.

Questo teorema risulta dal teorema b combinato col teorema a e dalla def. II, 61.

d. Dato un segmento (AB) e una sua parte (CD) di cui nessun estremo coincide in A o in B, si ha $(AB) > (CD)$.

Difatti nel verso di (AB) a partire da A gli elementi A, C, D, B si seguono nell'ordine $ACDB$ (def. III, II, I, e oss. III, 62; f''', 63) si ha:

$(AB) > (AD)$, $(AD) > (CD)$ (23, def. I, 61), e quindi $(AB) > (CD)$ (d,61).

e. Se un segmento (AB) è maggiore di un altro segmento (CD), (BA) è maggiore di (DC).

(CD) è uguale ad una parte di (AB), (def. II, 61), e a questa possiamo sostituire nel verso di (AB) il segmento $(A'B) \equiv (CD)$ di (AB) (c). Ora si ha $(BA) > (BA')$ (def. I, 61) dunque $(BA) > (DC)$, essendo $(DC) \equiv (BA')$ (a, 69 e def. II, 61).

f. Se a segmenti (AB), $(A'B')$ uguali si addizionano i segmenti $(BC) \gtreqless (B'C')$ dello stesso verso, si ha:

$$(AC) \gtreqless (A'C')$$

Il teorema è evidente se $(BC) \equiv (B'C')$ (c, 68; def. I). Se $(BC) > (B'C')$ e si considera $(BC'') \equiv (B'C')$ nel medesimo verso, l'elemento C'' deve cadere fra B e C perchè $(BC) > (BC'')$ (def. II, 61), e quindi $(AC'') \equiv (A'C') < (AC)$ (c. 68; def. I, 61). Analogamente se è $(BC) < (B'C')$.

g. Dati due segmenti (AB) e $(A'B')$, se il primo è maggiore, uguale o minore del secondo, sommando ad ambedue rispettivamente i segmenti (BC) e $(B'C')$ uguali e dello stesso verso di (AB) e $(A'B')$, la prima somma è maggiore, uguale o minore della seconda.

Se $(AB) \equiv (A'B')$ il teorema è dimostrato (c, 68). Se $(AB) > (A'B')$ si consideri a partire da A nel verso di (AB) (ind. I, 64; f''', 63) un segmento (AB'') uguale ad $(A'B')$ (a', 70); l'elemento B'' sarà contenuto fra A e B senza coincidere con B (def. II, I, 61). Da ciò si deduce che B é fra B'' e C, perchè non appartenendo ad (AB'') (def. I, 70; c' 68; def. II, 63 e b, 36) ed essendo elemento di (AC) deve appartenere a $(B''C)$ (def. I, 70; def. I, 27 e II, 29), senza essere B''. Aggiungendo ad (AB) e ad (AB'') i segmenti (BC) e $(B''C'')$ uguali dico che:

$$(AB) + (BC) > (AB'') + (B''C'')$$

ossia

$$(AC) > (AC'')$$

Difatti l'elemento C'' deve essere compreso in $(B''C)$ senza essere C, perchè B è in $(B''C)$, altrimenti il segmento $(B''C'')$ sarebbe maggiore di (BC) (def. I, 61 e d). Essendo C'' compreso in $(B''C)$, che è parte di (AC), C'' è compreso in (AC),

(c, 27; def. I, 62 e def. I, 70), e quindi $(AC) > (AC'')$ (def. I, 61). Ma $(AC'') \equiv (A'C')$, dunque $(AC) > (A'C')$ (c, 68; def. II. 61). Così resta dimostrata anche la terza parte del teorema.

g'. *Se nel primo caso di g si ha:*

$$(BC) > (B'C')$$

la prima somma è maggiore della seconda.

Se è $(BC_1) \equiv (B'C')$ nel verso di (AB) (ind. I, 64 e f''', 63) si ha: $(AB)+(BC_1) > (A'B')+(B'C')$ (g), ma $(AB)+(BC) > (AC_1)$ (f), dunque:

$$(AB)+(BC) > (A'B')+(B'C') \quad (d,\ 61).$$

g''. *Secondo i tre casi* $(AB) \gtreqless (A'B')$ *si ha* $(AB)+(AB) \gtreqless (A'B')+(A'B')$ (g, g').

g'''. *Se a segmenti uguali (AB), $(A'B')$ sommando altri segmenti (BC), $(B'C')$ si ottengono segmenti uguali, (BC) e $(B'C')$ sono uguali.*

Difatti si ha:

$$(AB)+(BC) \equiv (AC), \quad (A'B')+(B'C') \equiv (A'C')$$

Se fosse $(BC) \gtrless (B'C')$ non si potrebbe avere $(AC) \equiv (A'C')$ (f; b, 61).

g^{IV}. *Se ai segmenti (AB), $(A'B')$ sommando segmenti uguali si ottengono risultati uguali, si ha $(AB) \equiv (A'B')$.*

Difatti se fosse $(AB) \gtrless (A'B')$ essendo $(BC) \equiv (B'C')$, sarebbe:

$$(AB)+(BC) \lessgtr (A'B')+(B'C') \quad (g)$$

il che in ogni caso è assurdo (b', 61).

g^{V}. *Se ai segmenti (AB), $(A'B')$, essendo $(AB) > (A'B')$, sommando i segmenti (BC) e $(B'C')$ si ottengono risultati uguali, deve essere $(BC) < (B'C')$.*

Non può essere $(BC) \equiv (B'C')$ (g e b', 61), nè può essere $(BC) > (B'C')$ (g'; b', 61), dunque $(BC) < (B'C')$ (b).

74. *Oss. I.* Togliere nella forma fondamentale un segmento (BC) da un segmento (AC) significa nel senso fin qui usato, scomporre (AC) in due parti consecutive di cui l'ultima sia (BC) e far poi astrazione da (BC); e togliere un segmento (AC) dal segmento (AC) significa fare astrazione dal segmento stesso (7, def. I, conv. 31).

Possiamo anche dire:

Togliere nella forma fondamentale un segmento (BC) da un segmento maggiore (AC) significa determinare un segmento (AB) di (AC) al quale sommato (BC) si ottenga (AC).

Def. I. Questa operazione la chiameremo in tal caso *sottrazione* del segmento (BC) dal segmento (AC), e la indicheremo così:

$$(AB) \equiv (AC) - (BC) \qquad (1)$$

usando per essa il segno — come per la sottrazione dei numeri (ind. II, 51).

Il segmento (AB) si chiama *differenza* o *resto.*

a. L'operazione del togliere un segmento (BC) da un segmento (AC) è a senso unico.

Difatti supponiamo si possano ottenere due segmenti (AB), (AB') diversi, sarebbe:

$$(AB)+(BC) \equiv (AC) \qquad (AB')+(B'C) \equiv (AC)$$

essendo $(B'C)$ per ipotesi identico a (BC). Vale a dire l'addizione alle forme

(AB), (AB') di (BC), $(B'C)$ (che è a senso unico (*a.* 72)) darebbe forme identiche, ciò che è assurdo (*g*, 73; *b'*, 61).

Oss. I. Per togliere il segmento (BC) dal segmento (AC) basta dunque percorrere il segmento (CB) nel verso opposto di (AC).

b. Dati due segmenti (AB) *e* $(A'B')$, *se il primo è maggiore, uguale o minore del secondo, sottraendo rispettivamente da essi i segmenti* (CB) *e* $(C'B')$ *uguali e diretti nello stesso verso di* (AB) *e* $(A'B')$, *la prima differenza è maggiore, uguale o minore della seconda.*

Siccome si ha:

$$(AB) \equiv (AC) + (CB), \qquad (A'B') \equiv (A'C') + (C'B')$$

se nel primo caso non fosse $(AC) > (A'C')$, il segmento (AB) non potrebbe essere maggiore di $(A'B')$ (*g*, 73; *b*, *c*, 61). Così negli altri due casi.

75. *a.* $(AB) \equiv (AB) + (BC) - (BC) \equiv (BC) - (BC) + (AB)$.

Difatti togliere una cosa già posta dà un risultato nullo (7 e 31) e quindi rimane (AB), aggiungendo ad essa e togliendo poi la parte (BC). Così aggiungendo a nessun segmento il segmento (AB), si ha (AB).

b. In un verso dato si ha $(AA) \equiv (AC) - (AC)$.

Difatti basta supporre che A e B coincidano in (1) del n. 74 (def. III, 57).

c. Il risultato dell'operazione $(AC) - (AC)$ *è indipendente dal verso in cui è percorsa la parte* (AC) *da* A.

Difatti dato (AC), nel verso opposto nel sistema a partire da A si può considerare un segmento (AC') identico ad (AC), (*a'*, 70), e poichè l'operazione $(AC) - (AC)$ è a senso unico, (*a*, 74, o *a*, 11,), ossia si percorre tutto (AC) nel verso opposto a partire da C, ne viene che i risultati di questa operazione in (AC') e (AC) sono identici (*a'''*, 60 o *b*, 74).

76. *Def. I.* Siccome $(AC) - (BC)$ dà in generale un segmento della forma fondamentale se è $(AC) > (BC)$, onde non fare alcuna eccezione (come pel numero zero), anzichè dire che $(AC) - (AC)$ non dà un segmento della forma (def. III, 62) diremo che dà *un segmento nullo o zero.* E scriveremo come pei numeri $(AA) \equiv (AC) - (AC) \equiv 0$ (1)

a. $(AC) - (AC) \equiv (A'C') - (A'C')$ *essendo* (AC) *e* $(A'C')$ *due segmenti qualunque dello stesso verso o di verso opposto.*

Difatti

$$(A'C') - (A'C') + (AC) \equiv (AC) \qquad (a, 75)$$

da cui

$$(A'C') - (A'C') \equiv (AC) - (AC). \qquad (b, 74)$$

Oss. I. Poichè tutti gli elementi sono identici (def. I, 57) e i segmenti finora considerati contengono almeno due elementi distinti (def. III, 62), mentre il segmento nullo non ha elementi, si ha:

L'elemento rappresenta il segmento nullo (*b*, 75 e (1)).

77. *Def. I.* Non tenendo conto della relazione di tutto e di parte (def. I, 61) possiamo riguardare l'operazione del togliere il segmento (BC) dal segmento (AC) come un'*unione* del segmento (CB) al segmento (AC) *conservando per questa nuova unione lo stesso segno,* percorrendo (AC) e (CB) nel loro verso, anche essendo (CB) di verso opposto ad (AC) (oss. I, 72).

$A \dots . B \dots . C$

Oss. I. Questa definizione si può anche giustificare considerando che (CB) sia diretto nello stesso verso di (AC), e quindi gli elementi di (BC) ripetuti due volte; e anzichè considerare come risultato dell'unione $(AC)+(CB)$, (CB) considerato dello stesso verso di (AC), si consideri come risultato soltanto il segmento (AB). *Naturalmente in questo caso l'unione non ci dà il tutto dalle parti*, poichè (AB) non è il tutto $(AC)+(CB)$ trascurando in esso la parte $(BC)+(CB)$, considerata quest'ultima nello stesso verso nel senso suindicato.

a. $(AC)+(CB) \equiv (AC)-(BC)$ (1)

essendo (CB) *di verso opposto ad* (AC) (def. I; def. I, 74).

a'. $(BC)+(CB) \equiv (BC)-(BC) \equiv o$ (2)

Basta far coincidere in (1) A con C

a''. $o+(CB) \equiv o-(BC)$ (3)

Basta far coincidere in (1) A con C ((1), 76).

Oss. II. La relazione (2) non significa però che (BC) e (CB) siano identici, perchè $(BC)+(CB)$ significa che da (BC) si toglie il segmento (BC) o si fa astrazione da (BC), il che dà $(BC) \equiv (BC)$, ma non già $(BC) \equiv (CB)$.

E se ciò s'intende tacitamente, si ammette una proprietà che noi dimostreremo in seguito.

Def. II. Ma siccome ad un segmento (AC) si può addizionare un segmento qualunque (CB) per l'estensione data a questa operazione, ciò vale anche se (CB) è diretto in verso opposto ad (AC), e quindi *estendiamo l'operazione del togliere supponendo che* (BC) *sia maggiore di* (AC), *e per risultato della sottrazione si ha il segmento* (AB) *percorso in tal caso nel verso* (CB).

b. Addizionare il segmento (BC) *ad un segmento* (AC) *o togliere il segmento* (CB) *da un segmento* (AC) *sono operazioni identiche.*

Ciò risulta immediatamente dall'estensione data alle operazioni dell'unire e del togliere (def. I e II).

b'. L'operazione dell'unire nel nuovo senso è pure a senso unico.

Ciò deriva immediatamente da b e dalle proprietà *a,* 72 e *a,* 74 e c', 68 e *a,* 65).

c. $+(CB) \equiv -(BC)$ (4)

Deriva dalla (3) e dal principio a''' del n. 60 e da b.

Oss. III. Il segno $+$ significa che (CB) deve essere percorso nel verso da C a B; il segno $-$ nel secondo membro dell'identità significa che (BC) deve essere percorso nel verso opposto da C a B.

Ind. I. Per indicare che un segmento (CB) isolato dal sistema deve essere percorso nel suo verso a cominciare quindi da C non occorrono segni speciali (ind. I, 64) e quindi possiamo porre senza ambiguità

$$+(CB) \equiv (CB) \quad (5)$$

Ma se vogliamo indicare il segmento (CB) nel suo verso collo stesso simbolo (BC) bisognerà premettere il segno $-$, affinchè sia determinato che bisogna percorrere il segmento (BC) da C verso B, ossia nel verso opposto. Abbiamo dunque:

c'. $(CB) \equiv -(BC)$ (4')

la quale deriva anche da (4) mediante la (5) (b, 9).

c''. $(AC)+(CB) \equiv (AC)+(-(BC)) \equiv (AC)-(BC)$

Basta sostituire in (1) in luogo di (CB), $-(BC)$ chiudendolo in parentesi.

Def. III. Finora abbiamo considerato segmenti consecutivi della forma diretti nel medesimo verso (def. VII, 62). Per la estensione data all'operazione dell'unire chiameremo consecutivi anche quei segmenti che hanno un estremo comune e sono di verso opposto.

d. Per l'addizione e la sottrazione dei segmenti consecutivi nella forma fondamentale vale la legge associativa.

Si ha cioè:

$$[(AB)+(BC)]+(CD)\equiv(AB)+[(BC)+(CD)] \qquad (6)$$

In questa formola è compreso anche il caso della sottrazione quando l'addizione si considera nel senso della def. I.

Difatti si ha:

$$(AB)+(BC)\equiv(AC)$$
$$(BC)+(CD)\equiv(BD)$$
$$(AC)+(CD)\equiv(AD)\equiv(AB)+(BD) \qquad (b'; e, 8 \text{ o } c, 60)$$

e. $(AB)+(BC)+(CB)\equiv o$

qualunque siano i tre elementi A, B, C.

Difatti dalle relazioni $(AB)+(BC)\equiv(AC)$, $(AC)-(AC)\equiv o$ (def. I, e def. I, 76) si ha:

$$(AB)+(BC)-(AC)\equiv o \qquad (b, 74)$$

Ma togliere il segmento (AC) equivale a sommare il segmento (CA) (b), dunque:

$$(AB)+(BC)+(CA)\equiv o \qquad (\text{def. I})$$

78. *a. Se si addiziona il segmento (BC) al segmento (AB) a partire da un elemento qualunque della forma fondamentale si ha l'identico risultato qualunque sia il verso in cui si eseguisce l'operazione.*

Supponiamo che (AB) e (BC) siano diretti nel medesimo verso (def. III, 67). L'elemento da cui si parte sia dapprima A stesso, e supponiamo che l'addizione del segmento (BC) al segmento (AB) a partire da A sia eseguita in uno dei versi della forma. Si ha $(AC)\equiv(AB)+(BC)$, e vi è un solo segmento (AC) che gode tale proprietà nel verso dato (b, 68; b, 69 e def. I, 70).

A partire da A nel verso opposto vi è un solo segmento $(AB_1)\equiv(AB)$ (def. I, 70, a' 70), così pure un solo segmento $(B_1C_1))\equiv(BC)$, e infine un solo segmento $(AC')\equiv(AC)$. Dico che $(AC')\equiv(AC_1)$.

Difatti (AC') deve essere come (AC) somma di due segmenti consecutivi dello stesso verso di (AC') (b, 60), il primo dei quali è uguale ad (AB), ossia (AB_1) e il secondo uguale a (B_1C'), ossia (B_1C_1) (b, 69 e def. I, 70).

Se il segmento (BC) è diretto in verso opposto ad (AB) vale un analogo ragionamento (g^{IV}, 73 opp. a, 69 e g^{IV}, 73).

Finalmente è indifferente eseguire l'operazione da qualunque elemento dato X della forma come elemento A, poichè il sistema a partire da A in uno o nell'altro verso è identico allo stesso sistema a partire da X nello stesso verso o nel verso opposto (a, o a', 70).

Il teorema è dunque pienamente dimostrato.

a'. Se ai membri di una identità fra segmenti consecutivi si addiziona o da essi si sottrae un medesimo segmento i risultati sono identici.

Cioè se: $(AB) + (BC) \equiv (A'B') + (B'C')$

si ha:

$(AB) + (BC) + (CD) \equiv (A'B') + (B'C') + (C'D')$, essendo $(CD) \equiv (C'D')$.

Difatti si ha

$(AC) + (CD) \equiv (A'C') + (C'D')$ (a; def. I e II, 77).

b. Si può sempre addizionare ad un segmento (AB) uno ed un solo segmento (BC) per ottenere un segmento dato maggiore o minore di (AB) dello stesso verso o di verso opposto.

Sia (AC) il segmento uguale al dato, dello stesso verso o di verso opposto di (AB) (a', 70; f''', 63). Dati gli elementi A, B, C il segmento (BC) è pienamente determinato ed è uno solo sulla forma fondamentale (ip. II, def. I, 70; c', 68 e a, 65), in modo che ogni altro segmento (BC') dello stesso verso di (BC) sommato ad (AB) dà un segmento diverso da (AC), se C e C' non coincidono (def. III, 57; a, 65 e f, 73).

§ 5.

Segmenti multipli e summultipli di un segmento dato della forma fondamentale, e loro simboli — Scala, unità, origine e campo di essa — Condizioni per l'uguaglianza delle scale — Uguaglianza relativa di due segmenti rispetto ad un'unità — Segmenti trascurabili rispetto ad un altro segmento.

79. *Oss. I.* Supponiamo per maggiore semplicità che la forma fondamentale sia aperta; passeremo poi facilmente al caso della forma chiusa.

Def. I. Se nella forma fondamentale aperta da un dato elemento A si considera un numero n (oss. V, 47) di segmenti consecutivi nel medesimo verso ed uguali ad un segmento dato (AB) dello stesso verso, il segmento risultante (AD) dall'addizione successiva degli n segmenti si chiama segmento *multiplo* del segmento dato (AB) *secondo il numero n*; e diremo che (AD) *contiene n volte il segmento (AB)*.

E diremo anche che un segmento (AC) è *multiplo secondo il numero n* di un altro segmento $(A'B')$ della stessa o di un'altra forma fondamentale (ip. I) se è somma di n segmenti consecutivi ad $(A'B')$.

Def. II. Il segmento (AB) o $(A'B')$ si chiama invece *summultiplo di (AC) secondo il numero n.*

Se (AC) contiene, due, tre, quattro ecc. n volte (AB), dicesi *doppio, triplo, quadruplo* ecc. *ennuplo* di (AB) o di $(A'B')$; e (AB), o $(A'B')$, *metà, terzo, quarto* ecc., *parte ennesima* di (AC).

Ind. I. Un segmento (AC) multiplo secondo il numero n di un segmento (AB) lo indicheremo col simbolo $(AB)n$.

Una parte ennesima di un segmento (AC), cioè (AB), la indicheremo col simbolo $\frac{(AC)}{n}$ od anche $(AC).\frac{1}{n}$, oppure $(AC)\frac{1}{n}$.

a. $(AB) \equiv \frac{(AC)}{n} \equiv (AC) . \frac{1}{n} \equiv (AC) \frac{1}{n}$.

Difatti $\frac{(AC)}{n}$, $(AC) . \frac{1}{n}$, $(AC) \frac{1}{n}$ indicando la stessa parte (AB) possono sostituirsi ad essa, cioè sono uguali fra loro (*b*, 9).

a'. $(AB)\, m \equiv \frac{(AC)}{n} m \equiv (AC) . \frac{1}{n} m \equiv (AC) \frac{1}{n} m \; (m \gtreqless n)$ (*a*; e *b*, 9).

Oss. I. $\frac{(AC)}{n} m$ significa che il segmento risultante da questa operazione contiene m parti ennesime di (AC).

Ind. II. Useremo anche il simbolo $(AC) \frac{m}{n}$ per indicare questo risultato.

b. $(AB)\, m \equiv \frac{(AC)}{n} m \equiv (AC) \frac{1}{n} m \equiv (AC) \frac{m}{n} \equiv (AC) \frac{m'}{n} \pm (AC) \frac{m''}{n}$, $(m = m' \pm m'')$.

Difatti $\frac{(AC)}{n} m$, $(AC) \frac{m}{n}$, $(AC) \frac{m'}{n} \pm (AC) \frac{m''}{n}$, rappresentano lo stesso segmento, e quindi possono sostituirsi l'uno all'altro (*b*, 9).

b'. Se $m \gtreqless n$ *si ha* $(AC) \gtreqless (AC) \frac{m}{n}$.

Difatti se $m = n$ si ottiene da (AC) lo stesso segmento (AC) (def. II e I). Se $m > n$ si ha $m = n + r$ (*g*, 50) e quindi $(AC) \frac{m}{n} \equiv (AC) \frac{n}{n} + (AC) \frac{r}{n}$ (*b*), dunque $(AC) \frac{m}{n} > (AC)$ (def. I, 72 e def. I, 61). Analogamente se $m < n$ (def. I, 74 e def. I, 61).

b''. $(AC) \frac{o}{n} \equiv o$.

Perchè ciò significa che non si considera affatto il segmento $\frac{(AC)}{n}$ (oss. I, 54).

c. $\frac{(AC)}{n} \frac{m}{n'} \equiv (AC) \frac{m}{nn'}$.

Supponiamo dapprima che la parte ennesima (AB) di (AC) sia multipla secondo il numero n' di un segmento (AB'). Si ha:

$$(AB') \equiv (AB) \frac{1}{n'} \qquad (a)$$

e poichè

$$(AB) \equiv \frac{(AC)}{n} \qquad (a)$$

si ha:

$$(AB') \equiv \frac{(AC)}{n} \frac{1}{n'} \qquad (b,\ 9).$$

E siccome (AB') è multiplo di (AB) secondo il numero n' si ha che (AC) è multiplo di (AB') secondo il numero nn' (def. I, II, 52), ossia

$$\frac{(AC)}{n} \frac{1}{n'} \equiv \frac{(AC)}{nn'} \equiv (AC) \frac{1}{nn'} \qquad (\text{ind. I e } a).$$

e quindi

$$\frac{(AC)}{n}\frac{1}{n'}m \equiv \frac{(AC)}{nn'}m \equiv (AC)\frac{1}{nn'}m \qquad \text{(ind. I; } b, \ 9).$$

ossia

$$\frac{(AC)}{n}\frac{m}{n'} \equiv \frac{(AC)}{nn'}m \equiv (AC)\frac{m}{nn'} \qquad (b).$$

c'. $\quad \dfrac{(AC)}{n}\dfrac{1}{n} \equiv (AC)\dfrac{1}{n^2} \quad$ (ind. II, 52).

Def. III. Il segmento $(AC)\dfrac{m}{n}$ si chiama anche frazione di (AC) [1]).

d. Se un segmento della forma fondamentale è maggiore, uguale o minore di un altro segmento della stessa forma o di forme fondamentali diverse, un segmento multiplo del primo è maggiore, uguale o minore di un segmento multiplo dell'altro secondo lo stesso numero.

Sia $(AB) \overset{<}{\underset{>}{\equiv}} (A'B')$, dico che qualunque sia n, essendo n un numero dato dalla seria (I) (46), si ha:

$$(AB)\,n \overset{<}{\underset{<}{\equiv}} (A'B')\,n.$$

Sappiamo intanto che

$$(AB) + (AB) \overset{<}{\underset{>}{\equiv}} (A'B') + (A'B') \qquad (g'', \ 73)$$

ossia

$$(AB)\,2 \overset{<}{\underset{>}{\equiv}} (A'B')\,2 \qquad \text{(ind. I)}.$$

Ora, se la proprietà ha luogo per un numero dato m si dimostra facilmente pel numero $m+1$. Difatti sia:

$$(AB)\,m \overset{<}{\underset{>}{\equiv}} (A'B')\,m$$

si ha:

$$(AB)\,m + (AB) \overset{<}{\underset{>}{\equiv}} (A'B')\,m + (A'B') \qquad (g \text{ e } g', \ 73)$$

ossia

$$(AB)\,(m+1) \overset{<}{\underset{>}{\equiv}} (A'B')\,(m+1). \qquad \text{(ind. I)}.$$

Ma il teorema vale per $m = 2$, dunque vale in generale per un numero n qualunque dato (c, 46 e l, 39).

d'. Se (AC), $(A'C')$ *sono multipli secondo il numero n dei segmenti* (AB), $(A'B')$, e $(AC) \overset{>}{\underset{<}{\equiv}} (A'C')$ si ha: $(AB) \overset{>}{\underset{<}{\equiv}} (A'B')$.

---

1) Qui si potrebbe definire il numero frazionario come supporremo fatto nei nostri fondamenti della geometria, senza occuparci però delle operazioni di essi.

Se è $(AC) \equiv (A'C')$, deve essere anche $(AB) \equiv (A'B')$, perchè altrimenti non potrebbe essere $(AC) \equiv (A'C')$ (d; b', 61). Se invece è $(AC) < (A'C')$ non può essere $(AB) \equiv (A'B')$, altrimenti sarebbe $(AC) \equiv (A'C')$ (d, b; 61). Se fosse $(AB) > (A'B')$ sarebbe $(AC) > (A'C')$ contro l'ipotesi (d; c, 61), dunque $(AB) < (A'B')$. Da ciò risulta nel terzo caso $(AB) > (A'B')$.

d''. *Se si hanno n segmenti consecutivi nel medesimo verso* (AA_1), (A_1A_2).... $(A_{n-1}A_n)$, *ed è:*

$$(AA_1) < (A_1A_2) < \dots\dots\dots < (A_{n-1}A_n)$$

si ha:

$$(AA_1)\,n < (AA_n) \ ; \ (A_{n-1}A_n)\,n > (AA_n).$$

È chiaro che

$$(AA_1)2 < (AA_2) \qquad (f,\ 73;\ \text{ind. I}).$$

Supposto vero il teorema per $n-1$ lo è per n (g', 73) ma esso è vero per $n=2$ dunque lo è per n qualunque (c, 46; l, 39). Analogamente si dimostra che

$$(A_{n-1}A_n)\,n > (AA_n) \qquad (g' \text{ e } g;\ 73;\ c,\ 46;\ l,\ 39).$$

e. *Se* $(AB) \equiv (AC)\dfrac{m}{n}$ *ed è* $(AB) \substack{<\\ \equiv \\ >} (AC)$ *si ha* $m \substack{<\\ \equiv \\ >} n$, *e reciprocamente.*

Difatti se $(AB) \equiv (AC)$ si ha $m = n$, perchè se $m = n - r$ si ha:

$$(AC)\frac{m}{n} \equiv (AC) - (AC)\frac{r}{n} \qquad (b \text{ e } b')$$

$$< (AC)$$

e quindi anche

$$< (AB) \qquad (\text{def. I, II, 61})$$

ciò che è assurdo (b', 61).

Analogamente se si suppone $m > n$; dunque $m = n$ (def. II, 49). Se è $(AB) < (AC)$, non può essere $m = n$ altrimenti sarebbe $(AB) \equiv (AC)$ (b', 79 e b, 61). Nè può essere $m > n$ perchè essendo $m = n + r$ si dimostra come precedentemente che $(AC)\dfrac{m}{n} > (AC)$, e quindi anche $(AB) > (AC)$ (def. I, II, 61), il che è assurdo (c, 61).

Analogamente si dimostra che se è $(AC) > (AB)$ deve essere $m > n$.

Inversamente, se $m = n$ si ha $(AB) \equiv (AC)$ (b', 79 e b', 61).

Se $m \gtrless n$, $(AC)\dfrac{m}{n} \gtrless AC$ per le dimostrazioni precedenti, dunque ecc.

80. *Def. I.* A cominciare da un elemento A nella forma fondamentale in un dato verso si consideri una serie illimitata di 1ª specie di segmenti consecutivi eguali ad un segmento dato (AB) (ip. II; a, 68; def. III, 39).

Questa serie si chiama *scala*, della quale (AB) si chiama *unità di misura* o *unità*, e l'elemento A, *origine*.

Oss. I. Noi non facciamo per ora alcuna ipotesi sul segmento (AB) stesso, tranne quella dunque che è un segmento dato limitato da due estremi A e B (def. III e IV, 62). Osserviamo pure che nelle citazioni dei teoremi in appoggio alle dimostrazioni ci riferiamo al solo sistema ad una dimensione omogeneo, o identico nella posizione delle sue parti, e tralascieremo di rammentare che per l'ipotesi II la forma fonda-

mentale è pure un sistema ad una dimensione identico nella posizione delle sue parti, e che questo è un sistema omogeneo (def. I, 70; def. I, 68).

Def. II. I secondi estremi dei segmenti della scala uguali all'unità li chiameremo elementi di *divisione* della scala.

Def. III. Per *campo* della scala intendiamo il segmento illimitato della forma fondamentale determinato da *tutti* i segmenti consecutivi della scala nel verso di essa.

Oss. II. La scala è una serie e il *campo* di essa è il tutto ordinato che da essa deriva (oss. 28). Quando non vi sarà luogo ad equivoci potremo sostituire l'una parola all'altra [1]).

Def. IV. Questo segmento, essendo la scala illimitata di 1ª specie (def. I), non ha un ultimo elemento (def. III 39).

a. Il campo della scala è maggiore di ogni segmento limitato (BC) *i cui estremi sono dati e appartengono ad esso, e di ogni suo segmento illimitato il cui primo estremo non conincide coll' origine.*

Supponiamo che B coincida dapprima con A. È chiaro che (AC) non è tutto il campo della scala, perchè la serie che lo determina è illimitata (def. I, e def. III), e quindi se $(C....X....)$ è la parte rimanente, si ha che il campo della scala è $(AC) + (C....X....)$, e quindi è maggiore di (AC) e anche di $(C....X....)$ (def. I, 61). Se B non fosse A, il campo della scala sarebbe invece:

$$(AB) + (BC) + (C....X....)$$

e poichè è maggiore di (AC) ed (AC) è maggiore di (BC), il campo della scala è anche maggiore di (BC) (d, 61).

b. I segmenti determinati dall' origine successivamente cogli elementi di divisione della scala o i segmenti consecutivi stessi uguali all' unità (AB) *corrispondono ai numeri della serie* (I) (def. I; b, def. III, 46; i, 39; a e b, 43).

b'. Gli elementi di divisione della scala a partire dall' origine corrispondono univocamente e nel medesimo ordine ai numeri della serie (I).

Difatti essi corrispondono univocamente e nello stesso ordine ai segmenti consecutivi della scala uguali ad (AB) (c', 68; b e oss. I, 64) i quali corrispondono univocamente e nello stesso ordine ai numeri della serie (I) (b), dunque il teorema è dimostrato (f, 42).

Ind. I. Possiamo dunque indicare gli elementi di divisione della scala a partire dall'origine coi numeri della serie (I), e quindi gli elementi di divisione della scala *rappresentano* sulla forma fondamentale i numeri della serie (I).

c. L' origine rappresenta il numero zero.

Difatti si ha $(AB - (AB) \equiv o$, e se (AB) rappresenta l'unità del numero (def. I, 45) si ha $1 - 1 = o$ (b, 54). D'altra parte si ha che l'elemento rappresenta il segmento nullo (oss. I, 76), dunque l'elemento A rappresenta il numero o.

Oss. III. La rappresentazione degli elementi di una serie mediante i numeri di (I) non significa già che i segmenti consecutivi siano uguali, come succede nella scala della forma fondamentale. Rappresentando (AB) l'unità 1 del numero, ogni multiplo di (AB) secondo il numero n, cioè $(AB)\,n$ viene rappresentato sulla scala

---

1) Vedi nota 2, 62.

dal numero n (def. I, ind. I, 79). E quindi in siffatta corrispondenza i segmenti corrispondenti ai numeri godono le stesse proprietà dei numeri di (I) rispetto all'addizione e sottrazione (considerate queste nel senso dei numeri 72-73). In tal caso la legge commutativa dell'addizione dei numeri vale senz'altro per l'addizione dei segmenti consecutivi della scala (i, 48). Ciò non significa però che tale proprietà abbia luogo anche per l'addizione di due segmenti consecutivi qualunque nel caso che la forma oltre ai segmenti uguali all'unità (AB), o multipli di (AB), ne contenga anche altri.

Ind. II. Se esiste un segmento ennesimo (AB') di (AB), ogni segmento della scala uguale ad (AB) è composto di n parti uguali ad (AB') (def. I e II, 79 e b, 60), e potremo indicare queste parti successivamente coi segni:

$$\frac{1}{n}, \frac{2}{n} \ldots\ldots \frac{n-1}{n}, \frac{n}{n}=1, \frac{n'}{n} \ldots\ldots \frac{m}{n} \ldots\ldots \qquad (b, 79).$$

d. Se (CD) è uguale ad un segmento limitato da due elementi dati del campo della scala di unità (AB) ed è $(AB) < (CD)$, vi è sempre un numero n della serie (I) tale che:

$$(AB)\,n \underset{<}{=} (CD) < (AB)\,(n+1)$$

È da osservare intanto che gli estremi del segmento a cui è uguale (CD) sono per dato elementi dati del campo della scala; e poichè questo è determinato da tutti i segmenti consecutivi della scala stessa (def. III), i suoi elementi dati o sono elementi di divisione (def. II) o appartengono a due segmenti consecutivi (def. I, 62 e II, 29 e def. I, 27); imperocchè se appartenessero ad un solo segmento uguale ad (AB) non sarebbe $(AB) < (CD)$ (d, 73 e def. I, II, 61).

Sia (AA') un segmento della scala uguale al segmento dato (CD) (def. I, 68 e c, 60); l'estremo A' essendo un elemento dato della scala apparterrà ad un segmento dato di essa, e quindi o sarà un elemento di divisione oppure sarà compreso fra due estremi di un tale segmento. Questi estremi corrisponderanno a due numeri successivi n e $n+1$ determinati della serie (I) (b'), e quindi si avrà:

$$(AB)\,n \underset{<}{=} (AA') < (AB)\,(n+1)$$

oppure

$$(AB)\,n \underset{<}{=} (CD) < (AB)\,(n+1) \quad \text{(def. II, 61).}$$

81. *a. I campi di due scale rispetto a due unità uguali sono uguali relativamente alla serie dei segmenti delle due scale.*

Difatti si può stabilire una corrispondenza d'identità fra i segmenti consecutivi uguali all'unità nell'una e i segmenti consecutivi uguali nell'altra scala, facendo corrispondere le origini fra loro (def. I, 60; d, 79), e quindi rispetto alla disposizione dei segmenti delle scale in serie, i campi di esse sono uguali (b' e oss. IV, 61).

b. Date due scale colle unità (AB) e $(A'B')$ tali che

$$(A'B') < (AB)$$
$$(A'B')\,n > (AB)$$

essendo n un numero qualunqne della serie dei numeri naturali, i campi delle due scale sono uguali in generale rispetto alla serie dei segmenti delle due scale.

Siano A e A' le origini delle due scale. Nella prima si può considerare a partire da A nel verso della scala un segmento (AC) identico ad $(A'B')$ (a', 70), e quindi per le condizioni del teorema si ha:

$$(1) \qquad (AC) < (AB)$$
$$(2) \qquad (AC)n > (AB) \qquad \text{(def. II, 61).}$$

Dalla (1) si ha qualunque sia m

$$(AC)m < (AB)m \qquad (d,\ 79)$$

dunque ogni segmento del campo della scala di (AC), a partire dall'origine, è un segmento del campo della scala di unità (AB) (def. III, 80). Ma si ha dalla (2)

$$(AC)n.m > (AB)m \qquad (d,\ 79).$$

dunque ogni segmento del campo della scala di (AB) è segmento della scala di (AC). Ogni elemento dell'una è un elemento dell'altra e quindi i campi delle due scale di unità (AB), (AC) coincidono (def. III, 80; def. III e I, 62; b, 29), e la loro uguaglianza è assoluta (def. III, 9).

Ma pel teorema (a) relativamente alla disposizione in serie, la scala di unità (AC) è identica alla scala di unità $(A'B')$ sulla stessa forma o in forme fondamentali diverse (ip, I; c, oss. V, 60 e conv. 69), dunque il teorema è dimostrato.

Dalla dimostrazione si ottiene dunque anche:

b'. Date due scale colle unità (AB) *e* $(A'B')$ *tali che siano soddisfatte le relazioni* (1) *e* (2) *sulla medesima forma fondamentale colla stessa origine e nel medesimo verso, esse coinctdono* (b; def. V, 57).

b''. Date due scale, se l'unità dell'una è multipla dell'altra, o se l'una contiene un numero m di summultipli dell'altra, i campi delle due scale sono in generale uguali rispetto alle serie dei loro segmenti.

Perchè le loro unità (def. I, 80) soddisfano alle condizioni del teor. b. Difatti se l'unità (AB) dell'una è identica all'unità (AB') dell'altra, b'' è il teor. a.

Se $(AB) \equiv \frac{(AB')}{n} m < (AB')$ (def. I, II, 79), scegliendo m' in modo che sia $mm' > n$ (e a tale scopo basta prendere almeno $m' = n+1$ (def. I, 52)), si ha $(AB)m' \equiv \frac{(AB')}{n} mm' \equiv (AB') \frac{mm'}{n} > (AB)$, ($b$, b', 79).

Se invece è $\frac{(AB')}{n} m > (AB')$, è pure $m > n$ (e, 79) e prendendo il multiplo di (AB') almeno secondo il numero m, si ha $(AB')m > \frac{(AB')}{n} m \equiv (AB)$.

c. Data una scala di unità uguale ad (AD) *sulla forma fondamentale ed un altra di unità* $(A'B)$ *e di origine* A', *se non vi è un numero* n *tale che*

$$(AD)n < (A'B) \quad \textit{se è } (AD) < (A'B)$$

oppure che

$$(A'B)n < (AD) \quad \textit{se è } (AD) > (A'B)$$

il campo della scala di unità (AD) *non è uguale a quello di unità* $(A'B)$.

Possiamo supporre che le scale di unità (AD) e (AB) abbiano la stessa origine nella stessa forma fondamentale e nel medesimo verso (b, 70; ip. I e b, 60). Nel primo caso nel campo della scala di (AD) non vi è nessun segmento $(AD)n$ che sia maggiore di (AB) qualunque sia il numero n della serie (I), e

quindi anche di qualunque segmento (AC) che soddisfa alle condizioni del teorema b rispetto ad (AB), ed è minore di (AB). Difatti se essendo

$(AC)\, m \underset{>}{\equiv} (AB)$ fosse $(AD)\, n \underset{>}{\equiv} (AC)$ si avrebbe $(AD)\, n\, m \underset{>}{\equiv} (AB)$ (d, 79 e d, 61)

ciò che per dato non è. E chiaro dunque che la serie illimitata di 1ª specie di segmenti consecutivi uguali ad (AD) e che costituiscono il campo della scala di unità (AD) (def. III, 80) non ha elementi nel campo della scala di origine A e di unità (AB). Il teorema è dunque in questo caso dimostrato (a; c e oss. V, 60).

Nel secondo caso si scorge invece che (AD) non è interamente nel campo della scala di unità (AB), e quindi anche in quello di un segmento (AC) maggiore di (AB) dello stesso verso di (AB), che soddisfa alle condizioni del teor. b rispetto ad (AB) (b'). Il teorema vale anche in questo caso per (AD) e per ogni segmento ad esso uguale (a; c e oss. V, 60).

c'. Se il campo della scala di unità $(A'B')$ è uguale a quello di (AB) vi è sempre un numero n tale che

$$(A'B')(n-1) \underset{<}{\equiv} (AB) < (A'B')n, \text{ se } (A'B') < (AB).$$

Il segmento (AB) è uguale ad un segmento che soddisfa alle condizioni del teor. b' rispetto ad $(A'B')$, altrimenti il campo della scala di unità (AB) non sarebbe uguale a quello di unità $(A'B')$ nè in senso assoluto nè relativamente alla serie dei segmenti delle due scale (c), dunque il teorema è dimostrato (d, 80).

Def. I. Diremo che un segmento *genera il campo di una scala* di unità (BC) quando preso un segmento (BD) identico al dato e nello stesso verso di questa scala (b', 69), il campo di essa coincide col campo della scala di unità (BD) (def. V, 57).

d. Un segmento che genera il campo di una scala di un'unità qualunque (BC) soddisfa alla condizione del teor. b rispetto a (BC); e inversamente.

Difatti possiamo considerare da B nel verso della scala un segmento (BD) uguale al dato (b', 69). Il campo della scala di unità (BD) coincide per dato con quello di unità (BC) (def. I), e quindi (BD) non può soddisfare alle condizioni del teor. c, dunque soddisferà a quelle del teor. b (IV, 8).

Inversamente, se il segmento dato soddisfa alla condizione del teor. b, (BD) genera il campo della scala di unità (BC) (b' e def. I).

d'. Ogni segmento che non genera il campo di una scala di un'unità qualunque (BC) soddisfa all'una o all'altra condizione del teor. c rispetto a (BC), e reciprocamente.

Difatti il segmento dato non soddisfa alla condizione del teor. b rispetto a (BC), e quindi esso, od un segmento ad esso uguale, deve soddisfare ad una di quelle del teor. c (d, 79; IV, 8).

e. Se (AD) soddisfa alla condizione:

$$(AA_1)\ (n-1) \underset{\equiv}{<} (AD) < (AA_1)\, n$$

si ha pure:

$$(A_1A)(n-1) \underset{\equiv}{<} (DA) < (A_1A)\, n$$

Sia costruita la scala di origine A e di unità (AA_1). Si ha:

$$(DA) \geqq (A_1A)(n-1) \equiv (A_{n-1}A)$$

ed anche

$$(DA) < (A_1A)\,n \equiv (A_nA) \qquad (c,\ 73 \text{ e def. I, } 61).$$

f. Se A e B sono due elementi dati nel campo di una scala, il campo della scala a cominciare da A nel verso di (AB) è uguale alla parte dello stesso campo a partire da B rispetto ad una serie di segmenti consecutivi di esso.

Difatti considerando A e B come origini di due scale nello stesso verso e colla stessa unità (AB), i campi di queste due scale sono uguali rispetto alla disposizione in serie (a). Ma ogni elemento X del campo della scala di origine B è un elemento del campo della scala di origine A, perchè se non esistesse un numero n tale che fosse $(AB)\,n > (AX)$ non sarebbe neppure $(BC)\,n > (BX)$, essendo $(BC) \equiv (AB)$, e perciò X non potrebbe nemmeno appartenere al campo della scala di origine B (d, 80).

La uguaglianza ha luogo relativamente alla disposizione in serie (b'', oss. IV, 60). Il campo della scala di origine A contiene come *parte* quello di origine B (def. III, 80; def. II, 27) il che esclude l'uguaglianza assoluta $A \equiv B$, altrimenti vi sarebbe la contraddizione «*A è e non è A*» (III, 8 e oss. III, 9).

Def. II. Essendo $(AB) + (B....X....) \equiv (B....X....)$ rispetto alla disposizione in serie dei segmenti dei campi delle scale di origine A e B e di unità (AB), significa che si può far astrazione da (AB) (7). Diremo perciò che (AB) è *nullo* o *trascurabile rispetto a* $(B .... X)$.

f'. Un segmento limitato (AB) qualunque del campo di una scala, o un segmento ad esso uguale, è trascurabile rispetto al segmento rimanente a cominciare da B nel verso della scala stessa.

Difatti se anche l'unità è $(A'B')$, si può considerare come unità della scala rispetto al campo di essa il segmento (AB) stesso se soddisfa alla condizione del teor. b, e quindi è trascurabile rispetto alla parte rimanente (f, def. II). Se invece non soddisfa a quella condizione, esso non può essere maggiore di ogni segmento limitato della scala e quindi anche del campo di essa, perchè i suoi elementi appartengono per dato a questo campo (def. I, 61); dunque deve essere minore di ogni segmento (AB') che genera la scala (d'). Ma poichè (AB') è trascurabile, a maggior ragione sono trascurabili le sue parti, perchè se $(AB') \equiv (AB'') + (B''B')$ (def. I, 72) si ha $(AB') > (AB'')$ e $> (B''B')$ (def. I, 61), e se B' coincidesse con A e B'' fosse distinto da A, sarebbe $(AA) \equiv$ o (def. I, 76) $> (AB'')$, il che è assurdo (def. I, e c, 61).

Oss. I. Osserviamo che i teoremi b, b', b'', c, c', d, d' ed e valgono *subordinatamente* all'esistenza sulla forma fondamentale di segmenti summultipli di un segmento dato (AB) o di segmenti minori o maggiori di (AB) che non siano nè summultipli nè multipli di esso.

Oss. II Osserviamo ancora che siccome finora abbiamo considerata la scala in un verso determinato a partire da un elemento dato (def. I, 80), così valgono gli stessi teoremi nel solo sistema omogeneo (def. I, 68). Da ciò si vede che nella definizione di questo sistema, se esso è dato da una sola scala di segmenti uguali a un dato segmento (AB), e che se $(AD) < (AB)$, (AD) non soddisfa al teorema c, basta considerare il solo segmento (AB). Colla definizione così ridotta si dimostrano il teor. a e i teor. b, c, (dapprima pei soli segmenti uguali ad (AB) o minori di (AB)) e c' del

n. 68. Si dànno poi le definizioni del n. 79 sui multipli e summultipli dei segmenti coi teor *a*, *a'*, *b*, *b''*, *c* e *c'* dello stesso numero, e si assoggettano i segmenti del sistema alla condizione del teor. *b* di questo numero, la quale esprime precisamente l'assioma d'Archimede. Dopo di che per l'applicazione ripetuta del teor. *c*, 68 (colla restrizione suindicata) si dimostra il teor. *b* per ogni segmento limitato del sistema Si dimostrano nello stesso modo i teor. *c''*, *c'''* del n. 68; *a*, *b*, *b'*, *c*, *d* del n. 69.

Così basta limitare la definizione del sistema identico nella posizione delle sue parti (def. I, 70) non soltanto ad un solo elemento *A*, ma eziandio ad un solo segmento (*AB*) con un estremo in *A*, in modo cioè che nel sistema vi sia un altro segmento (*AB'*) nel verso opposto identico ad (*AB*); dimostrando poi il teor. *a'* e quindi i teor. *a''* e *a* del n. 70. Si dimostrano nello stesso modo i teor. dei n. 72, 73, 74, 75, 76, 77, 78; i teor. *b'*, *d*, *d'*, *d''* ed *e* del n, 79, e quelli del n. 80, tralasciando i teor. *c*, *c'*, *d* *d'* di questo numero che sono in tal caso inutili, dando i teor. *b*, *b'* per due segmenti (*AB*), (*A'B'*) qualunque che per l'assioma d'Archimede soddisfano già alla condizione del teor. *b* [1]).

Si potrebbe limitarsi al solo sistema omogeneo ad una dimensione dando la definizione del sistema ad una dimensione identico nella posizione delle sue parti dopo aver dedotto le proprietà del sistema omogeneo continuo (vedi nota n. 99) tralasciando frattanto le parti di quei teoremi, ad es. dei precedenti, che riguardano il sistema identico nella posizione delle sue parti.

Limitandosi al solo campo di una scala, la via scientificamente migliore è quella qui indicata per non introdurre nelle definizioni proprietà sovrabbondanti, che si possono e quindi si devono dimostrare mediante le premesse.

---

1) Mantenendosi nel campo di una scala (come si deve fare per ragioni didattiche in un trattato di geometria elementare per uso delle scuole liceali, almeno nella planimetria) la definizione del sistema identico nella posizione delle sue parti e quindi anche del sistema omogeneo bisogna modificarla in questo senso — aggiungendo che non vi sono altri segmenti fuori del campo della scala, o in altre parole aggiungendo l'assioma che se (*AB*) e (*CD*) sono due segmenti rettilinei, e (*AB*) $<$ (*CD*) si ha sempre un numero *n* tale che (*AC*) *n* $>$ (*CD*). (Vedi pref.).

Il sig. *Stolz*, per quanto sappiamo, è stato il primo a richiamare l'attenzione dei matematici sopra questo assioma che ha chiamato giustamente assioma d'Archimede che il grande siracusano diede nel suo celebre trattato: De Sphaera et cylindro (O. *Stolz* zur Geometrie der Alten, insbesonders ueber ein Axiom des Archimedes. Math. Annalen Vol. XXII). (vedi nota n. 90 e nota 2 n. 97),

CAPITOLO VI.

Segmenti finiti, infiniti, infinitesimi, indefinitamente piccoli e indefinitamente grandi. Numeri infiniti.

§ 1.

Ipotesi (III) sull' esistenza di elementi fuori del campo di una scala — Segmenti finiti, infiniti e infinitesimi — Segmenti finiti variabili — Campo finito di una scala — Ipotesi (IV) sulla determinazione dei segmenti infiniti — Infiniti e infinitesimi di diversi ordini — Loro proprietà — Campi infiniti — Elementi limiti all' infinito di diversi ordini.

82. *Oss. I.* Non abbiamo fatto alcuna ipotesi pel segmento (AB), unità della scala (def. I, 80). Per le ipotesi I e II consideriamo la forma fondamentale come già data e assoggettata alla definizione del sistema identico nella posizione delle sue parti; la quale definizione è indipendente dalle proprietà della serie che sono nel sistema stesso. La serie che determina la scala (def. I, 80) è illimitata di 1ª specie; d'altra parte possiamo immaginare che esistano delle serie limitate e illimitate che contengano come parte una serie illimitata di 1ª specie (def. III, 39, e def. I, 27, *a*, *b*, 37), dunque siamo condotti *spontaneamente* da questa considerazione ad assoggettare la forma fondamentale alla seguente condizione:

Ip. III. **In un verso della forma fondamentale esiste almeno un elemento fuori del campo della scala rispetto ad ogni segmento limitato come unità.**

a. Vi sono più elementi distinti fuori del campo di una scala.

Perchè dato uno di questi elementi per l'ipotesi II esso è estremo di due segmenti uguali ad un segmento dato e qualunque della scala stessa (def. I, 68).

b. L' ipotesi III non contraddice alla definizione e alle proprietà del sistema identico nella posizione delle sue parti, e non deriva da esse.

Siccome intanto l'ipotesi riguarda la forma in un solo verso dato indipendentemente dal verso opposto, così basta che non contraddica alla definizione del sistema omogeneo per non contraddire a quella del sistema identico nella posizione delle sue parti (def. I, 70). Ora, come ho osservato più su, la definizione del sistema omogeneo è indipendente dalla costruzione della scala, vale a dire non è detto che il sistema sia dato a partire da un dato elemento di esso da una sola serie illimitata di 1ª specie di segmenti uguali, e che non possa essere composto da una serie di serie che a partire da ogni loro elemento siano illimitate di 1ª specie (def. III, 39; *b*, 37). Il teor. *a* del n. 68 ci dice appunto che il sistema omogeneo è illimitato nei suoi due versi, ma non dice che il

sistema sia dato da una sola serie illimitata di 1ª specie, come non stabilisce il contrario. Rimane a far vedere che si può applicare la def. I, 68, che riguarda i soli segmenti limitati (def. IV, 62), anche quando il sistema omogeneo si compone di più serie illimitate.

Dato un gruppo ordinato N, che a partire da un suo elemento qualunque dato è illimitato di 1ª specie (def. III, 39 e oss. 28), e che è dato da segmenti consecutivi uguali nell'ordine di esso, possiamo considerare N come un nuovo elemento dato (18), e poi un altro di questi elementi N' identico a N, fuori di esso e indipendente da esso e non avente col primo alcun elemento fondamentale comune (def. I, 57 e a', 37). Possiamo inoltre considerare le forme N e N' nell'ordine NN' (14). Nella serie NN' (19), N' segue la serie N (14), e quindi ogni elemento di N precede N', che è quanto dire che ogni elemento di N precede ogni elemento di N', od ogni elemento di N' segue N e quindi ogni elemento di N (def. II, 39 e 21). Relativamente ai segmenti limitati di N o N' la def. I, 68 è soddisfatta.

Poichè scelti gli elementi A e B fondamentali si può immaginare senza contraddirsi la serie di tre elementi ABC tali che $(AB) \equiv (BC)$, così possiamo immaginare una serie di gruppi identici N, N', N'' non aventi alcun elemento comune tale che $(NN') \equiv (N'N'')$. Ad ogni segmento limitato (AA') avente i suoi estremi A e A' rispettivamente in N e N' sarà uguale un segmento $(A'A'')$ col secondo estremo in A'' (b, 60), imperocchè in una corrispondenza d'identità fra (NN'), $(N'N'')$, N corrisponde ad N' e all'elemento A si può far corrispondere all'elemento A' e A' all'elemento A''. Nel sistema a partire da un suo elemento vi è un solo segmento uguale ad un segmento dato nel verso di esso (b, 68); questa proprietà ha ancora vigore nel sistema (NN'). In questo modo sono soddisfatti il teor. b del n. 60 e quelli del n. 61 pei segmenti limitati.

Non ci occupiamo dei segmenti illimitati di N e N' nel confronto fra i segmenti limitati, poichè i primi sono determinati da segmenti limitati e la loro uguaglianza relativa, come ad es.: dei segmenti illimitati $(AB....X....)$, $(B....X....)$ di N è data dall'uguaglianza dei segmenti limitati che li determinano (b'', 60). Se in due segmenti (AA'), (BB') ai segmenti limitati uguali nell'ordine dato dell'uno corrispondono univocamente e nel medesimo ordine segmenti uguali dell'altro siamo giustificati di dire che i due segmenti sono identici, perchè se non fossero tali non avrebbe luogo la suddetta proprietà, come abbiamo sopra osservato.

Essendo N', indipendente da N la serie NN' è indipendente da N, cioè non è data da N senza l'atto che pone N', dunque la proprietà dell'ip. III non deriva dalla sola N 1).

---

1) Abbiamo una prima rappresentazione della serie (NN') considerando la retta percorsa in un dato verso, ad es. da sinistra verso destra, e poi considerando la stessa retta percorsa nello stesso verso, ma distinguendola in questa seconda operazione con N', supponendo perciò che i punti di N' siano distinti da quelli di N. Si possono considerare NN' anche come due rette parallele nel senso Euclideo, in modo che dopo aver percorsa una retta in un dato verso si percorra N' nello stesso verso, e la distanza di due punti delle due rette si misuri nel verso dato percorrendo le due rette stesse. Vedi anche la rappresentazione geometrica alla nota n. 105.

La serie di segmenti limitati delle serie $NN'N''$...., soddisfa alle prime 7 proprietà che il sig. *Peano* dà come assiomi per la serie dei numeri naturali (l. c., § 1 — vedi la nostra nota n. 45). Se si limita N ad un primo elemento, la serie $NN'N''$ . . soddisfa anche alla proprietà 8.ª

Def. I. Diremo che la forma fondamentale si *estende al di là* di ogni campo di scala esistente in essa.

Ind. I. Per indicare un elemento dato fuori del campo di una scala useremo spesso il segno ∞ unito a qualche lettera.

c. Dato un segmento con un estremo nel campo di una scala, se ha l'altro estremo fuori di questo campo e nel verso di essa, esso è maggiore di ogni segmento limitato a due elementi dati del campo della scala; e reciprocamente.

Sia A l'origine, (AA_1) l'unità, A_∞ un elemento fuori del campo della scala nel verso di essa. Non vi può essere un numero n tale che sia $(AA_1)n > (AA_\infty)$, altrimenti A_∞ apparterrebbe al campo della scala stessa (b', 81). E se (AD) è un segmento qualunque limitato del campo della scala di unità (AA_1), il campo della scala di unità (AD) coincide con quello di unità (AA_1) (b', 81), e non vi è alcun numero n tale che $(AD)n$ sia maggiore di (AA_∞). Se il primo elemento del segmento dato non è A ma un altro elemento D qualunque del campo della scala, considerando a partire da D nel verso di essa un segmento qualunque (DD') limitato da un altro elemento D' della scala di unità (AA_1), il campo della scala di unità (DD') e di origine D è uguale al campo della scala di unità (AA_1) di origine A, rispetto alla corrispondenza univoca e nel medesimo ordine dei loro segmenti (d, 80; b, f, b', 81); e poichè (DA_∞) è maggiore di (DD') (def. I, 61) la prima parte del il teorema è dimostrata.

Inversamente se (AB) è maggiore di ogni segmento limitato del campo della scala, B non può essere nel campo di essa (d, 80).

c'. Ogni segmento che serve a generare il campo di una scala è minore di ogni segmento avente un estremo nel campo della scala e l'altro estremo fuori di esso e nel verso della scala.

Perchè il primo segmento è uguale ad un segmento del campo della scala col primo estremo nell'origine di essa (def. I, 81), e quindi il secondo segmento è maggiore del primo (c; def. I, 61).

Def. II. Per distinguere i segmenti limitati a due estremi dati che generano il campo di una scala di unità qualunque (AA_1) (def. 81) da quelli che non lo generano e sono maggiori di essi, chiameremo *finiti* i primi e *infiniti attuali* o *infiniti* i secondi rispetto all'unità data. Se i secondi sono invece minori dei primi si chiamano *infinitesimi* o *infinitamente piccoli attuali*, o *infinitesimi* soltanto, rispetto alla stessa unità. Ad es. l'unità (AA_1) o un segmento qualunque limitato di una scala data è infinitesimo rispetto ad un segmento infinito (AA_∞) (d', 81).

Def. III. L'ipotesi III la chiameremo *ipotesi di esistenza dei segmenti infiniti limitati* [1]).

1) Questa ipotesi soddisfa a tutte le condizioni di una ipotesi matematicamente possibile, che si riducono in fondo non a considerazioni d'ordine filosofico sull'origine delle idee matematiche, ma all'*assenza di ogni contraddizione*. (Vedi pref.).

Rispetto poi alla rappresentazione di un segmento infinito, non l'abbiamo certamente se ci teniamo nel campo della rappresentazione dei segmenti finiti successivamente uguali; ma se usciamo da questa serie possiamo rappresentarci, come vedremo, il segmento infinito limitato tale e quale come un segmento finito. Succede qui una cosa analoga a quella che succede per la serie di segmenti sempre crescenti percorsa dalla punta del proiettile che da un punto A va a colpire un punto B. (Vedi 5 nota n. 55).

d. Un segmento infinito (o infinitesimo) rispetto ad un segmento dato (AA_1) *è maggiore (minore) di qualunque altro segmento* (BC) *che soddisfa alla condizione del teor. b,* 81 *rispetto ad* (AA_1).

Perchè il segmento infinito (o infinitesimo) rispetto ad (AA_1) soddisfa anche all'una o all'altra condizione del teor. *c*, 81 (*d*, 81 e def. II) dunque anche rispetto a (BC) (*d* o *d'*, 61).

d'. Un segmento infinito (o infinitesimo) rispetto ad un segmento dato è infinito (o infinitesimo) rispetto a qualunque altro segmento finito col dato.

Perchè un segmento finito col dato (AA_1) genera il campo della scala di unità (AA_1) (def. II) ed è uguale ad un segmento di questo campo (def. I, 81), che soddisfa alla condizione del teor. *b*, 81 rispetto al segmento (AA_1); dunque *d'* (*d*).

e. Ogni segmento maggiore di un segmento infinito è pure infinito, ed ogni segmento minore di un infinitesimo è pure infinitesimo (def. II; *d'* e *c*, 81; *d*, o *d'*, 61 e def. I, 81).

f. Un segmento è finito, o infinito o infinitesimo rispetto ad un altro, e ognuno di questi tre casi esclude gli altri due.

Siano (AB), $(A'B')$ i due segmenti. Se sono uguali essi sono finiti (def. II; def. 81). Se è ad es. $(AB) < (A'B')$, o (AB) soddisfa alla condizione del teor. *b*, 81, o non vi soddisfa (IV, 8). Nel primo caso (AB) e $(A'B')$ sono finiti (*d'*, 81 e def. II); nel secondo caso $(A'B')$ è infinito rispetto ad (AB), e (AB) infinitesimo rispetto ad $(A'B')$ (*d'*, 81 e def. II).

Se sono finiti, l'uno di essi non può essere nè infinito nè infinitesimo ri-

---

Anche l'osservazione ci conduce del resto ad ammettere il segmento infinito limitato (che bisogna distinguere dall'infinito comunemente usato e in fondo a torto così chiamato, per indicare una grandezza finita variabile che diventa maggiore di ogni grandezza finita data). Osservo che se a è un oggetto rettilineo reale, per es. lo spigolo superiore dell'architrave di un lungo porticato ed in C vi è il nostro occhio, la scala di a, segnata per esempio dagli assi delle colonne, apparentemente non è una scala di segmenti uguali; e se a' è ad es. l'intersezione del piano visuale Ca con una lastra di vetro verticale, la scala in a' e quella in a producono geometricamente la stessa immagine sulla retina, cioè a e a' sono apparentemente coincidenti. Ma la scala in a' converge verso il punto O', punto d'intersezione del raggio parallelo condotto da C allo spigolo a. Se Tizio si muove misurando la scala in a, la sua immagine T' va sempre impiccolendosi. Mano mano che Tizio si allontana, se si muove in un mezzo perfettamente omogeneo, è convinto che il suo corpo rimane sempre lo stesso anche se ciò in realtà non succedesse. Però noi apprezziamo la sua grandezza dalle successive immagini sulla lastra di vetro. Ora, se Tizio può immaginarsi che per noi la scala a ha apparentemente un punto O' fuori di essa, egli sarà condotto evidentemente ad ammettere *geometricamente* che anche la scala a abbia un punto reale fuori di essa. Ma aggiungiamo subito, come abbiamo avvertito nella prefazione, che l'infinito attuale, e quindi anche l'infinitesimo attuale, hanno per noi un'esistenza puramente astratta, e reale in quanto sono un prodotto della nostra mente e derivano da un'ipotesi logicamente possibile: che perciò non vogliamo con questo sostenere l'ipotesi dell'esistenza materiale dell'infinito nell'ambiente esterno, come non sosteniamo la realtà materiale del nostro spazio generale. Ma se esistessero per un altro essere colla stessa logica nostra, le sue considerazioni sull'infinito non sarebbero diverse dalle nostre. È da osservare poi ancora nel caso precedente, che l'oggetto rettilineo è un sistema identico nella posizione delle sue parti, e che quindi rendendo le proprietà della retta come per la forma fondamentale indipendenti dal concetto di scala, non solo vi è alcuna contraddizione a supporre che essa sia sempre un sistema identico nella posizione delle sue parti, ma sarebbe già un'ipotesi meno giustificata quella opposta.

a A A_1 A_2 A_3 O

a' A' A'_1 A'_2 A'_3

Le dimostrazioni di alcuni matematici contro i segmenti infiniti limitati a due estremi non reggono alla critica. (Vedi pref.). *Dedekind* (Was sollen und sind die Zahlen? pag. 17) stabilisce che un sistema S di elementi si chiama *infinito* quando si può stabilire una corrispondenza univoca (def. II, 42) fra S e una sua parte nel senso di parte usato da noi; in caso contrario, chiama S un sistema finito. Ma questa è una definizione comune a tutti i sistemi infiniti, perchè l'infinito, come vedremo, ammette forme diverse. La definizione nostra che si fonda sul concetto di scala, di maggiore e di minore, è ugualmente inattaccabile e di più si presta meglio per le nostre ricerche. Quella di *Dedekind* non basterebbe poi da sola per la determinazione dei nostri segmenti e anche pei numeri infiniti di *G. Cantor*. (Vedi pref.).

spetto all'altro, perchè in tal caso non soddisferebbero alla condizione del teor. *b.* 81 (IV, 8); così se l'uno è infinito o infinitesimo rispetto all'altro non possono essere finiti; e finalmente se uno é infinito rispetto all'altro esso è maggiore di questo, mentre se fosse anche infinitesimo dovrebbe essere minore, ciò che è assurdo (*c*, 61).

g. Due segmenti finiti con un terzo sono finiti tra loro.

Difatti se uno di essi fosse infinito rispetto all'altro sarebbe infinito anche rispetto al terzo (*d'*). Se uno fosse invece infinitesimo rispetto all'altro questo sarebbe infinitesimo rispetto al terzo, contro il dato (*e*) dunque ecc.

h. Se un segmento è finito rispetto ad un altro, questo è finito rispetto al primo.

Difatti se il secondo fosse infinito (infinitesimo) rispetto al primo, il primo sarebbe infinitesimo (infinito) rispetto al secondo (def. II), non finito (*f*).

i. L'addizione di due segmenti finiti (infinitesimi, o di cui uno è infinito) del medesimo verso dà un segmento finito (infinitesimo o infinito).

Siano (AB), (BC) i due segmenti finiti del medesimo verso che dànno il segmento (AC). Esso è un segmento della scala di origine A e di unità (AB) (def. II; def. I 81, *d*, 80; *d*, 81).

Se (AB) e (BC) sono infiniti, o anche un solo di essi è infinito, la proprietà è conseguenza di *e* (def. I, 72 e def. I, 61).

Se sono infinitesimi e se non sono uguali, supponiamo $(AB) > (BC)$; allora

$$(AB)2 > (AB) + (BC) \qquad (f,\ 73).$$

Ma $(AB)2$ è minore di qualunque segmento finito (def. II; *c'*, 81) e a maggior ragione $(AB) + (BC)$ (*d'*, 61).

Dunque ecc.

Def. IV. Poichè il campo della scala è a partire dall'origine maggiore di qualsiasi segmento *finito* dato di essa (*a*, 80) lo chiameremo pure *infinito.*

Oss. III. Il campo della scala è *illimitato* (def. III, 80) perchè non ha un ultimo elemento che lo limiti nel verso della scala (def. II, 32), ed è *infinito* perchè maggiore di ogni segmento dato di essa (def. IV).

l. Il campo di una scala è contenuto in un segmento infinito limitato con uno degli estremi nell' origine della scala senza poi essere questo stesso segmento.

Difatti il campo della scala (AA_{I}) è contenuto in un segmento limitato infinito (AA_{∞}), (def. II, ip. III) ma non coincide con tutto questo, perchè per lo meno il segmento (AA_{∞}) contiene in più l'elemento A_{∞} e perciò anche altri elementi distinti da A_{∞} (*a*).

83. *Def. I.* Se si ha una serie illimitata di segmenti limitati (AX'), (AX''), ... ed è $(AX') < (AX'') < \ldots$., potremo dire col linguaggio del movimento (def. VII, 67) che il segmento generatore o variabile (AX) *diventa sempre maggiore*, e chiameremo (AX) segmento variabile *sempre crescente;* e che quindi X si allontana da A (def. VI, 67).

Se invece si ha un ultimo stato, vale a dire se la serie dei segmenti data è limitata, il segmento (AX) si chiama variabile *limitatamente crescente.*

Def. II. Se si ha invece una serie illimitata di segmenti limitati $(AX') > (AX'') > \ldots$., diremo che il segmento generatore (AX) è *variabile sempre decrescente* o *diventa sempre minore*, e che l'elemento X si avvicina quindi all'elemento A

(def. VI, 67). Se la serie è limitata il segmento (AX) si chiama *limitatamente decrescente.*

Def. III. Se le serie sono illimitate di 1ª specie a partire da un loro segmento (def. III, 39), le variabili corrispondenti le diremo *illimitate di* 1ª *specie.*

Def. IV. La legge di costruzione della serie nei casi precedenti (def. II, 58) si chiama legge di variabilità del segmento (AX).

Def. V. Il campo della scala è per noi un tutto costante dato (def. III, 80). Immaginiamo di costruire questo campo colla sola operazione di ripetere i segmenti consecutivi uguali della scala e di unirli successivamente in un tutto con quelli già posti (def. I, 26); come si è fatto pei numeri (def. II, 45) con questa differenza: che qui teniamo conto anche della diversità di posizione dei diversi segmenti e delle loro parti (38). Con questa semplice operazione del ripetere e dell'unire non solo non possiamo mai uscire dalla scala, ma *ci rimangono sempre altri segmenti finiti da considerare.* Il segmento che si ottiene dunque a partire dall'origine con questa operazione è un segmento variabile sempre crescente (def. I) che chiameremo *campo finito* della scala.

Oss. I. Il campo finito della scala non è dunque come il campo della scala un tutto dato e costante, ma è un ente che quando lo si considera è variabile (definiz. VII, 67)

Def. VI. Di ogni segmento finito (AX) variabile sempre crescente e che diventa maggiore di ogni segmento dato finito, diremo che *cresce indefinitamente o tende a diventare infinitamente grande* o *ha per limite il campo C della scala.* E scriveremo

$$\lim (AX) \equiv C.$$

a. Il campo finito della scala ha per limite il campo della scala.

Perchè non è che un segmento che soddisfa alla def. VI (def. V).

Def. VII. Diremo anche che il campo finito della scala è indefinitamente grande, intendendo però sempre, usando il verbo *essere* anzichè il verbo *diventare,* che non è un tutto dato e costante.

Oss. II. Abbiamo dunque segmenti illimitati, come il campo C della scala che è dato e costante, e questo è infinito (def. IV, 82) e abbiamo segmenti illimitati non costanti e che *tendono a diventare infiniti.*

Non bisogna confondere dunque le due forme se non si vuol cadere in contraddizioni.

b. Il campo finito della scala è identico a quello determinato da qualunque segmento finito di esso come unità (f, 81 e def. V).

Def. VIII. Tutta la parte della forma fondamentale che contiene gli elementi all'infinito si chiama *campo all'infinito* rispetto all'unità data o alla scala di questa unità.

b'. Il campo all'infinito di una scala è pure il campo all'infinito di un'altra scala la cui unità è un segmento finito della prima e la cui origine giace nel campo della prima.

Difatti i campi delle scale generate dai segmenti del campo dato coincidono a partire dall'origine (b', 81), e quindi anche il campo all'infinito (def. VIII). E poichè se l'origine è un altro elemento dato, il campo della scala

così ottenuto è contenuto nel primo e differisce dal primo soltanto pel segmento che ha per estremi le due origini (a, 80), il teorema è dimostrato.

84. a. *Se* (AD) *è finito rispetto ad un' unità* (AA_1), (DA) *è finito rispetto all' unità* (AA_1) (def. II, 82; e e b, d, 81).

a'. *Se un segmento* (AB) *è infinito (o infinitesimo) rispetto ad un segmento* (CD), *il segmento* (BA) *è infinito (infinitesimo) rispetto a* (DC).

Difatti (BA) non può essere finito rispetto a (DC), perchè (AB) sarebbe finito rispetto a (CD) (a; f, 82); nè (BA) può essere nel primo caso infinitesimo rispetto a (DC) perchè scelto in (DC) un segmento (DD') identico a (BA), $(D'D)$ sarebbe contenuto in (CD) (b', 69; c', 68; def. I, 61) e perciò (CD) sarebbe maggiore di $(D'D)$ cioè di (AB) (def. I, 61 e a, 69; def. II, 61) contro l'ipotesi. Dunque (BA) deve essere infinito rispetto a (DC) (f, 82). Se invece (AB) è infinitesimo rispetto a (CD), (BA) non può essere nè finito, nè infinito rispetto a (DC) (a e dim. preced.), dunque deve essere infinitesimo (f, 82).

b. *Dato un segmento* $(AA^{(\infty)})$ *rispetto all' unità* (AA_1), *e costruita in esso la scala di origine* A *e di unità* (AA_1), *e la scala di origine* $A^{(\infty)}$ *e di unità* (A_1A) *si ha sempre:*

1) $$(AA_n) \equiv (A'_n{}^{(\infty)} \; A^{(\infty)})$$

essendo n *un numero qualunque della serie dei numeri naturali e corrispondente agli elementi estremi dei multipli delle unità date secondo il numero* n.

2) *Se* X' *è un elemento del campo della scala di origine* $A^{(\infty)}$ *compreso fra gli elementi* $A_{n-1}{}^{(\infty)}$ $A_n{}^{(\infty)}$, *e se* $(AX) \equiv (X'A^{(\infty)})$, *l'elemento* X *è compreso fra gli elementi* A_{n-1}, A_n *della scala di origine* A.

1) Intanto si ha che $(A^{(\infty)} A)$ è infinito rispetto ad $(A_1 A)$ (a') e quindi anche rispetto ad $(A^{(\infty)} A_1{}^{(\infty)})$ (def. II, 82). Dalla relazione

$$(A^{(\infty)} \; A_1{}^{(\infty)}) \equiv (A_1 \; A) \qquad (1)$$

si ha

$$(A_1{}^{(\infty)} \; A^{(\infty)}) \equiv (AA_1) \qquad (1') \; (a, 69).$$

La esistenza del segmento $(A_1{}^{(\infty)} \; A^{(\infty)})$ risulta dalla definizione stessa del sistema omogeneo (def. I, 68; a, 82). Costruiamo la scala di origine A coll'unità (AA_1) nel verso $(AA^{(\infty)})$, e la scala di origine $A^{(\infty)}$ nel verso opposto coll'unità $(A^{(\infty)} \; A_1)$ (b', 69) cioè:

$$A^{(\infty)} \; A_1{}^{(\infty)} \; A_2{}^{(\infty)} \; \ldots\ldots \; A_n{}^{(\infty)} \ldots\ldots$$

essendo

$$(A^{(\infty)}A_1{}^{(\infty)}) \equiv (A_1{}^{(\infty)}A_2{}^{(\infty)}) \equiv \ldots\ldots \equiv (A_{n-1}{}^{(\infty)} \; A_n{}^{(\infty)}) \equiv \ldots\ldots$$

e analogamente

$$(AA_1) \equiv (A_1A_2) \equiv \ldots\ldots \equiv (A_{n-1}A_n) \equiv \ldots\ldots \qquad (2)$$

dico che si ha:

$$(A^{(\infty)}A_2{}^{(\infty)}) \equiv (A_2A) \qquad (3)$$

Difatti la (3) si può scrivere anche così:

$$(A^{(\infty)}A_1{}^{(\infty)}) + (A_1{}^{(\infty)}A_2{}^{(\infty)}) \equiv (A_2A_1) + (A_1A) \; \text{(def. I, 72)} \qquad (3')$$

Ma per le relazioni (1), (1'), (2) si ha:

$$(A_2A_1) \equiv (A_1A) \equiv (A^{(\infty)}A_1{}^{(\infty)}) \equiv (A_1{}^{(\infty)}A_2{}^{(\infty)}) \qquad (c, 60)$$

e valendo dunque la (3') vale anche la (3) (c, 68).

Dalla (3) si ha poi:

$$(AA_2) \equiv (A_2^{(\infty)} A^{(\infty)}) \qquad (a,\ 69) \qquad (3')$$

Se la relazione (3) è vera per $n-1$, cioè

$$(A^{(\infty)} A_{n-1}^{(\infty)}) \equiv (A_{n-1} A) \qquad (4)$$

è vera anche per n, cioè

$$(A^{(\infty)} A_n) \equiv (A_n A) \qquad (5)$$

Difatti si ha:

$$(AA_{n-1}) \equiv (A_1 A_n) \qquad (d,\ 79) \qquad (6)$$

e quindi

$$(A_{n-1} A) \equiv (A_n A_1) \qquad (a,\ 69) \qquad (6')$$

e perciò la (4) ci dà mediante la (6')

$$(A^{(\infty)} A_{n-1}^{(\infty)}) \equiv (A_n A_1) \qquad (c,\ 60) \qquad (4')$$

Ora la (5) si può scrivere così:

$$(A^{(\infty)} A_{n-1}^{(\infty)}) + (A_{n-1}^{(\infty)} A_n^{(\infty)}) \equiv (A_n A_1) + (A_1 A) \qquad (\text{def. I } 72)$$

e siccome

$$(A_{n-1}^{(\infty)} A_n^{(\infty)}) \equiv (A^{(\infty)} A_1^{(\infty)}) \equiv (A_1 A) \qquad ((1) \text{ e } (2) \text{ e } c,\ 60)$$

per la (4') la (5) è dimostrata (c, 68).

La (5) poi ci dà:

$$(A_n^{(\infty)} A^{(\infty)}) \equiv (AA_n) \qquad (a,\ 69) \qquad (5')$$

2) Si ha infatti da (5')

$$(A \ldots A_{n-1} A_n) \equiv (A_n^{(\infty)} X' A_{n-1}^{(\infty)} \ldots, A^{(\infty)})$$

e per dato è

$$(AX) \equiv (X' A^{(\infty)}) \qquad (7)$$

$$(X' A^{(\infty)}) < (A_n^{(\infty)} A^{(\infty)}) \qquad (\text{def. I, } 61)$$

e perciò

$$(AX) < (AA_n) \qquad ((5') \text{ e def. II, } 61) \qquad (8)$$

Dunque X è compreso nel segmento (AA_n) (c', 68; b, 36 e def. I 61).

Ma si ha:

$$(AA_{n-1}) \equiv (A_{n-1}^{(\infty)} A^{(\infty)}) \qquad ((4'),\ a,\ 69 \text{ e } (6))$$

e siccome per dato

$$(A_{n-1} A^{(\infty)}) < (X' A^{(\infty)})$$

è

$$(AA_{n-1}) < (X' A^{(\infty)}) \qquad (\text{def. II, } 61)$$

ossia

$$(AA_{n-1}) < (AX) \qquad ((7) \text{ e def. II, } 61)$$

dunque X è situato nel segmento $(A_{n-1}\ A_n)$, come volevasi dimostrare.

c. Non può essere che un elemento dato X' del campo della scala di origine $A^{(\infty)}$ di b' qualunque esso sia, appartenga al campo della scala di origine A.

Difatti essendo $(A^{(\infty)} X')$ finito rispetto all'unità $(A^{(\infty)}\ A_1^{(\infty)})$ ossia $(A_1\ A)$, $(X'\ A^{(\infty)})$ è finito rispetto all'unità (AA_1) (a e (1)). Ma lo sarebbe pure (AX') se X' appartenesse al campo della scala di origine A, e quindi il segmento $(AX') + (X' A^{(\infty)}) \equiv (AA^{(\infty)})$ sarebbe finito rispetto all'unità (AA_1) (i, 82) contro l'ipotesi del teorema.

85. *Oss. I.* Il teorema precedente dimostra che senza venir meno alla definizione del sistema semplicemente omogeneo (def. I, 68) e all'ipotesi sull'esistenza dei segmenti infiniti (ip. III, 82), il segmento $(AA^{(\infty)})$ può non contenere alcun altro elemento fuori dei campi delle due scale di origine A e $A^{(\infty)}$ che abbiamo testè considerate. Ora, in base a principî possibili noi dobbiamo costruire o porre la forma fondamentale od ogni sua parte a partire da una data unità, altrimenti non possiamo determinare tutte le sue proprietà o per meglio dire resterebbe indeterminato il passaggio da un'unità data ad un segmento infinito, di cui l'ipotesi III ci dà solo l'esistenza.

Anche ammesso che nel segmento $(AA^{(\infty)}$ vi siano elementi della forma fondamentale fuori dei campi delle due scale costruite nel teor. *b* non basta; perchè posono esistere in $(AA^{(\infty)})$ altri segmenti infiniti rispetto ad (AA_1) e infinitesimi rispetto ad $(AA^{(\infty)})$. Nè ammesso questo principio deriva in quali relazioni stiano fra loro. Siamo dunque condotti a questa ipotesi:

Ip. IV. **Nel campo all'infinito rispetto ad un'unità** (AA_1) **qualunque, scelto un elemento arbitrario** $A^{(\infty)}$**, nel segmento** $(AA^{(\infty)})$ **1°: esiste un elemento** X **tale che** (AX) **e** $(XA^{(\infty)})$ **sono pure infiniti rispetto ad** (AA_1)**; 2°: esiste un elemento** $A^{(\infty)}$ **tale che qualunque sia** X **il segmento** (AX) **è finito rispetto ad** $(AA^{(\infty)})$.

a. L'ipotesi IV non deriva dalle precedenti proprietà della forma fondamentale, e non contraddice ad esse.

Dato X vi sono due possibilità non contraddicenti alle ipotesi che precedono, e cioè che $(AA^{(\infty)})$ sia finito o infinito rispetto ad (AX), come ad es. nella serie NN' della dimostrazione del teor. *b,* 82, un segmento limitato cogli estremi A e A' rispettivamente in N e N' è infinito rispetto ad un segmento (AB) cogli estremi in N, mentre un altro segmento (CD) di N è finito rispetto ad (AB).

Nella seconda parte dell'ipotesi si suppone dunque che vi sia un elemento $A^{(\infty)}$ tale che per ogni elemento X che soddisfa alla prima condizione, (AX) sia finito rispetto ad $(AA^{(\infty)})$. Che per un elemento X ciò possa essere non v'è dubbio, basta prendere $(AA^{(\infty)}) \equiv (AX)\,2$. Per ogni altro elemento X_1 compreso fra X e $A^{(\infty)}$, se $(AA^{(\infty)})$ fosse infinito rispetto ad (AX_1) lo sarebbe a maggior ragione rispetto ad (AX) (def II, 82), nè può essere infinitesimo essendo maggiore di (AX_1) (def. I, 61 e def. II, 82), dunque deve essere finito rispetto ad (AX_1) (*f,* 82). Per ogni elemento X_2 compreso fra A e X, che non è situato nei campi delle scale di unità (AA_1) o (A_1A) di origine A e X nel segmento (AX), resta l'arbitrarietà che (AX_2) sia finito o infinitesimo rispetto ad (AX) (def. II, 82). L'ipotesi sceglie il primo caso, e cioè che (AX_2) sia finito rispetto ad (AX), e quindi anche rispetto ad $(AA^{(\infty)})$ (*g,* 82).

Le serie N corrispondenti agli elementi X, compresi nel segmento $(AA^{(\infty)})$ (vedi dim. del teor. *b,* 82), formano un segmento di gruppi N identici i cui segmenti formati coi nuovi elementi ad es. $(N_a\, N)$, $(N_a\, N_{a^{(\infty)}})$ sono finiti l'uno rispetto all'altro [1]).

Def. I. Questa ipotesi la chiameremo anche prima ipotesi di *costruzione* o di *determinazione* dei segmenti infiniti della forma fondamentale.

Oss. II. Questa ipotesi include necessariamente in sè l'ipotesi III sull'esistenza dei segmenti infiniti data che sia la def. II, 82.

---

1) Una rappresentazione di questa ipotesi si ha ad es.: quando si suppone che ogni punto di un segmento rettilineo intuitivo rappresenti una serie N di punti.

b. Il segmento $(XA^{(\infty)})$ *è pure finito rispetto ad* $(AA^{(\infty)})$.

Difatti non può essere infinito rispetto ad $(AA^{(\infty)})$ perchè è contenuto in $(AA^{(\infty)})$ (def. II, 82 e def. I, 61). Quindi se non è finito deve esser infinitesimo rispetto ad $(AA^{(\infty)})$ (*f*, 82) essendo infinito rispetto ad (AA_1) (ip. IV). Dunque $(X A^{(\infty)})$ deve essere anche infinitesimo rispetto ad (AX), che è finito rispetto ad $(AA^{(\infty)}$ (ip. IV; *d'*, 82). Consideriamo in (AX) un segmento $(AX') \equiv (XA^{(\infty)})$ (def. I, 68). Il segmento $(A^{(\infty)}X)$ è infinito rispetto all'unità $(A^{(\infty)}A_1^{(\infty)}) \equiv (A_1A)$ (*a'*, 84), dunque anche $(A^{(\infty)}X')$ rispetto ad $(A^{(\infty)}A_1^{(\infty)})$, perché $(A^{(\infty)}X)$ è per ipotesi parte del segmento $(A^{(\infty)}X')$ (def. I, 61, e def. II, 82). Per conseguenza $(X'A^{(\infty)})$ è infinito rispetto ad (AA_1) (*a'*, 84); ma (AX') è pure infinito rispetto ad (AA_1) perchè lo è $(XA^{(\infty)})$ ad esso uguale, e perciò l'elemento X' non può appartenere al campo della scala di origine A e di unità (AA_1). Ma per l'ipotesi IV (AX'), e quindi anche $(XA^{(\infty)})$, deve essere finito rispetto ad $(AA^{(\infty)})$ (def. II, 82) ne consegue dunque che è assurdo ammettere che $(XA^{(\infty)}) \equiv (AX')$ sia infinitesimo rispetto ad $(AA^{(\infty)})$, dunque *b* (*f*, 82).

c. I segmenti (AX) *e* $(XA^{(\infty)})$ *della seconda parte dell' ip.* IV *soddisfano alla stessa proprietà dell' ipotesi IV.*

Difatti essendo X un elemento all'infinito rispetto all'unitá (AA_1) vi deve essere in (AX) un elemento X' tale che (AX') e $(X'X)$ sono infiniti e (AX') e $(X'A^{(\infty)})$ devono essere finiti rispetto ad $(AA^{(\infty)})$ (ip. IV, *b*); (AX') è dunque finito rispetto ad (AX) (*g*, 82).

Con un ragionamento identico a quello della dimostrazione del teor. *b* si prova che$(X'X)$ deve essere finito rispetto ad (AX).

Ciò vale altresì pel segmento $(XA^{(\infty)})$. Difatti è infinito rispetto ad (AA_1) (ip. IV) e vi deve essere in esso un elemento X'' tale che (XX'') $(X''A^{(\infty)})$ sono infiniti rispetto ad (AA_1) (ip. IV, 1°). I segmenti (AX'') e $(X''A^{(\infty)})$ sono finiti rispetto ad $(AA^{(\infty)})$ (ip. IV, 2° e *b*), e quindi anche rispetto ad $(XA^{(\infty)})$ (*g*, 82).

Si immagini ora dato un segmento $(AY) \equiv (XX'')$; essendo (XX'') infinito rispetto ad (AA_1) lo sarà pure (AY) (def. II, 61; def. II, 82). Ma l'elemento X'' deve essere compreso fra Y e $A^{(\infty)}$, essendo $(XX'') < (AX'')$ (def. I, II, 61), e perciò $(YA^{(\infty)}) > (X''A^{(\infty)})$ (def. I, 61) è infinito rispetto ad (AA_1). Dunque (AY) sarà finito rispetto ad $(AA^{(\infty)})$ e a $(X''A^{(\infty)})$ (ip. IV e *g*, 82), e quindi anche (XX'').

d. Ogni segmento $(AA_1^{(\infty)})$ *di* $(AA^{(\infty)})$ *coll' elemento* $A_1^{(\infty)}$ *nel campo della scala di origine* $A^{(\infty)}$ *e di unità* (A_1A) *è finito rispetto ad* $(AA^{(\infty)})$, *e l'elemento* $A_1^{(\infty)}$ *soddisfa come* $A^{(\infty)}$ *all'ipotesi IV.*

Difatti $(AA_1^{(\infty)})$ è infinito rispetto ad (AA_1) (*c*, *b*, 84). Il segmento $(AA_1^{(\infty)})$ non può essere infinito rispetto ad $(AA^{(\infty)})$ che lo contiene (def. II, 82 e def. I, 61), nè può essere infinitesimo perchè (AX) che è parte di $(AA_1^{(\infty)})$ (def. II, 27 e def. I, 62) è finito rispetto ad $(AA^{(\infty)})$ (ip. IV, def. II, 82) dunque $(AA_1^{(\infty)})$ è finito rispetto ad $(AA^{(\infty)})$ (*f*, 82). Ora per ogni elemento X tale che (AX) e $(XA_1^{(\infty)})$ sono infiniti (ip. IV) si ha anche che (AX) e $(XA^{(\infty)})$ sono infiniti (def. II, ed *e*, 82); e che (AX) e $(XA^{(\infty)})$ sono finiti rispetto ad $(AA^{(\infty)})$ (ip. IV, 2° e *b*) e perciò anche rispetto ad $(AA_1^{(\infty)})$ (*g*, 82). Dunque $(XA_1^{(\infty)})$ essendo infinito rispetto ad (AA_1) è finito rispetto ad $(AA_1^{(\infty)})$ (*b*). Il teorema è perciò dimostrato.

e. Ogni segmento $(AA_1{}^{(\infty)}) > (AA^{(\infty)})$ *e che soddisfa alla condizione*

$$(AA^{(\infty)})\, n > (AA_1{}^{(\infty)})$$

dove n è un numero dato qualunque della serie (I), soddisfa alla proprietà dell'ipotesi IV.

$(AA_1{}^{(\infty)})$ è finito rispetto ad $(AA^{(\infty)})$ (b', 81 e def. II, 82), e $(AA^{(\infty)})$ è finito rispetto ad $(AA_1{}^{(\infty)})$ (h, 82). Dato un elemento qualunque X tale che (AX) e $(XA^{(\infty)})$ siano infiniti essendo (AX) e $(XA^{(\infty)})$ finiti rispetto ad $(AA^{(\infty)})$ (ip. IV, b), lo sono anche rispetto ad $(AA_1{}^{(\infty)})$ (g, 82). E poichè $(A^{(\infty)}A_1{}^{(\infty)})$ è al più finito rispetto al segmento $(AA^{(\infty)})$, altrimenti $(AA_1{}^{(\infty)})$ sarebbe infinito rispetto ad $(AA^{(\infty)})$ (i, 82), se l'elemento X è contenuto in $(A^{(\infty)}\, A_1{}^{(\infty)})$ il segmento $(A^{(\infty)}\, X)$ è al più finito rispetto al segmento $(A^{(\infty)}\, A_1{}^{(\infty)})$ (def. II, 82), e quindi anche rispetto al segmento $(AA^{(\infty)})$, perchè se fosse infinito lo sarebbe anche rispetto al primo (d', 82). Dunque (AX) è anche in tal caso finito rispetto ad $(AA_1{}^{(\infty)})$ e perciò anche $(XA_1{}^{(\infty)})$, se $(XA_1{}^{(\infty)})$è infinito rispetto ad (AA_1) ($b_,$); ed il teorema è pienamente dimostrato.

f. Tutti i segmenti infiniti rispetto all'unità (AA_1) *che soddisfano all'ip. IV sono fra loro finiti.*

Siano $(AA_1{}^{(\infty)})$, $(AA_2{}^{(\infty)})$ due di questi segmenti, e sia $(AA_2{}^{(\infty)}) > (AA_1{}^{(\infty)})$. Se non sono finiti significa che $A_2{}^{(\infty)}$ non appartiene al campo della scala di unità $(AA_1{}^{(\infty)})$ (ip. III e def. II, 82), e perciò $(AA_1{}^{(\infty)})$ sarebbe infinitesimo rispetto ad $(AA_2{}^{(\infty)})$ (def. II, 82). Ma in tal caso $A_2{}^{(\infty)}$ non soddisferebbe all'ultima proprietà dell'ip. IV, dunque $(AA_2{}^{(\infty)})$ deve essere finito rispetto ad $(AA_1{}^{(\infty)})$. La proprietà vale anche per segmenti che non hanno lo stesso estremo A, perchè si possono considerare segmenti uguali ai dati e dello stesso verso coll'estremo A (def. I, 68). Il teorema è dimostrato.

g. Un segmento finito è nullo rispetto ad un segmento infinito.

Sia dapprima $(AA^{(\infty)})$ il segmento infinito e (AD) il segmento finito appartenente alla medesima scala e col primo estremo nell'origine della scala.

Si vuol dimostrare che

$$(AA^{(\infty)}) \equiv (AD) + (DA^{(\infty)}) \equiv (DA^{(\infty)})$$

rispetto al segmento $(DA^{(\infty)})$. Il segmento $(DA^{(\infty)})$ contiene il campo della scala di unitá (AD) e di origine D (l, 82), per il quale vale la stessa proprietà (f', 81). Unire ad un segmento $a+b$ limitato o non un segmento limitato o illimitato c, e se a è nullo rispetto a b (def. II, 81), è lo stesso che unire c a b, ossia in $a+(b+c)$ a è nullo rispetto a $(b+c)$, dunque (AD) è nullo rispetto a $(DA^{(\infty)})$. Si consideri ora in $(AA^{(\infty)})$ un segmento $(A^{(\infty)}\, A_1{}^{(\infty)})$ uguale ad $(A_1 A)$, essendo (AA_1) l'unità, e sia:

$$(A^{(\infty)}\, D^{(\infty)}) \equiv (DA) \qquad (b', 69)$$

e quindi

$$(D^{(\infty)}\, A^{(\infty)}) \equiv (AD) \qquad (a, 69).$$

Il segmento (DA) è finito rispetto ad $(A_1 A)$ (a, 84), e quindi anche rispetto al segmento $(A^{(\infty)}\, A_1{}^{(\infty)})$ (def. II, 82). E pel caso precedende, siccome $(A^{(\infty)}\, A)$ è infinito rispetto ad $(A_1 A)$ ossia ad $(A^{(\infty)}\, A_1{}^{(\infty)})$ (a', 84), si ha:

$$(A^{(\infty)}\, A) \equiv (D^{(\infty)}\, A)$$

ossia

$$(A^{(\infty)}\ D^{(\infty)}) + (D^{(\infty)}\ A) \equiv (D^{(\infty)}\ A)$$

oppure anche

$$(AD^{(\infty)}) + (D^{(\infty)}A^{(\infty)}) \equiv (AD^{(\infty)}) \qquad (a,\ 69)$$

Vale a dire unito ad un segmento infinito $(AD^{(\infty)})$ un segmento finito $(D^{(\infty)}\ A^{(\infty)})$ il segmento finito è trascurabile rispetto al segmento infinito.

Così se togliamo il segmento $(D^{(\infty)}\ A^{(\infty)})$ da $(AA^{(\infty)})$ infinito rispetto all'unità (AA_1), la parte rimanente $(AD^{(\infty)})$ è uguale al segmento stesso.

Anche qui osserviamo che l'uguaglianza ha luogo in senso relativo e non in senso assoluto (oss. IV, 60).

Finalmente consideriamo il caso in cui nessuno degli estremi del segmento finito (XY) coincida con un estremo di $(AA^{(\infty)})$ e in modo che nè (AY) nè $(XA^{(\infty)})$ siano finiti rispetto ad AA_1, chè altrimenti si avrebbe uno o l'altro dei casi precedenti (*h*, 82). Dunque (AY) e $(XA^{(\infty)})$ sono infiniti rispetto ad (AA_1). Ma pel secondo caso si ha:

$$(AX) + (XY) \equiv (AX)$$

e quindi

$$(AA^{(\infty)}) \equiv (AX) + (XY) + (YA^{(\infty)}) \equiv$$
$$\equiv [(AX) + (XY)] + (YA^{(\infty)}) \qquad (d,\ 77)$$
$$\equiv (AX) + (XD^{(\infty)})$$

essendo

$$(XD^{(\infty)}) \equiv (YA^{(\infty)})\ [1]$$

Oss. III. **Osserviamo che non abbiamo fatto uso in questa dimostrazione della seconda parte dell'ip. IV, e che quindi $(AA^{(\infty)})$ è un segmento infinito qualunque dato.**

Def. II. Dire che i segmenti $(AA^{(\infty)})$, $(A'A^{(\infty)})$ sono *uguali rispetto all'unità* significa che essi sono uguali rispetto alla corrispondenza d'identità fra le parti finite nel campo della scala di questa unità (oss. IV, 60).

g'. Se ad un segmento (AA') finito si aggiunge un segmento infinito $(A'A^{(\infty)})$ dello stesso verso si ha lo stesso segmento infinito rispetto all'unità a partire dall'uno o dall'altro estremo A e A' (*g* e def. II).

g''. Se viene aggiunto o sottratto ad un segmento infinito $(AA^{(\infty)})$ un segmento finito $(A^{(\infty)}A_1^{(\infty)})$ dello stesso verso, il segmento infinito rimane lo stesso rispetto all'unità (AA_1) o ad un segmento qualunque finito dato.

Cioè

$$(AA^{(\infty)}) \equiv (AA_1^{(\infty)})$$

Ciò risulta dalla dimostrazione del secondo caso del teor. *g* (def. II). Che valga poi per ogni segmento finito dato deriva dal fatto che i campi della scala aventi per unità segmenti fra loro finiti sono uguali (def. II, 82, *b*, 81 e def. II).

Oss. IV. **Ho detto che i segmenti $(AA^{(\infty)})$, $(A^{(\infty)}A')$ vanno considerati nel medesimo verso, perchè per il concetto di scala fin qui stabilito ed esteso colle ip. III e IV i segmenti vanno considerati nel medesimo verso,**

---

1) L'idealista di *Du Bois-Reymond* (l. c. pag. 73-74) ammette la proprietà *g* come postulato. Ma evidentemente essa deve essere dimostrata dalla generazione stessa della grandezza lineare, perchè nulla in senso assoluto è trascurabile, per non cadere nella contraddizione notata più volte *A è* e *non è A*. Egli l'enuncia in questo modo «Due grandezze finite la cui differenza è infinitesima sono uguali». Così introduce gli infinitesimi senz'altra definizione. Su ciò ritorneremo in seguito (Vedi la nota n. 93 e la nota n. 96).

h. La differenza di un segmento finito da un altro pure finito se non è nulla è finita rispetto all'unità.

Se la differenza (def. I, 74) fosse infinitesima, sarebbe nulla rispetto all'unità (g). Non può essere infinita, perchè scelto nel maggiore a un segmento a' uguale al minore, a dovrebbe essere infinito rispetto ad a' (def. II, 82), e quindi deve essere finita (f, 82).

Oss. V. Distingueremo dunque fin d'ora i segmenti limitati identici in senso assoluto da quelli uguali rispetto ad un'unità di misura. Il confondere un'identità coll'altra conduce a contraddizioni.

i. Due segmenti infiniti limitati sono uguali rispetto ad un segmento finito dato qualunque.

Difatti siano a e b i due segmenti dati, se sono uguali in senso assoluto a maggior ragione sono uguali in senso relativo (9). Sia dunqne $a > b$ (lo stesso sarebbe se fosse $b > a$) e c un segmento finito. Colla costruzione della scala di unità c non possiamo confrontare a e b perchè non sono nel campo della scala stessa, nè sono questo campo essendo limitati (def. III, 80 e l, 82) e quindi rispetto alla sola unità possiamo dire soltanto che sono infiniti, che corrispondono cioè allo stesso concetto, e quindi sono uguali (def. VI, 8).

D'altra parte si ha che aggiungendo ad uno di esso, per es. b, successivamente parti consecutive uguali a c nel verso della scala, queste sono sempre nulle rispetto all'unità c (g''), e quindi i segmenti risultanti rispetto a c sono ancora uguali. E anche se si considera più volte il nulla, in base a qualsiasi principio possibile, si ha sempre per risultato il nulla perchè dal nulla, cioè dall'assenza di ogni elemento. anche ripetuto più volte, non nasce alcun elemento, sempre s'intende in senso relativo all'unità. Siccome poi i segmenti infiniti rispetto a c sono infiniti rispetto ad ogni altro segmento finito (d', 82) il teorema è dimostrato.

i'. Gli elementi all'infinito coincidono in un solo elemento rispetto ad un segmento qualunque finito come unità. [1]).

Def. III. L'elemento che rappresenta tutti gli elementi all'infinito rispetto ad un'unità data nel verso della sua scala a partire da una data origine lo chiameremo *elemento limite all'infinito.*

i'' Rispetto all'unità si può sostituire al campo della scala a partire dall'origine A il segmento $(AA^{(\infty)})$, essendo $A^{(\infty)}$ il suo elemento limite all'infinito.

Difatti tutti gli altri elementi X dati oltre $A^{(\infty)}$ in $(AA^{(\infty)})$ sono rispetto all'unità data nel campo della scala, che come sappiamo è illimitato verso $A^{(\infty)}$. Il segmento $(XA^{(\infty)})$ col crescere di (AX) diminuisce in senso assoluto e tende a diventare finito e quindi nullo rispetto all'unità (g). E perciò possiamo scrivere anche in questo caso lim. $(AX) \equiv (AA^{(\infty)})$, come è lim. $(AX) \equiv C$ (def. VI, 83), perchè $(AA^{(\infty)})$ e C si comportano ugualmente rispetto al segmento va-

---

1) Non ammettendo l'ipotesi III, naturalmente gli elementi all'infinito e quindi i segmenti infiniti non esisterebbero. Ma ammessa quella ipotesi, il campo della scala di un'unità qualunque (AA'), ad es. di origine A, determina da solo il campo all'infinito cui tende il campo finito della scala. Vale a dire gli elementi all'infinito esistono anche rispetto all'unità (AA') e all'origine A. Rimanendo dunque nel campo di una sola unità possiamo considerare gli elementi all'infinito nel verso dato come esistenti, e quindi rispetto ad essa coincidenti (i')

riabile finito (AX), e non considerando fra C e $(AA^{(\infty)})$ alcun'altra differenza si ha $C \equiv (AA^{(\infty)})$ (c, 60, oss. I, 9 e def. VII, 8).

86. *Def. I.* Tutti i segmenti finiti con un segmento dato sono finiti fra loro (g, 82). Li chiameremo *segmenti della stessa specie.*

Def. II. Tutti i segmenti $(AA^{(\infty)})$ che soddisfano alla seconda parte dell'ipot. IV li chiameremo segmenti *infiniti di 1° ordine rispetto all'unità* (AA_1).

I segmenti infiniti di 1° ordine rispetto ad un segmento infinito di 1° ordine li chiameremo *segmenti infiniti di 2° ordine.* E in generale un segmento infinito di 1° ordine rispetto ad un segmento infinito di $(m-1)^{mo}$ ordine lo chiameremo *segmento infinito di ordine m rispetto all'unità* (AA_1).

Oss. I. Per ora m è un numero delle serie (I) (def. II, 46).

Def. III. Se un segmento è infinito di ordine m rispetto ad un altro, questo si chiama *infinitesimo d'ordine m* rispetto al primo.

a. 1) I segmenti della stessa specie di un segmento infinito di dato ordine sono infiniti del medesimo ordine.

2). Segmenti infiniti del medesimo ordine sono della medesima specie.

Se si tratta di un segmento infinito di 1° ordine rispetto ad (AA_1) la prima parte del teorema è un'espressione diversa dei teoremi c, d, e del n. 85.

Ma gli infiniti di m^o ordine sono per la stessa definizione infiniti di 1° ordine rispetto a un infinito di ordine $m-1$, dunque vale per essi il teor a, 1) e quindi poichè i segmenti della stessa specie di un segmento infinito di m^o ordine sono di 1° ordine rispetto ai segmenti infiniti d'ordine $m-1$, essi sono infiniti di m^o ordine rispetto all'unità (AA_1) (def. II).

Per la 2ª parte basta osservare che se uno dei segmenti fosse infinito rispetto ad un altro fra essi, esso non potrebbe soddisfare all'ip. IV cogli altri rispetto ad un infinito d'ordine immediatamente inferiore. (Vedi anche f, 85).

b. Un segmento a infinito di dato ordine rispetto ad un segmento dato b è infinito dello stesso ordine rispetto a tutti i segmenti della specie del segmento b.

Se si tratta di un segmento a infinito di 1° ordine, ciò è chiaro per il fatto che il segmento infinito di 1° ordine dipende soltanto dal campo della scala di unità b e non dal segmento stesso (ip. III) perchè i campi delle scale che hanno per unità due segmenti finiti sono uguali (def. II, 82; d, b, 81).

Ora ciò avviene anche pei segmenti infiniti di ordine m, perchè il campo infinito d'ordine m è determinato dal campo finito di unità b mediante le ip. III e IV (def. II).

b'. Tutti i segmenti della stessa specie di un segmento b infinitesimo di ordine dato rispetto ad un segmento a, sono infinitesimi dello stesso ordine.

Ciò deriva dal teor. b colla def. III.

c. Se b è un segmento infinitesimo di ordine dato rispetto ad un segmento a, è infinitesimo dello stesso ordine rispetto a tutti i segmenti della specie di a.

Perchè tutti questi segmenti sono infiniti dello stesso ordine m rispetto al segmento b (a) e quindi b è infinitesimo dello stesso ordine m rispetto ad essi (def. III).

d. I segmenti rispetto ai quali un segmento a è infinito di un ordine dato sono della stessa specie.

Difatti se uno di essi c fosse infinito rispetto ad un altro di essi b, il segmento a non sarebbe infinito dello stesso ordine rispetto ad essi (def. II, e ip. IV).

d'. Segmenti infinitesimi dello stesso ordine rispetto ad un segmento a sono della stessa specie.

Difatti a è infinito dello stesso ordine rispetto ai segmenti dati (def. III, d)

Def. IV. Il campo della scala che ha per unità un segmento infinito (infinitesimo) d'ordine m rispetto all'unità (AA_1) lo diremo *campo all'infinito* (*infinitesimo*) *d'ordine* m rispetto ad (AA_1).

Def. V. Il campo della scala di unità (AA_1) è contenuto in ogni segmento $(AA^{(\infty)})$ di 1^o ordine (l, 82), e quindi lo chiameremo pure infinito di 1^o ordine. Così il campo della scala all'infinito d'ordine m è contenuto in ogni segmento infinito d'ordine $m+1$, e lo chiameremo *campo infinito d'ordine* $m+1$; e quando parleremo d'ora innanzi di segmenti infiniti, se non diremo il contrario, intenderemo sempre segmenti limitati, come del resto si è già stabilito per gli altri sementi (def. IV, 62).

Def. VI. Il campo finito che ha per unità un segmento infinito (infinitesimo) d'ordine m (def. V, 83) lo chiameremo *campo infinito* (*infinitesimo*) *d'ordine* m.

Il campo finito rispetto all'unità primitiva (AA_1) lo chiameremo anche *campo infinito d'ordine zero*.

Oss. II Anche quì è da osservare, come pel campo finito rispetto ad un'unità (oss. I, 83) che mentre il campo all'infinito d'ordine m è un ente dato che rimane costante nelle nostre considerazioni, il campo infinito d'ordine m è variabile ed è rappresentato da un segmento infinito d'ordine m che diventa più grande di ogni segmento infinito dato dello stesso ordine, e che cresce *indefinitamente* nel campo all'infinito d'ordine m. Lo diremo *indefinitamente grande d'ordine* $m+1$, senza confonderlo coll'infinitamente grande d'ordine $m+1$.

e. Il campo infinito o infinitesimo di un dato ordine rispetto ad un segmento a è infinito o infinitesimo dello stesso ordine rispetto ad ogni segmento della stessa specie di a (b, c e def. VI).

Def. VII. Per distinguere l'elemento limite all'infinito rispetto ad un segmento infinito di 1^o ordine come unità, da quello rispetto all'unità primitiva (AA_1) (def. III, 85) chiameremo il secondo, *elemento limite all'infinito di* 1^o *ordine*; e il primo, *elemento limite all'infinito di* 2^o *ordine*.

E in generale chiameremo l'elemento limite rispetto ad un segmento infinito di $(m-1)^{mo}$ ordine come unità, *elemento limite all'infinito di* m^o *ordine* rispetto all'unità primitiva.

f. L'elemento limite di m^o ordine rappresenta tutto il campo all'infinito di m^o ordine rispetto ad un segmento infinito d'ordine $(m-1)$ come unità (i, i', 85).

Oss. III. Questa distinzione degli elementi limiti rispetto all'unità primitiva non significa altro che essi si riferiscono *successivamente* a segmenti infiniti di ordine diverso considerati come unità, poichè sappiamo già che limitandoci alla sola unità (AA_1) abbiamo un solo elemento limite (i' 85). Così è spiegata l'*apparente* contraddizione che mentre al n. 85 abbiamo detto che rispetto all'unità (AA_1) vi è un solo elemento limite, qui invece ne abbiamo altri.

Così quando diciamo campi infiniti d'ordine dato rispetto all'unità (AA_1) non intendiamo già che questi campi siano distinti rispetto alla sola unità (AA_1), perchè

cadremmo evidentemente in contraddizione (A è e non è A), ma intendiamo che sono distinti rispetto al principio dell'ip. IV applicato più volte.

Possiamo anzi dire:

Rispetto all'unità (AA_1) *non esistendo che un solo elemento limite, per essa sola non esistono i campi infiniti di* 2°, 3°....n°... *ordine, che si riferiscono ad altre unità ottenute coll'ip. IV.*

Oss. IV. Quando dunque parleremo del campo all'infinito rispetto ad un'unità soltanto, dovremo intendere quello di 1° ordine in senso assoluto.

§ 2.

Numeri infiniti e infinitesimi di diversi ordini, loro proprietà e simboli.

87. *Oss. I.* Come ogni elemento di divisione della scala a partire dall'origine rappresenta un numero della serie (I) 1, 2 .... n (b, b' e ind. I, 80), così il segno ∞ che serve ad indicare il posto di un elemento nel campo all'infinito (ind. I, 82) rappresenta un nuovo numero dato dall'insieme delle unità corrispondenti ai secondi estremi dei segmenti 1, 2, .,.. n .... ∞ (def. I, II, 45). Le proprietà e relazioni dei numeri definiti in questo modo sono date da quelle dei segmenti che li rappresentano, le quali a loro volta esprimono le proprietà e le relazioni dei segmenti che questi numeri servono a determinare come vedremo in seguito.

Def. I. Questo nuovo numero lo chiamiamo *infinito* per distinguerlo dai numeri che rappresentano o possono rappresentare gli elementi del campo della scala, e che si chiamano *finiti.*

Per distinguere poi fin d'ora i numeri di (*I*) dagli altri numeri possibili finiti li chiameremo numeri *interi* e *finiti.*

Oss. II. Per indicare che un numero è infinito soltanto, adopereremo come abbiam fatto il segno ∞; se si tratterà poi di distinguere questi numeri fra di loro come gli elementi che rappresentano, accompagneremo, come si vedrà, il segno ∞ con altri segni speciali.

Siccome sono possibili altri numeri infiniti (vedi ad es. § 3), finchè non diremo diversamente intenderemo i nostri numeri infiniti, che sono sempre rappresentati da segmenti limitati da due estremi, e *quindi i nostri teoremi sono dati per questi numeri soltanto.*

Dall'oss. I si ha intanto:

a. Un numero infinito è maggiore di qualunque numero finito (*c*, e defin. II, 82).

b. Fra un numero finito e uno dei nostri numeri infiniti vi sono in senso assoluto altri numeri infiniti (*a*, 82).

c. Dato un numero qualunque infinito determinato, fra esso e i numeri finiti vi è un altro numero infinito tale che il numero che va ad esso sommato per ottenere il dato è pure un numero infinito. E inoltre esiste sempre un numero infinito tale che tutti gli altri numeri infiniti compresi fra esso e lo zero sono finiti rispetto al numero dato come unità (oss. II).

In altre parole se il primo numero dell'ultima parte del teorema è β, e γ il secondo, e si ha:

$$\beta > \gamma$$

vi è sempre un numero n tale che

$$\gamma n > \beta \qquad \text{(ip. IV e } b\text{, 85)}.$$

d. Un numero finito è nullo rispetto ad un numero infinito, non però in senso assoluto (def. I e oss. II; *g*, 85).

d'. Se ad un numero α finito si somma un numero infinito β si ha lo stesso numero β rispetto alla unità data (*g'*, 85).

Cioè

$$a + \beta = \beta.$$

d''. Se si somma (o si sottrae) un numero finito a ad un numero infinito β (o da un numero infinito) il numero risultante è β rispetto all'unità data (*g''*, 85).

Vale a dire

$$\beta \pm a = \beta.$$

Oss. III. **L'operazione del sommare s'intende qui nel senso primitivo (def. I, 72) non già nel senso della def. I, 77. Non possiamo nemmeno qui parlare di togliere da un numero finito un numero infinito, poichè non abbiamo ancora spiegato il senso di sottrarre un numero maggiore da un numero minore, come invece lo abbiamo fatto pei segmenti (def. II, 77), il che faremo più tardi. (Vedi n. 113 e 114).**

e. La differenza di due numeri finiti è un numero finito se non è nulla rispetto all'unità. In senso assoluto può essere infinitesima (oss. I, def. I, oss. II; *h*, 85).

f. Due numeri infiniti sono uguali rispetto ad un numero finito (*i*, 85).

Def. II. Il numero ∞ si chiama *numero infinito limite* rispetto all'unità 1 (def. III, 85).

f'. Se x è un numero finito sempre crescente si ha rispetto all'unità.

$$\lim x = S = \infty \qquad (i'', 85).$$

se S rappresenta il numero corrispondente a tutta la serie dei numeri naturali (def. II, 46 e def. II, 45).

88. *Def. I.* I numeri finiti fra loro si chiamano *numeri della stessa specie* (oss. I, def. I, oss. II, 87 e def. I, 86).

Def. II. I numeri corrispondenti ai segmenti infiniti di un dato ordine m si chiamano *numeri infiniti di ordine m rispetto all'unità numerica primitiva* (oss. I, def. I, oss. II, 87 e def. II, 86).

Def. III. Se un numero è infinito d'ordine m rispetto ad un altro numero, questo si chiama *infinitesimo d'ordine m rispetto al primo* (def. III, 86).

a. 1) *Numeri della stessa specie di un numero infinito di dato ordine sono infiniti del medesimo ordine.*

2) *Numeri infiniti dello stesso ordine sono della stessa specie* (oss. I, def. I, oss. II, 87 e *a*, 86).

b. Un numero α infinito di un dato ordine rispetto ad un numero b è infinito dello stesso ordine rispetto a tutti i numeri della specie di b (oss. I, def. I, oss. II, 87 e *b*, 86).

b'. Tutti i numeri della stessa specie di un numero b infinitesimo di ordine dato rispetto ad un numero α, sono infinitesimi dello stesso ordine (*b'*, 86).

c. Se b è un numero infinitesimo di ordine dato rispetto ad un numero dato α, è infinitesimo dello stesso ordine rispetto a tutti i numeri della stessa specie di α (oss. I, def. I, oss. II, 87 e *c*, 86).

d. I numeri rispetto ai quali un numero a è infinito di un dato ordine sono della stessa specie (oss. I, def. I, oss. II, 87 e *d*, 86).

Oss. I. **Abbiamo anche pei numeri da distinguere i campi delle scale dei numeri infiniti dal campo della scala dell'unità primitiva (def. IV, V, VI e oss. II, 86).**

e. Il campo infinito o infinitesimo di dato ordine rispetto ad un numero a è infinito o infinitesimo rispetto a tutti i numeri della specie di a (oss. I, def. I, oss. II, 87 e *e*, 86).

f. Un gruppo illimitato di 1ª *specie è infinito.*

Difatti esso si può far corrispondere univocamente e nello stesso ordine alla serie dei segmenti consecutivi di una scala (def. I, 80), il cui campo è pure infinito (def. IV, 82 e *b*, 43).

89. *Ind. I.* Per distinguere gli elementi dei campi all'infinito di ordine diverso useremo segni diversi.

Indicheremo col simbolo comune ∞^1 o anche ∞ quelli all'infinito di 1° ordine. Dato uno di questi elementi $A^{(\infty_1)}$; gli elementi che si ottengono unendo o togliendo a cominciare da $A^{(\infty_1)}$ l'unità primitiva (AA_1) li indicheremo coi simboli

$$\infty_1+1,\quad \infty_1+2 \ldots\ldots \infty_1+n \ldots\ldots$$
$$\infty_1-1,\quad \infty_1-2 \ldots\ldots \infty_1-n \ldots\ldots$$

Prendendo come unità $(AA^{(\infty_1)})$ e costruendo la scala di origine A, indicheremo gli elementi di divisione coi segni:

$$\infty_1 . 2,\ \infty_1 . 3 \ldots\ldots \infty_1 . n_1 \pm n_2.$$

Def. I. Diremo che $(AA^{(\infty_1)})$ *contiene* ∞_1 *volte l'unità* (AA_1).

a. $$n_1+\infty_1 n_2 = \infty_1 . n_2 \pm n_1 = \infty_1 . n_2$$

rispetto al numero ∞ *come unità, ove* n_1 *e* n_2 *sono numeri della serie* (*I*) (*d*, 87).

Ind. II. Gli elementi invece del campo all'infinito di 2° ordine li indicheremo col simbolo ∞^2, indicando con $\infty_1{}^2$ il prodotto $\infty_1 . \infty_1$ che è rappresentato dal secondo estremo del segmento $(AA^{(\infty_2)})$, il quale contiene ∞_1 volte il segmento $(AA^{(\infty_1)})$ (def. I). Avremo i numeri:

$$\infty_1{}^2 \pm 1, \infty_1{}^2 \pm 2 \ldots\ldots \infty_1{}^2 \pm n \ldots\ldots \infty_1{}^2+\infty_1,\ \infty_1{}^2 \pm \infty_1 \pm 1 \ldots\ldots \infty_1{}^2 \pm \infty_1 n_1 \pm n_2 \ldots,$$
$$\infty_1{}^2 . 2, \ldots\ldots \infty_1{}^2 . 3, \ldots\ldots \infty_1{}^2 n_1 \pm \infty_1 n_2 \pm n_3, \ldots\ldots$$

ove n_1, n_2, n_3 sono numeri della serie (*I*).

b. $$m_1+\infty_1 m_2+\infty_1{}^2 m_3 = \infty_1{}^2 m_3 \pm \infty_1 n_2 \pm n_1 = \infty_1{}^2 m_3$$

rispetto al numero $\infty_1{}^2$ *come unità; ove* m_1, m_2, m_3, n_1, n_2 *sono numeri della serie* (*I*) (*d*, 87).

Ind. III. In generale indicheremo gli elementi del campo all'infinito di ordine m (def. IV, 86) col simbolo ∞^m, e ponendo $\infty_1{}^{m-1} . \infty_1 = \infty_1{}^m$, avremo in questo campo gli elementi indicati dai numeri:

$$\infty_1{}^m \pm n_1,\ \infty_1{}^m \pm \infty_1 n_1 \pm n_2,\ \infty_1{}^m \pm \infty_1{}^2 n_1 \pm \infty_1 n_2 \pm n_3,\ \ldots\ldots,\ \infty_1{}^m \pm \infty_1{}^{m-1} n_1$$
$$\pm \ldots\ldots \pm \infty_1 n_{m-1} \pm n_m,\ \ldots\ldots,\ \infty_1{}^m n \pm \infty_1{}^{m-1} n_1 \pm \ldots\ldots \pm \infty_1 n_{m-1} \pm n_m$$

ove n, n_1, n_2, ...,, n_m sono numeri della serie (I) e n_1, n_2, ..., n_m possono essere zero.

c. Si ha:

$$n_1+\infty_1 n_2+\ldots\ldots+\infty_1{}^{m-1} n_m+\infty_1{}^m n_{(m+1)} = \infty_1{}^m n_{(m+1)} \pm \infty_1{}^{m-1} n'_1 \pm \ldots\ldots$$
$$\pm \infty_1 n'_{m-1}+n'_m = \infty_1{}^m n_{(m+1)}$$

rispetto al numero ∞_1^m *come unità; dove* $m_1, m_2, \ldots, m_n, n_1, n_2, \ldots, m_m$ *sono numeri della serie* (*I*) (*d*, 87).

Oss. I. Il numero infinito limite rispetto ai numeri infiniti di $(m-1)^{mo}$ ordine, ossia il numero infinito limite di m^o ordine (def. II, 87) è rappresentato dal simbolo ∞^m il quale rispetto a un numero infinito d'ordine $(m-1)$ rappresenta tutti i numeri infiniti d'ordine m (def. II, 87 e *f*, 86).

§ 3 [1]).

Numeri transfiniti di Cantor — Perchè non possono applicarsi al confronto dei segmenti limitati della forma fondamentale.

90. *Ip. I.* **Esiste un sistema Σ ad una dimensione nel quale vi è sempre un segmento identico ad un segmento qualunque** (AB) **in un dato verso, il cui primo estremo è un elemento** X **qualunque del sistema Σ.**

Oss. I. Non risulta da questa ipotesi che vi sia sempre un altro segmento uguale ad (AB) nel verso del sistema Σ il cui secondo estremo sia X, come ammette la ip. II, (def. I, 68).

Colla ipotesi precedente possiamo costruire una scala (def. I, 80) e possiamo quindi stabilire la seguente ipotesi;

Ip. II. **Il campo di una scala nel sistema Σ** (def. III, 80) **determina un primo elemento fuori di esso nel verso della scala.**

Oss. II. Per dimostrare la possibilità di questa ipotesi, in luogo delle due scale complete N e N' della dimostrazione del teor. *b*, 82 senza cioè un primo segmento uguale all'unità primitiva, basta considerare invece che le due scale N e N' siano limitate dalle loro origini, e che l'origine di N' sia pienamente determinata da N, e sia il solo primo elemento che segue quelli di N.

Il segmento (AA_ω) essendo A l'origine fondamentale e A_ω l'elemento dell'ipotesi rappresenta appunto il campo della scala data.

Oss. III. Il segno ω che indica questo nuovo elemento si chiama pure *numero*, e come ogni numero n è il numero degli elementi di divisione $A_1A_2\ldots A_n$ della scala (def. II, 80), così ω è il numero di tutti gli elementi del gruppo

$$A_1A_2\ldots A_n \ldots A_\omega \quad \text{(def. I, II, 45).}$$

a. Il numero ω è maggiore di tutti i numeri interi finiti, ed ogni numero intero minore di ω è finito.

Perchè il gruppo $A_1\ldots A_\omega$ contiene tutti i gruppi naturali limitati dai quali derivano i numeri naturali (def. II, 46), e perchè un gruppo naturale non può corrispondere univocamente e nel medesimo ordine al gruppo $A_1\ldots A_\omega$ che non è naturale (c'', 43; def. 35 e oss. 28).

La seconda parte deriva dall'ip. II stessa.

Def. II. Il numero ω si chiama *infinito o transfinito* di Cantor. [2]).

---

1) Segniamo questo paragrafo con un asterisco perchè dei numeri di *G. Cantor* non facciamo alcun uso nei fondamenti della geometria, nè altrove in questa introduzione salvo il confronto coi nostri numeri infiniti, quindi noi abbandoneremo l'ip. II; la ip. I é gia contenuta nella ip. II, 71.

2) Vedi ad es. Acta Mathematica Vol. 2 pag. 381 e seg. Grundlagen einer allg. Mannigfaltigkeitslehre, Zeits. f. Ph. v. Fichte l. c., ecc.

Cantor definisce però il suo nnmero ω come *segno* che rappresenta tutta la serie (I) nella sua

Oss. IV. La distinzione che vi è tra il nostro numero infinito e il numero ω di Cantor è che non vi è nessun primo nostro numero infinito (*b.* e oss, II, 87), mentre nei numeri infiniti di Cantor ω è il primo in senso assoluto; cioè dato uno dei nostri numeri infiniti determinati, ad es.: ∞_1, vi sono ad es.: i uumeri $\infty_1 - n$ distinti da ∞_1, e compresi fra i numeri finiti e il numero ∞_1 (23).

b. Non si può rappresentare in senso assoluto col numero ω un elemento all' infinito del sistema omogeneo.

Perchè scelto un elemento A_ω nel segmento (AA_ω) infinito vi sono sempre altri elementi all'infinito che non coincidono con A_ω, ad es. tutti gli elementi della scala d'origine $(A_\omega$ e di unità (AA_1) del teor. *b*, 84.

c. Rispetto ad un numero finito come unità il numero ∞ è il numero ω.

Difatti rispetto ad un numero finito il numero ∞ rappresenta tutti i numeri all'infinito (*g*, 87), ed è quindi il primo e anche l'ultimo numero infinito.

c'. Il numero ω si può chiamare il numero di tutti i numeri interi finiti.

Difatti si ha indicando questo numero con S

$$S = \omega \qquad (g', 87 \text{ e } c).$$

Def. II. Il numero di un gruppo ordinato ottenuto coll'applicazione delle ipotesi precedenti dipende soltanto dalla corrispondenza univoca e del medesimo ordine fra gli elementi del gruppo e le unità del numero corrispondente (def. II, 45). (Vedi oss. I, 93).

d. Si ha:

$$n + \omega = \omega, \quad \omega + 1 > \omega$$

Difatti i gruppi

$$A_1 A_2 \dots A_n \dots, \quad A_n A_{n+1} \dots \qquad (1)$$

si corrispondono univocamente e nel medesimo ordine, essendo illimitati di 1ª specie (*c*, 46; *e*, 39; *b'*, 43) e quindi si corrispondono anche nello stesso modo

$$A_1 A_2 \dots A_n \dots A_\omega, \quad A_n A_{n+1} \dots A_\omega$$

---

successione naturale (Acta Math. p. 385) oppure come il risultato dell'astrazione dell' insieme dei numeri di essa nel loro ordine considerati come elementi (Zeis. f. Phil. Vol. 91, pag. 84).

Aggiungendo altre unità collo stesso principio ottiene i suoi numeri $\omega+1$, $\omega+2$ .... 2ω ... ecc. E col terzo principio di formazione separa i suoi numeri transfiniti in classi. La prima classe è data dai numeri della serie (I). La seconda classe è data da quei numeri infiniti tali che il sistema di numeri che precedono nelle serie dei numeri ottenuti uno qualunque della classe a partire da 1, corrisponde univocamente alla serie (I), o, come dice *Cantor*, che è della stessa *potenza* di (I). Dimostra che la classe (II) non ha la stessa potenza della (I) ed ha la potenza immediatamenle superiore. Il sistema dei numeri che precedono un numero della terza classe a partire da 1 è d' ugual potenza della seconda classe, e così via. Ma l' ipotesi da noi qui data è data pure da *Cantor*, laddove dice (Zeits. f. Phil. v. Fichte, 91 fasc. 1, pag. 97): Denken wir uns aber statt der endlichen Linien *AB* in derselben Richtung und mit demselben Anfangspunkte eine act. unendliche Linie *AO*, die ihren Ziehlpunkt *O* in Unendlichen hat, ecc.; e poi: Da die gedachte act. unendl. Gerade *AO*, ihrer Grösse nach, der von mir mit ω bezeichneten kleinsten transfiniten Ordnungszahl entspricht, ecc.

Gli elementi della serie NN', essendo N e N' limitate dalle loro origini, come quelli di tutta la serie dei numeri transfiniti di *Cantor*, soddisfano anche essi ai primi otto assiomi del sig. Peano (vedi nota 1, 82); per la serie suddetta non vale però il principio della dimostrazione da n a $n+1$. Per escludere la possibilità della serie suddetta o della serie dei numeri di *Cantor* basterebbe aggiungere alle otto proprietà suddette un' altra proprietà, e cioè che se a é un numero qualunque della serie, $a-1$ è pure un numero diverso da a.

Da ciò è chiaro che colle otto proprietà date da *Peano*, vi sono diverse possibilità: la serie NN' in cui N e N' sono limitate da un elemento, ed N' è la prima serie dopo N; senza cioè che fra N e N' vi siano altre serie identiche a N e N', come pure vi è la possibilità che fra N e N' vi siano invece altre serie identiche a N'; poi la nostra che N' non abbia un primo elemento e fra N e N' vi siano altre serie N' assoggettate all'ipotesi IV — come in $(o \dots 1)$ vi sono infiniti altri numeri. — Scelto uno di questi sistemi naturalmente non sono possibili con esso gli altri. — Ma ciò non significa che se uno è possibile, gli altri siano in sè falsi.

rappresentando il numero ω con un gruppo illimitato di 1ª specie avente per primo elemento limite un altro elemento A_ω, come abbiamo supposto (ip. II). Ai due di gruppi di (1) corrisponde dunque lo stesso numero ω (def. II). Ma in senso assoluto il primo si ottiene dal secondo coll'aggiunta degli elementi $A_1 A_2 \dots A_n$, dunque si ha:

$$n + \omega = \omega.$$

Invece i due gruppi

$$A_1 A_2 \dots A_n \dots, \; A_2 A_3 \dots A_1$$

oppure secondo la nostra ipotesi

$$A_1 A_2 \dots A_\omega, \; A_2 A_3 \dots A_\omega . A_1$$

non possono corrispondersi univocamente e nel medesimo ordine, perchè fatto corrispondere ad A_1 nel secondo gruppo l'elemento A_2, ad A_2, A_3, e così via; ad A_1 nel secondo gruppo non corrisponde alcun elemento nel primo, e quindi si ha:

$$\omega + 1 > \omega$$

Oss. V. **In senso assoluto i nostri numeri $n + \infty_1$ e $\infty_1 + n$ sono distinti dal numero ∞_1 ma sono gli stessi rispetto all'unità 1 (o ad un numero finito come unità), come rispetto all'unità corrispondente al gruppo rappresentante il numero ∞ (d e d', 87).**

Oss. VI. **Un' operazione eseguita col numero ω equivale ad un' operazione eseguita successivamente con tutti i numeri della serie (I) nel suo ordine naturale (ind. III, 47).**

e. Non vi è un primo segmento infinito di ordine ω; nè vi è un campo di segmenti limitati, ad es.: $(AA^{(\infty_1{}^\omega)})$, di ordine ω, se deve esistere un elemento X tale che (AX) e $(XA^{(\infty_1{}^\omega)})$ siano finiti rispetlo ad $(AA^{(\infty_1{}^\omega)})$; ma si può applicare l'ipot. IV di determinazione dei segmenti infiniti nella forma fondamentale un numero infinito della nostra serie.

Se fosse $(AA^{(\infty^\omega)})$ il primo segmento d'ordine ω rispetto all'unità (AA_1), ogni segmento (AX) di $(AA^{(\infty^\omega)})$ sarebbe infinito d'ordine finito, perchè $(AA^{(\infty^\omega)})$ è determinato dalla serie dei campi infiniti d'ordine finito, e quindi ogni elemento X determinato di $(AA^{(\infty^\omega)})$ cadrebbe in uno di questi campi, essendo $A^{(\infty^\omega)}$ il *primo* elemento in senso assoluto all'infinito di ordine ω.

Ma nel segmento $(AA^{(\infty^\omega)})$ possiamo considerare un segmento $(A^{(\infty^\omega)} A_1{}^{(\infty^\omega)}) \equiv (A_1 A)$ (def. I, 68 e b, 69) in modo che $A_1{}^{(\infty^\omega)}$ è un elemento distinto da $A^{(\infty^\omega)}$ in senso assoluto; e per la proprietà dell'elemento X, $(AA_1{}^{(\infty^\omega)})$ deve essere infinito d'ordine finito rispetto all'unità (AA_1). Siccome $(AA^{(\infty^\omega)})$ è contenuto, ad es. nel segmento $(AA_1{}^{(\infty^\omega)})$. 2 il quale è finito rispetto ad $(AA_1{}^{(\infty^\omega)})$ (def. II, i, 82) e quindi è infinito dello stesso ordine rispetto ad (AA_1) (def. IV, a, 86), così (AA^{∞^ω}) è pure infinito dello stesso ordine, non potendo essere nè di ordine superiore nè inferiore (def. II, 82), contro l'ipotesi. Supposto ora che vi sia un campo di elementi tali che preso uno di essi ad es. $A^{(\infty_1{}^\omega)}$, $(AA^{(\infty_1{}^\omega)})$ sia infinito d'ordine ω, e costruiti i campi infiniti d'ordine finito intorno a questo elemento i cui elementi saranno espressi dai numeri $\infty_1{}^\omega \pm \infty_1{}^m n_1 \pm {}^{m-1} n_2 \pm \dots \pm n_{m+1}$, l'elemento X dovrebbe essere com-

preso fra i campi d'ordine finito e i campi $\infty_1^{\omega} - \infty_1^m n_1 - \infty_1^{m-1} n_2 - \ldots - n_{m+1}$, qualunque sia m, e quindi (AX) e $(XA^{(\infty_1^{\omega})})$ dovrebbero essere di un ordine infinito che non può essere per ipotesi ω, nè $\omega - n$ essendo $\omega - n = \omega$, perchè X non appartiene al suddetto campo intorno ad $A^{(\infty_1^{\omega})}$; nè può essere di un ordine inferiore a ω perchè sarebbe di ordine finito contro il dato. Il teorema è dunque dimostrato nelle sue due prime parti.

Per dimostrarlo nella 3ª parte si osservi che in un segmento $(AA^{(\infty_1^{\infty_1})})$ si può sempre scegliere un elemento X tale che (AX) e $(XA^{(\infty_1^{\infty_1})})$ siano finiti rispetto ad $(AA^{(\infty_1^{\infty_1})})$ per la proprietà stessa del numero ∞_1, perchè il segmento $(AA^{(\infty_1^{\infty_1})})$ è infinito di 1° ordine rispetto al segmento $(AA^{(\infty_1^{\infty_1 - 1})})$ e i segmenti infiniti di 1° ordine rispetto ad un dato soddisfano all' ipotesi IV (def. II, 86).

Oss. VII. Applicare l'ipotesi IV un numero ∞_1 di volte è l'operazione che si eseguisce per ottenere da (AA_1) l'unità $(AA^{(\infty_1^{\infty_1})})$. Essa ha dunque un senso determinato [1]).

---

1) *G. Cantor* (Zeit. für. Ph. 91 fas. I p. 112, od anche Zur Lehre von Transfiniten. Halle 1890) dà un teorema sull'impossibilità della grandezza lineare infinitesima attuale che ha per immagine un segmento rettilineo continuo limitato, basando la dimostrazione sui suoi numeri transfiniti; e ritenendo vero in generale il suo teorema dimostra l'assioma V d'Archimede per i segmenti rettilinei (nota n. 81), il quale significa secondo la nostra def. II, 82 e il teor. *b*, 81 che sono finiti o della stessa specie (def. I, 86). Sebbene non dia la dimostrazione completa egli parte, pare, dal concetto che ogni grandezza lineare che è infinita *debba* essere rappresentata da uno dei suoi numeri transfiniti, e quindi dice che per certi teoremi su questi numeri si può dimostrare che se esistesse una grandezza infinitesima ζ la grandezza $\zeta\nu$ qualunque sia ν fra i suoi numeri transfiniti, rimarrebbe sempre più piccola di ogni grandezza finita, e che perciò ζ non può diventare finita qualunque sia ν; e applica questa dimostrazione alla retta. Ora, la retta, ha tutte le proprietà del sistema omogeneo nel campo dell'unità lineare sensibile, anzi fu il continuo intuitivo rettilineo (55) che ci guidò a stabilire la definizione del sistema omogeneo (68) e del sistema identico nella posizione delle sue parti (70) indipendentemente però dal concetto di scala (def. I, 80).

Ora ammettendo l' infinito attuale sulla retta la prima ipotesi che si presenta è quella che essa conservi la sua omogeneità anche all'infinito, e che quindi i suoi punti all'infinito siano assoggettati alla definizione del sistema omogeneo, indipendentemente, come dissi, dal concetto di finito e di infinito che deriva da quello di scala. In questo caso abbiamo sopra dimostrato (*b* e *f*) che i suoi punti all'infinito non si lasciano rappresentare dai numeri transfiniti di *Cantor* e si devono rappresentare invece coi nostri numeri infiniti. Coll'ipotesi invece di *Cantor* che i punti all'infinito della retta siano rappresentati dai numeri ω, $\omega + 1$ ecc., che per le considerazioni sopra svolte ritiene necessaria quando si ammette l' infinito attuale (vedi anche Zeits. für Phis. l. c. fasc. 1, ove confuta le ragioni del prof. Guteberlet contro l'infinito limitato, e la nostra nota 2 n. 82 e pref.) la retta non mantiene nei punti all'infinito la sua omogeneità e intorno ai punti all'infinito non possono essere quindi conservate le proprietà che derivano dall' esperienza.

Il sig. *Cantor* (l. c.) dice: Nun ist der Gedankengang jener Autoren (*O. Stolz* e *Du Bois-Reymond*), dass wenn man dieses vermeinitliche «Axiom» (quello di Archimede) fallen liesse, daraus ein Recht auf actual unendlichkleine Grössen, welche dort «Momente» genannt werden, hervorgehen würde. Aber aus dem oben von mir angeführten Satze folgt, wenn er auf *geradlinige stetige Strecken* angenwandt wird unmittelbar die Nothwendgkeit der Euclidischen Annahme (Euclide lib. V, def. 4).

Il signor *O. Stolz* ha invece dimostrato che per le sue grandezze infinitesime o quelle infinite e infinitesime del *Du Bois-Reymond* non vale il suddetto teorema di *Cantor* (Math. Annalen XXXI). Ma lo *Stolz* soggiunge aver dimostrato con la definizione del continuo analoga a quella di *Dedekind* che tutti i segmenti rettilinei soddisfano alla proprietà suddetta di Archimede (l. c. p. 608. Math. Annalen vol. XXII e Vorles. ü. Allg. Arith. vol. I pag. 69-83). Se come pare poi il sig. *Cantor* intende che le grandezze lineari che considera siano continue e «unter dem Bilde begrenzter geradliniger stetiger Streken sich vorstellen lassen» ripetiamo l'osservazione fatta in una recente nostra Memoria (Il continuo rettilineo e l'assioma V d' Archimede Atti della R. Acc. dei Lincei 1890) che nelle definizioni date da altri del continuo ordinario, è contenuto implicitamente l'assioma suddetto, del che è pure convenuto il sig. *Stolz*, In tal caso non occorre dunque ricorrere ai numeri transfiniti per dimostrare la impossibilità della grandezza infinitesima, perchè essa è esclusa *a priori* come avviene ad es. colla definizione del continuo data dal sig. *Cantor* stesso. (Vedi anche *Stolz* Math. Ann. XXII, nota pag. 508). (Vedi 3 nota n. 96).

§ 4.

Altra ipotesi (V) di costruzione dei segmenti della forma fondamentale — Segmenti e numeri infiniti d'ordine infinito — Segmenti multipli e summultipli secondo un numero infinito — Infinito, finito e unitá assoluti — Unità fondamentale.

91. *Oss. I.* Al n. precedente abbiamo visto che si può applicare l'ipotesl IV un numero di volte infinito appartenente alla serie già considerata dei numeri infiniti di ordine n, essendo n un numero qualunque della serie (I) (*e*, 90, ind. III 89). Ma non possiamo escludere che vi siano altri mezzi di determinazione di un segmento infinito senza venir meno alla definizione del sistema omogeneo, dell'ip. IV e delle proprietà che da esse derivano. La prima parte dell'ipotesi IV ci dice soltanto che dato un segmento infinito qualunque $(AA^{(\infty)})$ vi deve essere un elemento X (e quindi anche infiniti altri), tale che (AX) e $(XA^{(\infty)})$ sono pure infiniti, ma non quale sia il modo di determinazione del segmento $(XA^{(\infty)})$ rispetto al segmento (AA_1). Noi stabiliamo quindi l'ipotesi seguente:

Ip. V. **Ogni segmento infinito che non sia già d'ordinc finito m si ottiene applicando il principio dell'ip. IV un numero di volte infinito già ottenuto o un numero di volte infinito che si deduce dai nuovi segmenti così costruiti.**

a. L' ipotesi V è indipendente dalle precedenti.

Che sia indipendente è chiaro perchè da esse non deriva che esistano segmenti $(AA^{(\infty)})$ che soddisfino all'ipotesi V, nè deriva che non possano esistere tali segmenti (oss. I). L'ipotesi V esclude l'esistenza di segmenti $(AA^{(\infty)})$ che non si ottengano mediante l'applicazione ripetuta dell'ip. IV stessa sia pei segmenti sia pei numeri infiniti che risultano deducendo successivamente gli uni dagli altri.

Def. I. Chiameremo l'ip. V *ipotesi di costruzione* dei segmenti infiniti della forma fondamentale.

Def. II. I segmenti infiniti di ordine ∞_1^m a partire dall'origine A costituiscono un campo che chiameremo *campo all'infinito di ordine* ∞_1^m rispetto all'unità (AA_1). L'unità (AA_1) è infinitesima d'ordine ∞_1^m rispetto ad un segmento infinito *d'ordine* ∞_1^m.

E il campo finito che ha per unità un segmento infinito d'ordine ∞_1^m lo chiameremo *campo infinito d'ordine* ∞_1^m.

b. I segmenti infiniti di un dato ordine sono nulli rispetto ai segmenti infiniti d'ordine superiore.

Difatti essi sono trascurabili rispetto ai segmenti di ordine immediatamente superiore (*g*, 85).

Anche *Cantor* ha considerato dei numeri infiniti tali che se α è uno di questi numeri $\alpha+1=\alpha$ e che chiama «Cardinalzahlen» (vedi la nostra 2 nota n. 48). Egli però li definisce indipendentemente dall'ordine in cui si contano gli elementi, mentre per noi questa proprietà è conseguenza della proprietà dei segmenti stessi o dei gruppi dai quali i nostri numeri derivano, i quali sono differenti, come meglio si vedrà in seguito, dai Cardinalzahlen o *potenze* (Mächtigkeiten) di *Cantor*.

b'. I segmenti infinitesimi sono trascurabili rispetto ai segmenti infinitesimi d'ordine inferiore, finiti e infiniti (*b*, def. III, 86; *g*, 85).

Def. III. Così l'elemento limite del campo infinito d'ordine ∞_1^m lo chiameremo *elemento limite all' infinito d'ordine* ∞_1^{m+1} rispetto all'unità (AA_1).

Def. IV. I numeri corrispondenti agli elementi del campo infinito d'ordine ∞_1^m li chiamiamo *infiniti d'ordine* ∞_1^m, e li indichiamo col simbolo $\infty^{\infty_1^m}$; di modo che abbiamo in questo campo i numeri:

$$\infty_1^{\infty_1^m} \pm 1,\ \infty^{\infty_1^m} \pm 2 \ldots\ \infty_1^{\infty_1^m} \pm n \ldots$$

Oss. II. L'infinito $\infty_1^{\infty_1^m} . \infty_1^{\infty_1^{m-1}}$ è di ordine $\infty_1^m + \infty_1^{m-1}$.

Oss. III. Così otteniamo in base all'ipotesi IV i segmenti infiniti di ordine $\infty_1^{\infty_1^m}$, un campo all'infinito e infinito dello stesso ordine e un elemento limite d'ordine $\infty_1^{\infty_1^m} + 1$. Per conseguenza anche dei numeri infiniti dello stesso ordine, il cui campo sarà indicato col simbolo $\infty^{\infty_1^{\infty_1^m}}$. E così via illimitatamente (def. II, 32).

Ind. I. Indicheremo con lettere greche η, μ, ν ecc. i numeri infiniti e finiti, con lettere latine i numeri finiti. Un numero infinito d'ordine η lo indicheremo col simbolo ∞^η, e in tal caso ∞^η non rappresenta un solo numero ma definisce un campo determinato di numeri.

Quando parleremo però di un numero η determinato intenderemo un numero determinato in senso assoluto della classe dei numeri

$$0,\ 1,\ 2, \ldots\ n, \ldots\ \infty_1 - 1,\ \infty_1,\ \infty_1 + 1 \ldots\ \infty_1^m - 1,\ \infty_1^m,\ \infty_1^m + 1 \ldots$$

$$\text{(II)} \qquad \ldots \infty_1^{\infty_1^m} - 1,\ \infty_1^{\infty_1^m},\ \infty_1^{\infty_1^m} + 1 \ldots$$

$$\ldots \infty_1^{\infty_1^{\infty_1^m}} - 1,\ \infty_1^{\infty_1^{\infty_1^m}},\ \infty_1^{\infty_1^{\infty_1^m}} + \ldots 1$$

Ind. II. Ogni numero di questa classe si può esprimere col simbolo

$$Z = \infty_1^\mu n_1 \pm \infty_1^{\mu-1} n_2 \pm \ldots \pm \infty_1^m n_{\mu-m+1} + \ldots \pm n_{\mu+1}$$

ove $n_1, n_2, \ldots, n_{\mu+1}$ sono numeri qualunque dati della classe (*I*) (46), che possono essere tutti o in parte $= o$; μ è un numero di (*I*) o uno dei numeri infiniti di (II) ottenuti precedentemente dallo stesso simbolo *Z*.

Def. V. Per distinguere questi numeri da altri, tranne lo zero, li chiameremo *numeri interi*.

Oss. IV. Osserviamo che come nella scala dei numeri finiti è scelta l'origine *A* come rappresentante del numero *o*, così deve essere scelto un elemento determinato $A^{(\infty_1)}$ come rappresentante il numero ∞_1 nel campo all'infinito di 1° ordine, e così per ogni campo all'infinito, di modo che abbiamo si può dire tante origini quanti sono i campi all'infinito. È da osservare che quale origine nel campo ad es. all'infinito di 1° ordine può essere scelto ogni elemento di questo campo, e quindi come rappresentante il numero ∞_1; non però un altro elemento di un altro campo all'infinito, ma fissato che sia rimane sempre lo stesso. È inoltre necessario osservare, come noi supporremo, che date le origini agli altri elementi corrispondono numeri determinati della classe (II) o altri numeri da determinarsi, e che quindi nel confronto dei segmenti bisogna supporre già date le scale e le origini. (Vedi n. 103).

L'operazione ∞_1 per la definizione stessa del numero ∞_1 è così a senso unico poichè ogni altro segmento ottenuto differente dal segmento $(AA^{(\infty_1)})$ viene indicato con un simbolo diverso [1]).

Ai segmenti maggiori uguali o minori corrispondono numeri maggiori uguali o minori, e viceversa (oss. I, 87 e ip. V).

Conv. I. Noi diremo anche che il segmento (AA_η), essendo un numero η determinato della classe (II) in modo che (AA_η) rappresenta il numero η rispetto all'unità (AA_1) e all'origine A, *contiene* η segmenti *consecutivi* nel medesimo verso uguali ad (AA_1), senza che perciò ce li possiamo rappresentare come aventi successivamente un estremo comune, cioè senza salti nella rappresentazione, come avviene ad es. dai segmenti (AA_1) (A_1A_2), (A_2A_3)...., $(A_n\,A_{n+1})$ al segmento $(A_{\infty_1-n}A_{\infty_1-n+1})$.

c. Pei nuovi segmenti e numeri infiniti e infinitesimi valgono gli stessi teoremi dei n. 86 *e* 88.

Questi teoremi si dimostrano nello stesso modo mediante l'ip. V.

92. *a. Dati gli elementi* A, A_μ A_η, $A_{\mu+\eta}$ *di divisione della scala si ha:*

$$(AA_\eta) \equiv (A_\mu\,A_{\mu+\eta})$$

Difatti ciò significa che dall'elemento A_μ si considera un segmento uguale a $(AA\eta)$ (def. I, 68).

b. Vi è un solo numero σ *o un solo numero* μ, *che soddisfa l'uguaglianza* $\mu+\sigma=\eta$ (*f*, e *g*, 73).

Def. I. Se η è un numero determinato della classe (*II*) ed è dato un segmento (AB), il segmento (AC) che contiene η segmenti consecutivi nel medesimo verso uguali ad (AB) (conv. I, 91) si chiama *multiplo* di (AB) *secondo il numero* η, ed (AB) *summultiplo* di (AC) secondo lo stesso numero η.

E indicando (AC) con $(AB)\,\eta$ e (AB) con $(AC)\dfrac{1}{\eta}$ o $\dfrac{(AC)}{\eta}$ si ha per l'indicazione stessa:

$$c. \qquad (AC)\equiv(AB)\,\eta,\ (AB)\equiv(AC)\frac{1}{\eta}\equiv\frac{(AC)}{\eta} \qquad (b,\ 9).$$

Oss. I. Quando parliamo di multipli o summultipli di un segmento dato secondo i numeri della classe (II) noi supponiamo che essi siano determinati in modo unico. Riserviamo a più tardi la determinazione dei segmenti multipli e summultipli di un segmento dato quando saranno fissate le scale, come dobbiamo supporre (oss. IV, 91; vedi n. 103).

Ind. I. Se si ha un segmento multiplo (AB') di (AB) secondo il numero finito o infinito μ anzichè col simbolo $\dfrac{(AC)}{\eta}\mu$ lo indicheremo anche col simbolo $(AC)\dfrac{\mu}{\eta}$, e quindi:

---

1) Se nel campo considerato della nostra forma fondamentale, o meglio del nostro sistema omogeneo non sono applicabili i numeri di *G. Cantor* rispetto alla classe (II), si può far quello che *Cantor* ha fatto rispetto alla classe (I), e quindi stabilire un nuovo numero Ω come un primo numero maggiore di tutti i numeri di (II), e così via.

$d.\qquad (AB') \equiv \frac{(AC)}{\eta} \mu \equiv (AC) \frac{\mu}{\eta} \equiv (AC) \frac{\mu'}{\eta} \pm (AC) \frac{\mu''}{\eta} \quad (\mu = \mu' \pm \mu'') \qquad (b,\ 9).$

Oss. II. Il simbolo $\frac{\mu}{\eta}$ significa adunque che il segmento (AC) fu diviso in η parti uguali, e si è formato un segmento che contiene μ η^{me} parti di (AC). Ad es. (AA_η) contiene η unità (AA_1) (conv. I, 91).

d'. *Se* $\mu \lesseqgtr \eta$ *si ha* $(AC) \gtreqless (AC) \frac{\mu}{\eta}$.

Ciò risulta dal significato stesso del simbolo $\frac{\mu}{\eta}$ (oss. II e oss. I), e con una dimostrazione analoga a quella di b', 79.

$d''.\qquad (AC)\frac{o}{\eta} \equiv o.$

La dimostrazione è la stessa del teor. b'', 79.

Oss. III. La moltiplicazione di un numero η per un numero η' di (II) si definisce nello stesso modo dei numeri della classe (I) (52)

$e.\qquad \frac{(AC)}{\eta} \frac{\mu}{\eta} \equiv (AC) \frac{\mu}{\eta\eta'}.$

Supponiamo dapprima che la parte $\eta^{ma}(AB)$ di (AC) sia multiplo secondo il numero η' di un segmento (AB'), si avrà:

$$(AB) \equiv \frac{(AB)}{\eta'} \equiv (AB) \frac{1}{\eta'} \qquad (c)$$

e poichè

$$(AB') \equiv \frac{(AC)}{\eta} \qquad (c)$$

si ha:

$$(AB') \equiv \frac{(AC)}{\eta} \frac{1}{\eta'} \qquad (b,\ 9)$$

E siccome (AB) è multiplo di (AB') secondo il numero η' ne segue che (AC) è multiplo di (AB') secondo il numero $\eta\eta'$, (def, I, oss. III), ossia:

$$\frac{(AC)}{\eta} \frac{1}{\eta'} \equiv \frac{(AC)}{\eta\eta'} \equiv (AC) \frac{1}{\eta\eta'} \qquad (c \text{ e } d).$$

e quindi

$$\frac{(AC)}{\eta} \frac{1}{\eta'} \mu \equiv \frac{(AC)}{\eta\eta'} \mu \equiv (AC) \frac{1}{\eta\eta'} \mu. \qquad (\text{def. I, } b,\ 9)$$

dunque

$$\frac{(AC)}{\eta} \frac{\mu}{\eta'} \equiv \frac{(AC)}{\eta\eta'} \mu \equiv (AC) \frac{\mu}{\eta\eta'} \qquad (d)$$

che è precisamente la e.

$e'.\qquad \frac{(AC)}{\eta} \frac{1}{\eta} \equiv (AC) \frac{1}{\eta^2}.$

Def. II. Il segmento $(AB) \equiv (AC)\frac{\mu}{\eta}$ si chiama anche *frazione* del segmento (AC).

f. Ogni segmento multiplo di (AB) secondo un numero infinito di ordine μ è un segmento infinito d'ordine μ rispetto ad (AB). E ogni segmento multiplo di un segmento infinito d'ordine μ secondo un numero infinito d'ordine η è un segmento d'ordine $\mu+\eta$.

Difatti nel 1° caso il numero è della forma ∞^{μ} che si ottiene da ∞ moltiplicandolo μ volte per sè stesso (ind. I, 82 e def. IV, oss. II, III e ind. I, 91), che ci dà appunto da (AB) i segmenti infiniti d'ordine μ rispetto ad (AB) (ip. V).

La seconda proprietà è evidente essendo $\infty^{\mu}\,\infty^{\eta} = \infty^{\mu+\eta}$ (oss. II, e osserv. III, 91).

f'. Se (AB) è un segmento infinitesimo d'ordine η rispetto ad (AC) i multipli di (AB) secondo i numeri infiniti dello stesso ordine η sono finiti con (AC).

Difatti i multipli di (AB) secondo i numeri infiniti dello stesso ordine η sono infiniti dello stesso ordine rispetto ad (AB), e quindi sono fra loro finiti (f; c, 91; a, 86).

Ma (AC) è infinito d'ordine η rispetto ad (AB) (oss. III, 91 e def. III, 86), dunque ecc.

f''. Dato un segmento (AA_1) infinitesimo d'ordine η rispetto ad (AC), ogni segmento infinito d'ordine μ $(\eta = \mu + \sigma)$ rispetto ad (AA_1) è infinitesimo d'ordine σ rispetto ad (AC).

Difatti se (AC') è infinito d'ordine μ, e (AC) d'ordine $\eta = \mu + \sigma$ rispetto ad (AA_1), (AC) è infinito d'ordine σ rispetto ad (AC') (def. II, 86 e oss. III, 91), perciò (AC') è infinitesimo d'ordine σ (def. III, 86 e oss. III, 91) rispetto ad (AC).

g. Se un segmento della forma fondamentale è maggiore uguale o minore di un altro segmento della stessa forma o di forme fondamentali diverse, un segmento multiplo del primo secondo il numero η è maggiore, uguale o minore del multiplo dell'altro secondo lo stesso numero.

La dimostrazione di questo teor. è analoga a quello del teor. d, 79. Supposto il teor. vero per $\eta - 1$ lo si dimostra per η in base ai teor. g e g' del n. 73, che valgono indipendentemente dal concetto di scala e quindi dalla distinzione di finito, infinito e infinitesimo. Ma il teor. vale per η finito (d, 79) e l'operazione ∞_1 è assoggettata a questa proprietà (oss. IV, 91), e poichè $\eta - 1$ è ottenuto coll'addizione semplice combinata coll'operazione ∞_1, il teor. è dimostrato (oss. I).

g'. Se (AC), $(A'C')$ sono multipli secondo il numero η dei segmenti (AB) e $(A'B')$ e $(AC) \overset{>}{\underset{<}{\equiv}} (A'C')$ si ha $(AB) \overset{>}{\underset{<}{\equiv}} (A'B')$.

Dim. analoga a quella di d', 79.

h. Se $(AB) \equiv (AC)\frac{\mu}{\eta}$ ed è $(AB) \overset{<}{\underset{>}{\equiv}} (AC)$ si ha $\mu \overset{<}{\underset{>}{=}} \eta$, e reciprocamente.

Dim. analoga a quella del teor. e, 79.

i. Dato un segmento (AB) infinito d'ordine η esistono infiniti elementi X tali che (AX), (XB) sono finiti rispetto al segmento (AB).

Se η è un numero finito il teor. è conseguenza immediata dell'ip. IV e del teor. *b*, 85, essendo (AB) infinito di 1° ordine rispetto al segmento infinito di ordine $(\eta - 1)$ (def. II, 86).

I segmenti ottenuti applicando l'ipotesi IV un numero infinito di volte d'ordine finito hanno pure questa proprietà, perchè se il numero è ad es. ∞_1^m i segmenti ottenuti sono infiniti di 1° ordine rispetto al segmento ottenuto applicando l'ip. IV un numero $\infty_1^m - 1$ di volte. Dunque l'hanno anche i numeri d'ordine infinito

$$\infty_1^{\infty_1}, \ \infty_1^{\infty_1^2}, \ \ldots . \ \infty_1^{\infty_1^m} \ \ldots .$$

e poi i segmenti infiniti d'ordine $\infty_1^{\infty_1^{\infty_1}} \ldots . \ \infty_1^{\infty_1^{\infty_1^m}} \ldots .$

e così i numeri infiniti $\infty_1^{\infty_1^{\infty_1^m}}$ ecc.

Vale anche la proprietà per i segmenti infiniti d'ordine $\infty_1 + n$ essendo n un numero finito, perchè sono segmenti infiniti di 1° ordine rispetto ad un segmento d'ordine $\infty_1 + (n - 1)$. Cosí vale la stessa proprietà pei segmenti infiniti di ordine $\infty_1^2 \pm \infty_1 n_1 \pm n_2$. E in generale se il teorema vale pel segmento infinito d'ordine ∞_1^η vale anche pei segmenti d'ordine $\infty_1^\eta \pm \infty_1^{\eta-1} n_1 \pm \infty_1^{\eta-2} n_2 \pm \ldots . \pm n_{\eta+1}$.

Vale dunque anche pel numero $\infty_1^{\infty_1^\eta}$ e quindi anche pel segmento infinito d'ordine $\infty_1^{\infty_1^\eta}$ ecc.

Ma ogni segmento (AB) infinito della forma fondamentale è ottenuto in questo modo (ip. V) dunque il teor. è dimostrato.

Del resto basta anche applicare semplicemente per la dimostrazione il teor. *c*, 91 e l'ip. V secondo la quale un segmento è infinito di 1° ordine rispetto ad un altro segmento.

i'. Dato un segmento (AB) vi è sempre un segmento (AX) minore di esso pel quale vi è un numero finito m tale che

$$(AX)\, m > (AB) \qquad \text{(def. II, 82; } d\text{, 81).}$$

i''. Dato un numero α infinito d'ordine qualunque dato η vi sono sempre dei numeri σ minori di α tali che

$$\sigma\, m > \alpha$$

essendo m un numero finito.

l. Dati due segmenti $(AB) < (CD)$ qualunque, vi è sempre un numero finito o infinito determinato η tale che:

$$(AB)\, \eta \geqq (CD)$$

in modo che $(AB)\eta$ è finito rispetto a (CD). E se η è di ordine μ, indicando con 1_μ l'unità $(AA_{\infty_1^\mu})$ si ha un numero η_1 dello stesso ordine tale:

$$(AB)\, \eta_1 \leqq (CD) \leqq (AC)(\eta_1 + 1_\mu)$$

$$(AB)\eta_1 \cdot m \leqq (CD) < (AB)\eta_1 (m+1)$$

essendo m un numero finito.

Se (AB) e (CD) sono infiniti dello stesso ordine allora sono fra loro finiti, e quindi η è finito (a, 86 e c, 91). Se (AB) è infinito d'ordine μ, (CD) di ordine μ' e $\mu' = \mu + \mu''$, prendendo di (AB) un multiplo secondo un numero infinito d'ordine μ'' si ha un segmento dello stesso ordine di (CD) (f), e quindi finito con (CD) (a, 86 e c, 91).

Se η' è un numero infinito d'ordine μ'' si avrà uno dei tre casi

$$(AB)\eta' \begin{smallmatrix} < \\ \equiv \\ > \end{smallmatrix} (CD) \qquad (b,\ 73).$$

Nel 1° e 2° caso si può sempre dare un numero η dello stesso ordine di μ'' tale che $(AB)\eta > (CD)$, e in ogni caso un numero η_1 tale:

$$(AB)\eta_1 \leqq (CD) < (AB)(\eta_1 + 1_\mu).$$

È chiaro poi che essendo $(AB)\eta_1$ e (CD) finiti fra loro vi deve essere un numero m finito (che può essere anche 1) tale che:

$$(AB)\eta_1 m < (CD) < (AB)\eta_1 (m+1).$$

m. Ogni segmento dato (AB) è infinitesimo d'ordine determinato η rispetto ad un altro segmento maggiore (AC), se (AB) non è finito rispetto ad (AC).

Difatti vi deve essere un numero infinito determinato η tale che $(AB)\eta \geqq (AC)$, essendo $(AB)\eta$ finito con (AC) (l), e quindi (AB) è infinitesimo d'ordine η rispetto ad (AC), perchè $(AB)\eta$ è infinito dello stesso ordine di (AC) (def. III, 86 e oss. III, 91).

n. La forma fondamentale a partire da un suo elemento qualunque dato in un dato verso è maggiore di ogni segmento dato (AB) nel medesimo verso o nel verso opposto.

Sia A l'origine, (AB) il segmento dato. Poichè vi è sulla forma un segmento maggiore nel verso di (AB) stesso (a, 68), il ter. è dimostrato (def. I, 61). Se invece (AB) si considera nel verso opposto, la forma a partire da A in un verso è identica alla forma a partire da A nel verso opposto (def. I, b, 70, ip. II). Dunque ecc.

Def. III. Chiameremo perciò la forma fondamentale in uno o nell'altro verso *infinita assoluta* o *infinita d'ordine indeterminato* per distinguerla dai campi della scala che sono infiniti di ordine dato. — La indicheremo col segno $\boldsymbol{\Omega}$.

Oss. IV. Evidentemente questo assoluto è anche esso in un certo senso relativo, poichè data tutta la forma fondamentale a partire dall'origine A, possiamo assoggettarla nuovamente all'ip. IV, e in tal caso i numeri anzichè del tipo ∞_1 sarebbero di un altro tipo, ad es.: $\boldsymbol{\Omega}_1$, e così via [1]).

Def. IV. Chiameremo invece *campo finito assoluto* in un dato verso a partire da un elemento dato il campo dei segmenti limitati a due estremi nel

---

1) Come si hanno diverse classi di numeri transfiniti di G. Cantor. (Vedi nota 2, 90).

verso dato, nello stesso modo che abbiamo il campo relativo ad una data unità (AA_1) (def. V, 83).

S'intende che due segmenti di questo campo possono essere infiniti l'uno rispetto all'altro.

Def. V. Ed è perciò che un segmento dato (AB) qualunque lo chiameremo anche *finito assoluto*, e per *unità assoluta* intenderemo un segmento dato qualunque (AB).

Def. VI. Un segmento che diventa maggiore di ogni segmento dato (e quindi anche infinito) diremo che cresce indefinitamente od è indefinitamente grande od ha per *limite* tutta la forma fondamentale a partire dall'origine A nel verso della scala assoluta, vale a dire l'infinito assoluto, e scriveremo:

$$\lim_{\text{ass.}} (AX) \equiv \Omega.$$

Def. VII. Il segmento che corrisponde all'unità 1 della classe dei numeri (II) lo chiameremo anche *unità fondamentale*. E la prima origine la chiameremo *origine fondamentale* o più semplicemente *origine*.

§ 5.

Legge associativa, commutativa della somma; legge distributiva, e commutativa della moltiplicazione dei numeri della classe (II).

93. *a. Nella somma di tre o più numeri di (II) vale la legge associativa.*

Difatti vale per i segmenti che li rappresentano (*d*, 77).

Ind. I. Il segmento $(A_\mu A_\eta)$ i cui estremi rappresentano i numeri μ e η di (II) rispetto all'unità fondamentale (AA_1) e all'origine fondamentale A (def. VII, 92) $(\eta > \mu)$ lo indicheremo col segno $-\mu + \eta$ che chiameremo pure numero. Il numero $-\mu + \eta$ ha dunque così un significato determinato. Vedremo fra poco che è pure un numero della classe (II).

b. Se μ è un numero qualunque di (II) si ha $-\mu + \mu = o$.

Difatti se A_η conincide con A_μ è $(A_\mu A_\eta) \equiv o$ (def. I, 76) e perciò $-\mu + \mu = o$ (ind. I).

Oss. I. I numeri sono gruppi ordinati di elementi considerati come unità (def. II, 45). Se due numeri sono uguali essi si corrispondono univocamente e nel medesimo ordine (*b*, 60), ma dalla proprietà inversa non possiamo dire se siano uguali perchè potrebbe essere l'uno parte o uguale ad una parte dell'altro (def. II, 27), mentre la def. II, 45 non esclude mai questa diversità (*c*, 45). Pei numeri naturali invece basta che si corrispondano univocamente e nel medesimo ordine (*g*, 48), anzi che si corrispondano univocamente (*h*, 48) affinchè siano uguali anche secondo la def. II, 45, perchè in tal caso l'uno non può essere parte o uguale ad una parte dell'altro.

Certo è che se due gruppi ordinati non si corrispondono univocamente e nel medesimo ordine, essi non possono avere numeri uguali, perchè quando questi sono uguali i due gruppi si corrispondono univocamente e nel medesimo ordine (*b*, 60; *b*, 45 e *f*, 42).

Se il numero di un gruppo si fa dipendere soltanto dalla corrispondenza univoca e del medesimo ordine o soltanto dalla corrispcndenza univoca fra gli elementi

del gruppo e le unità del numero, allora l'uguaglianza dei numeri nel primo caso è data dalla corrispondenza univoca e del medesimo ordine, e nel secondo caso dalla sola corrispondenza univoca (oss. I, 45) [1]. Ma noi tenendo anche conto della diversità che proviene tra un sottogruppo e il gruppo (def. II, 27) non basta in generale la corrispondenza univoca e del medesimo ordine. Nè in ciò vi è contraddizione di sorta.

Per l'uguaglianza dei nostri numeri come dei nostri segmenti della forma fondamentale (71) occorre dunque aver riguardo al teor, *c*, 45 e al teor. *b*, 60 e ai teor. del n. 61. E poichè i numeri finiti e i nostri numeri infiniti formano una sola classe bisogna che le condizioni di uguaglianza di due numeri valgano in generale per due numeri qualunque di questa classe, vale a dire che i contrassegni di confronto siano i medesimi.

c. I numeri dei gruppi $AA_1A_2 \ldots A_\mu$, $A_1A_2 \ldots A_\mu A_{\mu+1}$, *essendo* μ *un numero qualunque dalla classe (II) sono uguali.*

Difatti al numero del gruppo $AA_1 \ldots, A_\mu$ deve essere uguale il numero di un gruppo di elementi a partire da A_1 nel medesimo verso, perché tale è anche la proprietà dei segmenti che i nostri numeri rappresentano (oss. I, def. I, 87 e *b*, 68), e quindi coll'ultimo elemento non compreso nel gruppo $A_1 \ldots A_\mu$ (*c*, 45). Dunque almeno dovrà essere un gruppo diverso, ma non potrà essere ad es. $A_1A_2 \ldots A_\mu A_{\mu+1} A_{\mu+2}$ perchè una tal legge di uguaglianza non vale quando μ è finito (*g*, 48); dunque per l'ultima parte dell'oss. I si ha *c*.

c'. $$1 + \mu = \mu + 1.$$

Perchè i due gruppi $AA_1 \ldots A_\mu$, $A_1A_2 \ldots A_{\mu+1}$ rappresentano i due numeri $1 + \mu$, $\mu + 1$ (oss. II, 87; oss. III e ind. I, 91) [2].

d. Per l'addizione di un numero finito di numeri di (II) vale la legge commutativa.

Se si ha:

$$n + \mu = \mu + n$$

si ha pure:

$$(n + 1) + \mu = n + (1 + \mu) = n + (\mu + 1) = (n + \mu) + 1$$
$$= (\mu + n) + 1 = \mu + (n + 1) \qquad (a \text{ o } f,\ 47 \text{ e } d,\ 47).$$

Ma la proprietà vale per $n = 1$, dunqne vale per tutti i numeri di (I) (*c'*, 46 e *l*, 39).

---

1) È ciò che fa il sig. *Cantor* nella definizione di uguaglianza dei suoi *Idealzahlen* e quindi anche dei suoi *Ordnungszahlen* o dei *Cardinalzahlen*. (Vedi nota, 48 e def. II, 90).

2) Se si considera ad es. la retta nel campo finito Euclideo percorsa in un dato verso a partire da A come zero e rispetto ad (AB) come unità rappresentando tutta la retta percorsa nel verso dato col simbolo ∞_1, dopo aver percorsa l'intera retta a partire da A, questo punto viene indicato col simbolo ∞_1, e quindi B', essendo $(B'A) \equiv (AB)$ col simbolo $\infty_1 - 1$ e B coi simboli 1 e $\infty_1 + 1$ ecc.

$$\underset{\infty_1 - 1}{B'} \quad \overset{0}{\underset{\infty_1}{A}} \quad \overset{1}{B} \longrightarrow$$

Se partiamo da B e percorriamo la resta fino ad A nel medesimo verso non otteniamo tutta la retta perchè manca il tratto (AB), e quindi

$$(1 \ldots \infty_1) < \infty_1 \text{ e } (1 \ldots \infty_1) + 1 = \infty_1$$

Ma $$\infty_1 - 1 + 1 = \infty_1$$

dunque $$(1 \ldots \infty_1) = \infty_1 - 1$$

essendo l'addizione sulla retta a senso unico.

Ma d'altra parte

$$1 + (1 \ldots \infty_1) = \infty_1$$

dunque $$\infty_1 - 1 + 1 = 1 + \infty_1 - 1$$

che è la legge commutativa. Veggasi l'ultima nota del n. 105.

Da ciò risulta anche:

$$\sigma + \mu - n = \sigma - n + \mu \qquad (2)$$

Difatti

$$\sigma + \mu - n = \sigma - n + n + \mu - n = \sigma - n + \mu + n - n = \sigma - n + \mu.$$

E perciò anche:

$$\mu \pm n = \pm n + \mu \qquad (2')$$

Essendo m un numero qualunque di (I) si ha $(s < m)$:

$$\infty_1^m n_1 \pm \infty_2^s n_2 = \infty_1^s (\infty_1^{m-s} n_1 \pm n_2)$$

∞_1^σ $(\infty_1^{\sigma'} n_1 \pm \infty_1^{\sigma''} n_2 \pm .....)$ significando appunto che si moltiplica prima ∞_1^σ per $\infty_1^{\sigma'} n_1$ poi per $\pm \infty_1^{\sigma''} n_2$ ecc. (oss. II e III, 91) e perchè $s + m - s = m$ (m, 48 e 54 opp. def. I, 76) e quindi:

$$\infty_1^m n_1 \pm \infty_1^s n_2 = \infty_1^s (\pm n_2 + \infty_1^{m-s} n_1) \qquad (2')$$

da cui

$$= \pm \infty_1^s n_2 + \infty_1^m n_1.$$

Se si ha quindi un numero infinito d'ordine finito m di (II) cioè:

$$\infty^m n_1 \pm \infty_1^{m-1} n_2 \pm .... \pm \infty_1 n_m \pm n_{m+1} \qquad \text{(ind II, 91)}$$

nel simbolo di questo numero per la (3) possiamo scambiare di posto i numeri che lo compongono mediante scambi di elementi consecutivi (c, 48).

Supponiamo che seguitando, questa proprietà sia dimostrata per il numero infinito ρ e pei numeri minori di ρ, e considerando un numero μ infinito d'ordine ρ (oss. III, 91) abbiamo:

$$\mu = \infty_1{}^\rho n_1 \pm \infty_1{}^{\rho-1} n_2 \pm .... \pm \infty_1 n_\rho \pm n_\rho + 1 \qquad \text{(ind I, 91)}$$

ma per ipotesi

$$\begin{aligned} \infty_1^\rho n_1 \pm \infty_1^{\rho'} n_2 &= \infty_1^{\rho'} (\infty_1^{\rho-\rho'} n_1 \pm n_2) \\ &= \infty_1^{\rho'} (\pm n_2 + \infty_1^{\rho-\rho'} n_1) \qquad (2') \\ &= \pm \infty_1^{\rho'} n_2 + \infty_1^\rho n_1 \end{aligned}$$

e quindi in μ possiamo scambiare di posto i numeri che lo compongono con scambi di numeri consecutivi.

Ora, per l'ipotesi V ogni numero di (II) si mette sotto la forma precedente (ind I, 91) e si ottiene ripetutamente da ρ quando è finito, poi infinito d'ordine finito, e così via, di guisa che in ogni ripetizione vale la suddetta proprietà; dunque essa vale per ogni numero di (II).

Si consideri ora un altro numero η di (II) che si pone sotto una forma analoga, e potendo scambiare di posto i numeri che compongono la somma $\mu + \eta$, si avrà:

$$\mu + \eta = \eta + \mu \qquad (4)$$

La legge commutativa vale per un numero finito di numeri, perchè ammessa per m si dimostra per $m+1$, (a, (4) e d, 47); ma vale per $m=2$, dunque vale per ogni numero finito m (c', 46; l 39).

e. I segmenti compresi fra due segmenti indicati da numeri qualunque di (II) si esprimono con numeri di (II).

Difatti siano μ e η due numeri di (*II*), $\eta > \mu$. Essi sono rappresentati da due segmenti della forma fondamentale a partire dall'origine fondamentale. Il segmento differenza viene rappresentato dal segno

$$-\mu+\eta=\sigma. \qquad \text{(ind. I)}$$

Vogliamo dimostrare che σ è pure un numero di (II).

Difatti si ha:

$$\eta-\mu=-\mu+\mu+\eta-\mu=-\mu+(\mu+\eta)-\mu=-\mu+(\eta+\mu)-\mu=$$
$$-\mu+\eta+(\mu-\mu)=-\mu+\eta \qquad (a, (4) \text{ e } d, 47)$$

dunque

$$\sigma=\eta-\mu$$

che è un numero di (II), essendo μ e η numeri di questa classe, perchè può porsi sotto la forma generale di uno di questi numeri (ind I, 91). Ad es.:

$$2+\sigma=\infty_1$$

quindi

$$\sigma=\infty_1-2$$

Per ottenere da 2 il numero ∞_1 basta aggiungere ad esso il numero ∞_1-2.

f. Per l'addizione di un numero infinito di numeri di (II) se il risultato rappresenta un segmento limitato della forma fondamentale vale la legge commutativa, senza però che sia alterata la natura del numero ∞_1.

Supponiamo che il numero dei numeri considerati sia infinito, dapprima ∞_1, e la loro somma rappresenti un numero di (II); si ha allora:

$$(3) \qquad \eta=\mu_1+\mu_2+\mu_3+\ldots+\mu_{\infty_1-n}+\mu_{\infty_1-n\pm1}+\ldots+\mu_{\infty_1-2}+\mu_{\infty_1-1}+\mu_{\infty_1}.$$

Questo numero è rappresentato dalla somma di due segmenti, uno dei quali rappresenta $(\mu_1+\mu_2+\mu_3+\ldots+\mu_{\infty_1-1})$ unità e l'altro μ_{∞_1} unità; dunque si ha:

$$(4) \qquad \eta=(\mu_1+\mu_2+\mu_3+\ldots+\mu_{\infty_1-1})+\mu_{\infty_1}$$

da cui

$$\eta=\mu_{\infty_1}+(\mu_1+\mu_2\ldots+\mu_{\infty_1-1})$$
$$=\mu_{\infty_1}+\mu_1+\mu_2+\ldots+\mu_{\infty_1-1} \qquad (a,\ 40;\ \text{def. I, } 87).$$

e quindi anche

$$\eta=\mu_{\infty_1}+(\mu_{\infty_1-1}+\mu_1+\ldots+\mu_{\infty_1-2})$$
$$=\mu_{\infty_1}+\mu_{\infty_1-1}+(\mu_1+\ldots+\mu_{\infty_1-2})$$

e così seguitando si trova

$$(5) \qquad \eta=\mu_{\infty_1}+\mu_{\infty_1-1}+\ldots+\mu_{\infty_1-n}+(\mu_1+\mu_2+\ldots+\mu_n+\ldots+\mu_{\infty_1-n+1}).$$

Col crescere di n portiamo per primi i numeri del campo μ_{∞_1-n} ($n = o$, 1, 2 .... m ....) e per ultimi i numeri i cui indici sono .... n .... 1.

In ciascuno di questi campi si possono poi scambiare di posto gli elementi fra loro. Di più si ha:

$$\eta = (\mu_{\infty_1} + \mu_1) + (\mu_2 + \dots + \mu_{\infty_1-1}) \qquad (a,\ 40,\ d,\ 77)$$
$$= (\mu_1 + \mu_{\infty_1}) + (\mu_2 + \dots + \mu_{\infty_1-1}) \qquad (b)$$
$$= \mu_1 + (\mu_{\infty_1} + \mu_2 + \dots + \mu_{\infty_1-1})$$

dunque μ_{∞_1} si può portare al posto di μ_2 e quindi di ogni altro numero dato μ_n. Così si può fare per μ_{∞_1-1}. Ogni numero dato del secondo campo si può dunque portare nel posto di ogni numero dato del primo, e viceversa.

Il teor. per il numero ∞_1 è dimostrato.

Oss. II. Per il criterio di uguaglianza dei numeri rappresentati da un gruppo, non può essere che gli elementi del grupppo $A_1 A_2 \dots A_n \dots A_{\infty_1-n} \dots A_{\infty_1-1} A_{\infty_1}$ corrispondano univocamente nel medesimo ordine ad es. al gruppo:

$$A_1 A_2 \dots A_n \dots A_{\infty_1} A_{\infty_1-1} \dots A_{\infty_1-n} \dots$$

nel quale A_{∞_1} è primo elemento dopo la prima serie illimitata di 1ª specie $A_1 A_2 \dots A_n \dots$ (c', 46), perchè all'elemento A_{∞_1} nel secondo dovrebbe corrispondere il primo elemento,che non c'è, dopo la stessa serie nel primo gruppo e perciò i due gruppi non possono avere numeri uguali (oss. I). Dunque nei mutamenti di posto affinchè la somma non muti bisogna che si possa stabilire la suddetta corrispondenza fra i gruppi di unità così ottenuti, e quindi bisogna che il gruppo si componga di serie opposte, come ad es.: 1 2 3 .... n ...., ... $\infty_1 - n$ .... ∞_1. Noi diciamo perciò che *non deve essere alterata la natura del numero* ∞_1.

Se si ha ora

$$\eta = \mu_1 + \mu_2 + \dots + \mu_{\infty_1} + \mu_{\infty_1+1}$$

valendo il teor. pei primi ∞_1 numeri, e potendo scambiare μ_{∞_1+1} con μ_{∞_1}, esso vale evidentemente anche per $\infty_1 + 1$ numeri, e così analogamente per $\infty_1 \pm m$ numeri.

Ora si abbia

$$\eta = \mu_1 + \mu_2 \dots + \mu_{\infty_1} + \mu_{\infty_1+1} + \dots + \mu_{\infty_1 . 2}$$

che si può scrivere così:

$$\eta = (\mu_1 + \dots + \mu_{\infty_1}) + (\mu_{\infty_1+1} + \dots + \mu_{\infty_1 . 2}).$$

Ciascuno dei gruppi di cui si compone η contiene ∞_1 numeri, e valendo il teorema per ognuno di questi gruppi e potendo scambiare l'ultimo elemento del primo col primo elemento del secondo, il teor. è pure dimostrato pel numero $\infty_1 . 2$.

Se il numero η è dato dalla somma di ∞_1^2 numeri, siccome $\infty_1 . \infty_1 = \infty_1^2$ (89), il numero η è di ∞_1 gruppi di ∞_1 numeri μ, pei quali vale il teor. suddetto; e poichè esso vale per questi gruppi considerati come numeri e si può passare da un gruppo ad un altro scambiando l'ultimo elemento del primo col primo elemento del successivo, il teorema vale anche pel numero ∞_1^2. Supposto che esso valga per ∞_1^m numeri si dimostra nello stesso modo che vale

pel numero ∞_1^{m+1}, oltre che pei numeri intermedî. Ma vale per $m=2$ dunque vale per m finito qualunque (l, 39).

Sia dato un numero η somma di $\infty_1^{\infty_1}$ numeri μ. Siano:

$$Z = \infty_1^{\infty_1 - m} n_1 \pm \infty_1^{\infty_1 - m - 1} n_2 \pm \ \ldots \ \pm n_{\infty_1 - m + 1},$$

$$Z' = \infty^{\infty_1 - r} n_1 \pm \infty_1^{\infty_1 - r - 1} n_2 \pm \ldots \pm \ldots n_{\infty_1 - r \pm 1}$$

gli indici che indicano nella somma i posti di due numeri μ, e di cui il primo sia ad es. maggiore del secondo; allora possiamo separare i numeri μ della somma nei seguenti ∞_1 gruppi successivi riferendoci soltanto ai loro indici. I numeri m e n in Z e Z' possono essere anche infiniti $\leqq \infty_1$.

$$\underset{1}{(1 \ldots \infty_1)}\ \underset{2}{(\infty_1 + 1, \ldots \infty_1^2)} + \underset{3}{(\infty_1^2 + 1, \ldots, \infty_1^3)} + \ldots + \underset{\infty_1 - m}{(\infty_1^{\infty_1 - m - 1} \ldots, Z - 1)} +$$

$$+ \underset{\infty_1 - m + 1}{(Z. \ldots \infty_1^{\infty_1 - m + 1})} + \ldots + \underset{\infty_1 - r}{(\infty_1^{\infty_1 - r - 1} \ldots Z' - 1)} + \ldots + \underset{\infty_1 - r + 1}{(Z \ldots \infty_1^{\infty_1 - r + 1})} + \ldots$$

$$+ \underset{\infty_1}{(\infty_1^{\infty_1 - 1}\, \infty_1^{\infty_1})}$$

Ma in questi ∞_1 gruppi senza alterare la somma dei numeri che rappresentano possiamo scambiar di posto i due gruppi $(Z \ldots \infty_1^{\infty_1 - m + 1})$, $(Z' \ldots \infty^{\infty_1 - r + 1})$, e quindi i due numeri dati che occupano i posti indicati da Z e Z'.

Se $Z' = \infty_1^{\infty_1}$ basta considerare come ultimo gruppo il numero $\infty_1^{\infty_1}$ stesso.

Il teor. vale dunque anche per la somma di $\infty_1^{\infty_1}$ numeri.

Supponiamo che il teor. sia stato dimostrato per un numero μ; esso si dimostra anche pel numero ∞_1^{μ} collo stesso ragionamento usato pel numero $\infty_1^{\infty_1}$, scomponendo cioè il gruppo ordinato di ∞_1^{μ} numeri in μ gruppi, e in due dei quali siano primi due numeri i cui posti siano indicati dai numeri Z e Z' dati minori di μ, e l'uno minore dell'altro. Valendo la proprietà per μ si possono scambiare di posto i due gruppi cui appartengono Z e Z' e quindi anche i due numeri dati. Così per tutti gli altri numeri tenendo sempre conto della natura del numero ∞_1. La stessa dimostrazione vale per ogni numero ∞_1^{ρ} essendo $\rho < \mu$.

Il teor. vale anche per ogni numero $\infty_1^{\mu} n_1$, ove n_1 è un numero qualunque dato di (I), dunque vale anche pel numero

$$Z_1 = \infty_1^{\mu} n_1 \pm \infty_1^{\mu - 1} n_2 \pm \ldots \pm n_{\mu + 1}$$

vale a dire se il teor. vale per μ vale anche pel numero Z_1. Ma è stato dimostrato per μ finito (d) e quindi anche pei numeri infiniti d'ordine finito e perciò ancora pei numeri infiniti d'ordine infinito che a sua volta è d'ordine finito, e così via. E poichè ogni numero di (II) per l'ip. V è ottenuto in questo modo, valendo il teor. in ogni ripetizione, vale in generale.

Es. 1. $\quad 2.\infty_1 = \left|\underset{1}{\overline{1}} + \underset{1}{1}\right| + \left|\underset{1}{\overline{1}} + \underset{2}{1}\right| + \ldots + \left|\underset{n}{\overline{1}} + \underset{n}{1}\right| + \left|\underset{n+1}{\overline{1}} + \underset{n+1}{1}\right| + \ldots$

$$+\left|\overline{1}_{\infty_1-n-1}+1_{\infty_1-n-1}\right|+\left|\overline{1}_{\infty_1-n}+1_{\infty_1-n}\right|+\dots+\left|\overline{1}_{\infty_1-1}+1_{\infty_1-1}\right|+\left|\overline{1}_{\infty_1}+1_{\infty_1}\right|$$

$$=\left|\overline{1}_1+\overline{1}_1+\dots+\overline{1}_n\right|+\left|1_1+1_1+\dots+1_n\right|+\left|\overline{1}_{n+1}+1_{n+1}\right|+\dots+\left|\overline{1}_{\infty_1-n-1}+1_{\infty_1-n-1}\right|$$

$$+\left|1_{\infty_1-n}+1_{\infty_1-n+1}+\dots+1_{\infty_1}\right|+\left|\overline{1}_{\infty_1-n}+\overline{1}_{\infty_1-n+1}+\dots+\overline{1}_{\infty_1}\right|$$

$$=\left|1_1+1_2+\dots 1_n+1_{\infty_1-n}+1_{\infty_1-n+1}+\dots+1_{\infty_1}\right|$$

$$+\left|\overline{1}_{n+1}+1_{n+1}\right|+\dots+\left|\overline{1}_{\infty_1-n+1}+1_{\infty_1-n-1}\right|$$

$$+\left|\overline{1}_1+\overline{1}_2+\dots+\overline{1}_n+\overline{1}_{\infty_1-n}+\dots+\overline{1}_{\infty_1}\right|$$

portando $\overline{1}_{n+1}$ e 1_{n+1} rispettivamente dopo $\overline{1}_n$ e 1_n; $\overline{1}_{\infty_1-n-1}$ 1_{∞_1-n-1} rispettivamente dopo $\overline{1}_{\infty_1-n}$ e 1_{∞_1-n} col crescere indefinitamente di n si ha

$$=\left|1_1+1_2+1_3+\dots+1_n+\dots+1_{\infty_1-n}+\dots+1_{\infty_1}\right|$$

$$+\left|\overline{1}_1+\overline{1}_2+\dots+\overline{1}_n+\dots+\overline{1}_{\infty_1-n}+\overline{1}_{\infty_1-n-1}+\dots+\overline{1}_{\infty_1}\right|$$

cioè

$$=\infty_1 . 2$$

Es. 2. $$\infty_1=1_1+1_2+\dots+1_n+\dots+1_{\infty_1-n}+1_{\infty_1-n+1}+\dots+1_{\infty_1}$$

$$=\left|1_1+1_2+\dots 1_n\right|+\left|1_{n+1}+\dots+1_{\infty_1-(n+1)}\right|+\left|1_{\infty_1-n}+\dots+1_{\infty_1}\right|$$

$$=\left|1_{n+1}+\dots+1_{\infty_1-(n+1)}\right|+\left|1_{\infty_1-n}+\dots+1_{\infty_1}\right|+\left|1_1+1_2+\dots+1_n\right|$$

$$=\left|1_{n+1}+\dots+1_{\infty_1-(n+1)}\right|+\left|1_{\infty_1}+\dots+1_{\infty_1-n}+1_n+1_{n-1}+\dots+1_1\right|$$

coll'aumentare di n l'unità 1_{n+1} viene portata prima di 1_n e l'unità $1_{\infty_1-(n+1)}$ ossia 1_{∞_1-n-1} dopo 1_{∞_1-n}, e quindi coll'aumentare indefinitamente di n si esaurisce la prima serie e si completa la seconda; si ha dunque:

$$\infty_1 = 1_{\infty_1} + \ldots + 1_{\infty_1 - n} + \ldots + 1_{n} + 1_{n-1} + \ldots + 1_{1}$$

Es. 3. $\infty_1 - m = 1_1 + 1_2 + \ldots + 1_m + \ldots + 1_{n+1} + \ldots + 1_{\infty_1-(n+1)} + 1_{\infty_1-n} + \ldots + 1_{\infty_1-(m+1)} + 1_{\infty_1-m}$

$$= \left| 1_{n+1} + \ldots + 1_{\infty_1-(n+1)} \right| + \left| 1_{\infty_1-n} + \ldots + 1_{\infty_1-m} \right| + \left| 1_{n} + 1_{n-1} + \ldots + 1_{1} \right|$$

$$= \left| 1_{n+1} + \ldots + 1_{\infty_1-(n+1)} \right| + \left| 1_{\infty_1-m} + \ldots + 1_{\infty_1-n} + 1_{n} + 1_{n-1} + \ldots + 1 \right|$$

e quindi

$$= 1_{\infty_1-m} + 1_{\infty_1-m-1} + \ldots + 1_{1}$$

Analogamente per $\infty_1 + m$.

Es. 4. $\infty_1 = 1_1 + 1_2 + 1_3 + \ldots + 1_{2n} + 1_{2n+1} + 1_{2n+2} + \ldots$

$$+ 1_{\infty_1-2n-2} + 1_{\infty_1-2n-1} + 1_{\infty_1-2n} + \ldots + 1_{\infty_1-1} + 1_{\infty_1}$$

$$= \left| 1_2 + 1_4 + \ldots + 1_{2n} + \vdots\, 1_1 + 1_3 + \ldots + 1_{2n-1} + 1_{2n+1} \right| + \left| 1_{2n+2} + 1_{2n+3} + \ldots + 1_{\infty_1-2n-3} + \ldots \right.$$

$$\left. + 1_{\infty_1-2n-3} + 1_{\infty_1-2n-2} \right| + \left| 1_{\infty_1-2n-1} + 1_{\infty_1-2n+1} + \ldots + 1_{\infty_1-1} \,\vdots\, + 1_{\infty_1-2n} + \ldots + 1_{\infty_1-2} + 1_{\infty_1} \right|$$

$$= \left| 1_2 + 1_4 + \ldots + 1_{2n} + \vdots\, 1_{\infty_1-2n} + 1_{\infty_1-2n+2} + \ldots + 1_{\infty_1-2} + 1_{\infty_1} \right| +$$

$$\left| + 1_{2n+2} + 1_{2n+3} + \ldots + 1_{\infty_1 2n-3} + 1_{\infty_1-2n-2} \right| + \left| 1_1 + 1_3 + \ldots + 1_{2n+1} + \vdots\, 1_{\infty_1-2n-1} + \ldots + 1_{\infty_1-1} \right|$$

Ora se si porta nella prima separazione 1_{2n+2} dopo 1_{2n} e 1_{∞_1-2n-2} prima di 1_{∞_1-2n}, e 1_{2n+3} dopo 1_{2n+1} e 1_{∞_1-2n-3} prima di 1_{∞_1-2n-1} nella terza, e così seguitando indefinitamente fino all'esaurimento della serie intermedia si completano le due serie estreme, ma con questo che esse sono uguali, e la serie primitiva contiene il doppio di unità di ciascuna di esse, perchè le unità della prima separazione sono $2n+1$ e $2n+1$ sono quelle della terza mentre poi della serie intermedia si portano successivamente i termini due a due in ambe le serie.

Indicando con ∞'_1 il numero corrispondente a queste due serie si ha

$$\infty_1 = \infty'_1 \,.\, 2$$

che scriveremo anche così:

$$\infty'_1 = \frac{\infty_1}{2}.$$

Questo numero non appartiene alla classe (II), ma è compreso fra 0 e ∞_1. Però finchè non si suppone esistente questo numero e sono date soltanto le due serie

$123 \ldots n \ldots, \infty_1 - n \ldots \infty_1$, allora non possiamo formare colle due serie opposte due coppie di serie opposte. In tal caso n è quanto grande si vuole ma bisogna considerarlo sempre in uno stato dato, e non già nel senso che diventi indefinitamente grande. Si possono considerare però tutti i numeri dati della divisione intermedia nella prima e nella terza separazione [1].

f'. Se in un gruppo ordinato di uno dei nostri numeri infiniti di elementi si cambia l'ordine degli elementi senza alterare la natura del numero ∞_1 esso rappresenta sempre lo stesso numero di (II).

g. Per la moltiplicazione dei numeri di (II) vale la legge distributiva.

Difatti se si ha un numero determinato di (II), cioè:

$$(1) \qquad \infty_1^{\mu} n_1 \pm \infty_1^{\mu-1} n_2 \pm \infty_1^{\mu-m} n_m \pm \ldots \pm \infty_1^2 n_{\mu-2} \pm \infty_1 n_\mu \pm n_{\mu+1}$$

e lo si moltiplica per un numero η, ciò significa che il numero (1) si somma η volte. Ora, per la legge commutativa della somma (*d* e *f*) potremo considerare prima $\infty_1^{\mu} n_1 \eta$ poi $\pm \infty_1^{\mu-1} n_2 \eta$, e così via, e quindi si ha:

$$(\infty_1^{\mu} n_1 \pm \infty_1^{\mu-1} n_2 \pm \ldots \pm n^{\mu+1})\ \eta = \infty_1^{\mu} n_1 \eta \pm \infty_1^{\mu-1} n_2 \eta \pm \ldots \pm \eta_{\mu+1}.$$

Se invece si moltiplica il numero η per (1) ciò significa che si deve sommare il segmento rappresentato da η le unità contenute in (1), e quindi per il senso stesso dell'operazione si ha:

$$\eta\,(\infty_1^{\mu} n_1 \pm \infty_1^{\mu-1} n_2 \pm \ldots \pm n_{\mu+1}) = \eta\,\infty_1^{\mu} n_1 \pm \eta\,\infty_1^{\mu-1} n_2 \pm \ldots \pm \eta\, n_{\mu+1}$$

Se si tratta della moltiplicazione di due numeri (1), vale lo stesso ragionamento.

h. Per la divisione dei numeri di (II) *vale pure la legge distributiva.* (oss. III, 92 e def. I, 53).

Ciò deriva dalla definizione stessa di questa operazione come quella che insegna a determinare il moltiplicando dato il prodotto e il moltiplicatore.

i. Per la moltiplicazione di due numeri di (II) vale la legge commutativa.

Dim. I. Sia dato il prodotto $\mu . \eta$. Il gruppo che lo rappresenta contiene η gruppi consecutivi (conv. I, 91) di μ elementi. Abbiamo dunque:

$$\mu . \eta = \mu^{(1)} + \mu^{(2)} + \ldots + \mu^{(n)} + \ldots + \mu^{(\eta)}.$$

Considerando in ciascuno la prima unità, e disponendo queste unità come primo, secondo, ecc. η^{mo} elemento (*f*), e così ripetendo l'operazione fino all'esaurimento delle unità del numero μ, si ha:

$$\mu . \eta = \eta^{(1)} + \eta^{(2)} + \ldots + \eta^{(\mu)} = \eta . \mu.$$

Dim. II. Si è visto che

$$2\ \infty_1 = \infty_1 2 \qquad \text{(es. 1).}$$

---

1) Se nell'esempio dato della retta (nota prec.) dopo aver percorsa l'intera retta da A nel verso dato A rappresentasse il numero $\frac{\infty_1}{2}$ percorrendo un' altra volta la retta essa rappresenterebbe il numero ∞_1

Ammesso il teor. per $n-1$ lo si dimostra per n, cioè:

$$n\,\infty_1 = \infty_1\,n$$

perchè

$$n\,\infty_1 = ((n-1)+1)\,\infty_1 = (n-1)\,\infty_1 + \infty_1 \qquad (g)$$

$$= \infty_1\,(n-1) + \infty_1 = \infty_1\,.\,n. \qquad (d,\ 47)$$

Così si ha:

$$n\,(\infty_1 \pm m) = \infty_1\,n \pm m\,n = (\infty_1 \pm m)\,n \qquad (d)$$

Ora

$$2\,\infty_1^2 = 2\,.\,\infty_1\,.\,\infty_1 = \infty_1\,.\,2\,.\,\infty_1 = \infty_1^2\,2$$

similmente si dimostra che:

$$\infty_1^2\,.\,n = n\,.\,\infty_1^2$$

e perciò

$$(\infty_1^2\,n_1 \pm \infty_1\,n_2 \pm n_3)\;m = \infty_1^2\,n_1\,m \pm \infty_1\,n_2\,m \pm n_3\,m$$

$$= m\,\infty_1^2\,n_1 \pm m\,\infty_1\,n_2 \pm m\,n_3$$

$$= m\,(\infty_1^2\,n_1 \pm \infty_1\,n_2 \pm n_3). \qquad (d)$$

Il numero $\infty_1^{\infty_1}$ è ottenuto dalla somma di ∞_1 numeri uguali a $\infty_1^{\infty-1}$; applicando dunque la dimostrazione pel caso dell'unità 1 (es. 1) si ha;

$$2\,\infty_1^{\infty_1} = \infty_1^{\infty_1}\,.\,2$$

Così vale la stessa dimostrazione per ∞_1^{μ} essendo esso la somma di ∞_1 numeri uguali a $\infty_1^{\mu-1}$, e si ha:

$$2\;\infty_1^{\mu} = \infty_1^{\mu}\,2$$

e quindi anche

$$m\,\infty_1^{\mu} = \infty_1^{\mu}\,m.$$

Ora essendo dati due numeri μ e η rispettivamente di ordine μ' e η' (def. II, 86 e oss. III, 91) si pongono sotto la forma

$$\infty_1^{\mu'}\,m_1 \pm \infty_1^{\mu'-1}\,m_2 \pm \ldots\ldots \pm m_{\mu'+1}$$

$$\infty_1^{\eta'}\,n_1 \pm \infty_1^{\eta'-1}\,n_2 \pm \ldots\ldots \pm n_{\eta'+1} \qquad \text{(ind I, 91)}$$

valendo la legge distributiva, e poichè $\infty_1^{\mu'}\,\infty_1^{\eta'} = \infty_1^{\mu'+\eta'} = \infty_1^{\eta'+\mu'}$ per la legge commutativa dei singoli prodotti della somma si ha:

$$\mu\,.\,\eta = \eta\,.\,\mu.$$

l. I numeri della classe (II) si lasciano aggruppare successivamente in serie illimitate di 1ª specie, e queste in serie pure illimitate di 1ª specie, e così via illimitamente.

Difatti ogni numero della classe (II) è della forma Z (ind. I, 91). Ponendo n_1 $n_2 = \ldots\ldots = n_\mu = o$ e lasciando variare n_{μ_1} si ha la serie (I), che indico con $S_1^{(o)}$. Per $n_1 = n_2 = \ldots\ldots n_{\mu-1} = o$ lasciando variare n_μ, $n_{\mu+1}$ abbiamo per ogni valore di n_μ una serie S_1, e quindi per tutti i valori di n_μ si ha una serie $S_2^{(o)}$ il-

limitata di 1ª specie rispetto alle S_1 [1]. Così seguitando si vede che i numeri di ordine μ costituiscono una serie S_μ che dirò di μ^{ma} specie.

La prima serie $S_3^{(o)}$ è:

$$\left.\begin{array}{l}
\left.\begin{array}{lllll}
o \quad 1 \quad 2 & \ldots\ n & \ldots & S_1^{(o)} \\
\cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot & & & \\
\ldots \infty_1 - m_1 \ \ldots & \infty_1 \ \ldots & \infty_1 + m_1 \ \ldots & S_1^{(1)} \\
\cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot & & & \\
\ldots \infty_1 m_1 - m_2 \ \ldots & \infty_1 m_1 \ \ldots & \infty_1 m_1 + m_2 \ \ldots & S_1^{(m_1)}
\end{array}\right\} S_2^{(o)} \\
\cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\
\left.\begin{array}{llll}
\infty_1^2 - \infty_1 m_1 - m_2 \ \ldots & \infty_1^2 - \infty_1 m_1 \ \ldots & \infty_1 - \infty_1 m_1 + m_2 \ \ldots & S_1^{(\infty_1 - m_1)} \\
\cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot & & & \\
\infty_1^2 - m_1 \ \ldots & \infty_1^2 \ \ldots & \infty_1^2 + m_1 & S_1^{(\infty_1)} \\
\cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot & & & \\
\infty_1^2 + \infty_1 m_1 - m_2 \ \ldots & \infty_1^2 + \infty_1 m_1 \ \ldots & \infty_1^2 + \infty_1 m_1 + m_2 \ \ldots & S_1^{(\infty_1 + m_1)}
\end{array}\right\} S_2^{(1)} \\
\cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\
\infty_1^2 m_1 + \infty_1 m_2 - m_3 \ldots \ \infty_1^2 m_1 + \infty_1 m_2 \ldots \ \infty_1^2 m_1 + \infty_1 m_2 + m_3 \ldots \ S_1^{(\infty_1 m_1 + m_2)}
\end{array}\right\} S_3^{(o)}$$

Indicando con S_1 una qualunque delle serie di 1ª specie contenuta nella $S_2^{(o)}$, con S_2 una qualunque delle serie di 2ª specie contenuta in $S_3^{(o)}$, e così via, abbiamo la serie

$$S_1 \quad S_2 \quad S_3 \ \ldots\ S_n \ldots$$

rappresentata dai numeri che hanno per simbolo comune rispettivamente

$$\infty_1,\ \infty_1^2,\ \infty_1^3 \ \ldots\ \infty_1^m \ldots$$

Indico questa serie con $\Sigma_1^{(o)}$, subito dopo di essa viene la serie

$$\infty_1^{\infty_1 - m_1},\ \infty_1^{\infty_1 - m_1 + 1} \ldots \infty_1^{\infty_1} \ldots \infty_1^{\infty_1 + m_1} \qquad \Sigma_1 \text{ [2]}$$

---

[1] S' intendono fin qui valori sempre interi e positivi finiti.

[2] Facendo seguito alla 2 nota 90 e alla 3 del n. 92 diamo i seguenti teoremi;

1. *La serie di numeri dati che precedono un numero infinito dato nella nostra classe (II) ha la prima potenza.*

A questo scopo si osservi che dal simbolo Z di un numero dato di (II) (ind. I, 91) risulta che esso dipende dai numeri n finiti di (I) che sono in numero finito, e quindi i numeri di (II) di ordine non superiore a μ si possono far corrispondere univocamente ai numeri di (I).

2. *La classe (II) non ha la stessa potenza della classe (I.)*

Difatti ai numeri della forma $\omega, \omega^2 \ldots \omega^n \ldots \omega^\omega \ldots \omega^\eta \ldots$ di *G. Cantor* possiamo far corrispondere tutti i gruppi di numeri

$$\infty_1 - n_1 \ (n_1 = 0, 1, 2, \ldots n \ldots)$$

$$\infty_1 2 - \infty_1 n_1 \pm n_2 \ (n_1, n_2 = o, 1, 2 \ldots, n \ldots \text{ se } n_1 = o \text{ anche } n_2 \text{ deve essore } o \text{ nel caso del segno } +).$$

Ad ω^ω facciamo corrispondere tutti i numeri che precedono $\infty_1^{\infty_1}$ compreso $\infty_1^{\infty_1}$ e seguono i numeri dei campi infiniti d'ordine finito e al numero ω^η tutti i numeri che si ottengono dal simbolo ∞_1^η ponendo in luogo di η i nostri numeri che gli corrispondono, e tutti quelli fra essi compresi.

Ma il sig. *Cantor* ha già dimostrato che la sua classe (II) di numeri transfiniti non ha la stessa potenza di (I). (Vedi ad es.: Acta math. vol. II, pag. 391-392), dunque non la ha neppure la nostra.

3. ***La nostra classe (II) ha la stessa potenza della classe (II)*** di *Cantor*.

Supponiamo difatti che abbia la potenza della classe III di *Cantor*, che è immediatamente superiore a quella della classe (II) secondo la definizioue stessa della classe (III) (2 nota 90). Ciò significa che vi sarà almeno un numero η della nostra classe (II) che corrisponde ad un numero della classe (III), Ma perchè ciò fosse bisognerebbe che la serie dei numeri che precedono η fosse della potenza di (II), il che è assurdo, (1).

Le nostre grandezze infinite e infinitesime hanno de!le analogie colle grandezze infinite e nulle

e ogni numero di questa serie rappresenta una serie S; cioè:

$$S_{\infty_1 - m_1},\ S_{\infty_1 - m_1 + 2},\ \ldots\ S_{\infty_1} \ldots S_{\infty_1 + m_1}$$

la prima delle quali contiene tutte le precedenti date dai numeri da o sino al numero

$$\infty_1^{\infty_1 - m_1} n_1 + \infty_1^{\infty_1 - m_1 - 1} n_2 + \ldots + \infty_1^{\infty_1 - m_1 - m} n_m + \infty_1^{m'} n'_1 + \infty^{m'-1} n'_2 + \ldots + n'_m$$

m. I segmenti finiti infinitesimi e infiniti fino all' ordine μ *compresi tutti quelli i cui ordini sono finiti col numero* μ *formano un gruppo che si trasforma in sè medesimo prendendo un numero finito di volte gli infiniti o gli infinitesimi degli stessi ordini di ogni segmento del gruppo.*

Sia μ infinito d'ordine σ, il tipo di μ è ∞_1^σ e quindi il tipo dei numeri infiniti di ordine μ è $\infty_1^{\infty_1^\sigma} . n_1$ essendo n_1 finito, al quale possono essere aggiunti o tolti numeri infiniti d'ordine inferiore (ind. I, 91).

Tutti i numeri infiniti d'ordine finito con quelli di ordine μ sono del tipo $\infty_1^{\infty_1^\sigma n}$. Se sono dati due di questi numeri i cui numeri tipici massimi che li compongono sono della forma $\infty_1^{\infty_1^\sigma n}$, $\infty_1^{\infty_1^\sigma m}$, moltiplicati fra loro dànno evidentemente un numero dello stesso gruppo, perchè si ha $\infty^{\infty_1^\sigma n} . \infty_1^{\infty_1^\sigma m} = \infty_1^{\infty_1^\sigma (n+m)}$.

Se si considera un segmento (AB) infinitesimo d'ordine η al più finito con μ, l' unità fondamentale (AA_1) è infinita d'ordine η rispetto ad (AB). Se si considera un multiplo di (AB) secondo un numero σ infinito d'ordine al più finito rispetto a μ, si ha un segmento infinito d'ordine σ rispetto ad (AB) (*f*, 92), il quale o sarà infinitesimo, finito o infinito rispetto ad (AA_1) (*f*, 82). Nei primi due casi è compreso nel campo suddetto, mentre se è infinito non può essere maggiore del multiplo di (AA_1) secondo lo stesso numero σ, perchè questo rispetto ad (AB) è dell'ordine $\eta + \sigma$ (*f*, 92).

Se consideriamo un segmento infinitesimo di (AB) secondo l'ordine σ, questo sarà infinitesimo d'ordine $\eta + \sigma$ rispetto ad (AA_1), ma poichè η e σ sono al più finiti con μ, anche $\eta + \sigma$ è al più finito con μ (*i*, 82 e def, I, 87).

Il teor. è dunque dimostrato.

---

del *Du Bois-Reymond* (Math. Ann. XI, Ueber die Paradoxen des Infinitärcalculs; Die Allg. Functionentheorie-Tübingen 1882, p. 278 « Ueber den monotonen Endverlauf der Functionen und die infinitäre Pantachie »). Del resto anche colle altre grandezze infinite o infinitesime possibili hanno dei caratteri comuni, primo fra tutti quello che sono maggiori o minori di ogni grandezza finita. Ma rispetto agli infiniti e nulli del D. B. R. osservo che l'origine non è la medesima perchè nè i nostri segmenti nè i nostri numeri della classe (II) sono definiti come ordini d'infinito di funzioni rispetto ad una data unità; anche supponendo che ciò si possa, si vede che in generale non si corrispondono. Difatti il prof. *Pincherle* in una nota (Alcune osservazioni sugli ordini d'infinito delle funzioni — Bologna 1884) ha osservato che essendo A, B, C, ordini d'infinito secondo la def. del D. B. R, e se $A > B$, $A > C$ non solo si può dir nulla sulla uguaglianza o disuguaglianza fra B e C, ma non si può nemmeno riconoscere se le funzioni cui corrispondono gli ordini B e C siano paragonabili tra loro, mentre se A, B, C sono tre dei nostri segmenti infiniti abbiamo sempre che B e C sono paragonabili o soddisfano ad una o all'altra delle relazioni $A \gtreqless B$.

Dalle nostre ipotesi sugli infinitesimi che completeremo in seguito (ip. VI, VII, VIII), è chiaro che il concetto di grandezza infinita e infinitesima dell'idealista di D. B. R. (Allg. F. T. pag. 71-75 e 283) non è determinato allo stesso modo. (Vedi nota 2 n. 85 e nota 1 n. 96).

§ 6.

Unità di diverse specie — Nuovo carattere dell' unità di misura.

94. *Def. I.* Quando diremo *unità* di una data *specie* intenderemo uno qualunque dei segmenti della medesima specie (def. I, 86).

E partendo da una data scala come prima scala, l'unità corrispondente, che è anche l'unità fondamentale (def. VII, 91) la chiameremo anche *unità di* 1ª *specie.*

E l'unità corrispondente al campo infinito d'ordine η la chiameremo *unità di specie* η.

Oss. I. Dato un segmento (AB) non sappiamo ancora se contenga segmenti infinitesimi, anzi si può supporre che non contenga alcun altro elemento fuori di A e A_1 (def. VI, 62) od anche che avendo altri elementi non contenga alcun infinitesimo, non essendo stata fatta alcuna ipotesi sulla unità fondamentale dalla quale siamo partiti (oss. I, 80).

Def. II. Noi stabiliamo fin d'ora che *l'unità di misura sia un segmento contenente almeno un infinitesimo di* 1° *ordine.*

E supporremo la stessa cosa per ogni segmento, quando non diremo il contrario.

Oss. II. Evidentemente questa nuova definizione di unità non contiene alcuna ipotesi poichè è una denominazione diversa dei segmenti che hanno un infinitesimo almeno, e significa soltanto che noi ci occupiamo d'ora innanzi delle sole scale, le cui unità di misura sono di questi segmenti.

§ 7.

Divisione dei segmenti finiti in parti finite — Segmento finito sempre decrescente — Suo limite — Segmento indefinitamente piccolo rispetto a una data unità — Ipotesi sulla contuinità relativa ad un' unità — Elementi limiti di un gruppo di elementi rispetto ad un' unità nella forma fondamentale.

95. *a. In un segmento qualunque (AB) nel verso da A a B vi è a cominciare da A una serie di n parti consecutive finite rispetto ad esso, qualunque sia n.*

Ciò risulta dalla def. II del n. 82 e dal teor. *b.* 85; basta applicare questo teorema n volte.

a'. In ogni segmento (AB) vi sono sempre segmenti (AB') i cui multipli secondo il numero dato n sono minori di (AB), e altri i cui multipli secondo lo stesso numero sono maggiori di (AB).

Difatti (AB) si può scomporre in un numero n finito (AB'), $(B'B'')$ .... di segmenti consecutivi (a), e si può sempre supporre ve ne sia uno almeno

minore degli altri, perchè se sono tutti disuguali trascurando ogni segmento maggiore di un'altro degli n segmenti e ripetendo questa operazione al più per $n-1$ degli n segmenti il segmento rimanente deve essere il minore; oppure perchè se fossero tutti uguali basterebbe dividere il primo in due parti (AB'), $(B'B_1')$ e riguardare come primo segmento (AB') e come secondo $(B'B'_1)$.

Per il primo evidentemente si avrà:

$$(AB')\,n < (AB) \qquad (d', 79).$$

Se il più grande dei segmenti è $(B^{(n)}B) \equiv (AB_1')$ avremo invece:

$$(AB_1')\,n > (AB) \qquad (d'', 79).$$

b. Un segmento finito della forma fondamentale può essere scomposto in un numero intero finito di parti finite consecutive ciascuna più piccola di qualsiasi segmento finito dato.

Il segmento dato sia (AB); $(AB') \equiv \alpha$, $(B'B) \equiv \beta$ siano due parti finite consecutive di (AB) (a). Supponiamo che sia $\beta_1 \equiv \beta$ il segmento finito dato quanto piccolo si vuole. Se $\alpha \leqq \beta$ il teorema è immediata conseguenza del teorema a. Se invece $\beta < \alpha$ vi è sempre un numero finito n tale che si ha:

$$\beta n < \alpha < \beta(n+1) \qquad \text{(def. II, 82 e } c', 81)$$

vale a dire $\alpha = \beta n + \gamma$ essendo $\gamma < \beta$. Ma pel teorema a possiamo scomporre β, sebbene sia piccolo quanto si vuole ma dato, in parti finite più piccole, e quindi così facendo per ogni parte di β contenuta in α, il teorema è dimostrato.

Oss. I. **La serie dei segmenti finiti (AX) contenuti in un segmento (AB) si può immaginare generata da un segmento variabile sempre decrescente (def. I, 83) nella quale A è sempre lo stesso e X varia in modo che in ogni stato (AX) è un segmento della serie minore di ogni segmento precedente.**

Def. I. Se un segmento variabile diventa più piccolo di ogni segmento finito dato (b), diremo che esso diventa *indefinitamente piccolo rispetto all'unità finita.*

c. L'indefinitamente piccolo rispetto ad un'unità è diverso dall'infinitamente piccolo rispetto alla stessa unità.

Difatti in ogni suo stato (AX) è finito e non esce dal campo dei segmenti finiti, e quindi non può diventare in questo modo infinitesimo (def. II, 82).

Def. II. Diremo anche che un segmento variabile finito (AX) coll'estremo X variabile il quale diventa più piccolo di ogni segmento finito dato arbitrariamente piccolo *tende a diventare infinitamente piccolo di* 1° *ordine* se vi sono o se consideriamo in esso altri infinitesimi; altrimenti diremo che *tende a diventare infinitamente piccolo* (def. II, 94).

Def. III. E il segmento infinitamente piccolo di 1° ordine si chiamerà *limite* del segmento variabile finito (AX), e si scriverà:

$$\lim (AX) \equiv \text{infinitesimo } 1^\circ \text{ ordine}.$$

d. Se un segmento (AX) finito e con un estremo variabile diventa più piccolo

di ogni segmento finito dato esso ha per limite il segmento nullo rispetto all' unità. (b', 91). Si ha cioè:

$$\lim (AX) \equiv o$$

Def. IV. Un segmento finito variabile (AX) tale che X si avvicini (def. VI, 67) indefinitamente rispetto all'unità di misura ad un altro elemento B, si dice che ha per *limite* (AB), e si scrive:

$$\lim (AX) \equiv (AB) \quad [1]$$

e. Un segmento può diventare indefinitamente piccolo sia in un verso come nel verso opposto rispetto all' unità data.

Difatti si può considerare un segmento $(A_{-1}A)$ uguale all'unità (AA_1) (def. I, 68) e tale dunque che $(A_{-1}A)$ sia diretto nello stesso verso di (AA_1). Considerando X nel segmento $(A_{-1}A)$, se aumenta $(A_{-1}X)$, (XA) va sempre diminuendo (g^{V}, 73), e diventa più piccolo di ogni segmento finito dato arbitrariamente piccolo $(A'A)$, essendo A' compreso in $(A_{-1}A)$. Così dicasi se l'elemento X è situato nel segmento (AA_1).

f. Se gli elementi X e X' si avvicinano indefinitamente in versi opposti ad un elemento A, il segmento (XX') diventa indefinitamente piccolo rispetto all'unità data.

Difatti si ha:

$$(XX') \equiv (XA) + (AX')$$

e siccome (XA) e (AX') diventano indefinitamente piccoli (e) anche la loro somma diventa indefinitamente piccola. Se per es. (XX') rimanesse maggiore di un segmento finito dato per quanto piccolo, si può sempre scegliere un segmento uguale al dato, composto di due parti finite (Y_1A), (AY_1') (b', 69). Ma (AX) e (AX') devono diventare per dato più piccoli di (Y_1A) e (AY_1'), dunque X e X' devono oltrepassare gli elementi Y_1 e Y_1' ciascuno verso A e quindi il segmento (XX') non può rimanere maggiore del segmento dato $(Y_1A) + (AY_1')$ (d, 73), e il teorema è dimostrato.

Oss. II. Anche in questo caso si scrive

$$\lim (XX') \equiv o$$

g. Un segmento che diventa indefinitamente piccolo rispetto ad una data unità cogli estremi variabili in versi opposti e contiene un elemento A fuori del campo di variabilità dei suoi estremi ha per limite il solo elemento A rispetto a questa unità.

È una forma diversa del teor. f combinato col teorema d (oss. I, 76).

h. Se X si avvicina indefinitamente ad un elemento X', e questo nel medesimo verso ad un elemento A, X si avvicina indefinitamente ad A.

X' è compreso nel segmento (XA) (def. II, 62 e 23). Se X non si avvici-

---

[1] Limitandosi al campo di una sola scala è *improprio* chiamare *infinitesimo* un segmento variabile *sempre finito* che diventa *indefinitamente piccolo.* Considerando come facciamo noi gli *infinitesimi attuali* (per distinguerli dagli indefinitamente piccoli che sono infinitesimi *potenziali*) e si chiamassero semplicemente infinitesimi i segmenti indefinitamente piccoli si farebbe un grave errore.

nasse indefinitamente ad A vi sarebbe un segmento $(A'A)$ tale che in $(A'A)$ non vi sarebbero elementi X (def. II). Ma in $(A'A)$ vi è un elemento X' e quindi non vi sarebbe nessun elemento X compreso nel segmento $(A'X')$ contro il dato. Dunque ecc.

i. Se X e X' si avvicinano indefinitamente nello stesso verso all'elemento A, (XX') (o $(X'X)$) diventa indefinitamente piccolo.

Se (XX') (o $(X'X)$) restasse superiore di un intervallo dato ε, (XA) o $(X'A)$ contenendo (XX') $(X'X)$ resterebbe pure superiore a ε, contro il dato (def. I).

96. *Oss. I.* Noi abbiamo supposto che il segmento variabile finito (XX') abbia un elemento A fuori del campo della variabilità degli elementi X e X'. Ma se con una legge data si ha un segmento i cui estremi sono variabili in senso opposto e che diventa indefinitamente piccolo, dai principî precedenti non risulta che vi sia un elemento di esso fuori del campo di variabilità dei suoi estremi, perchè l'ipotesi opposta non conduce ad alcuna contraddizione con quei principî, eccetto che si sappia che un tale elemento esiste. Si può immaginare infatti un gruppo di elementi che soddisfino alla definizione del sistema omogeneo e anche se si vuole del sistema identico nella posizione delle sue parti (def. I, 68 e def. I, 70) e tale che ogni segmento di esso sia finito rispetto ad un segmento dato qualunque del gruppo, e tale inoltre che dato un elemento A non vi sia rispetto all'unità data in uno o nell'altro verso a partire da A un primo segmento finito. Per le proprietà stesse del sistema omogeneo ogni elemento del gruppo sarà dotato di questa proprietà, in uno e nell'altro verso (def. I, 68 e *b*, 69). Se poi intorno ad ogni elemento immaginiamo dei campi infinitesimi, ed es. uno solo, i cui elementi rispetto all'unità data coincidono (*g*, 85) in modo che gli elementi del campo infinitesimo soddisfino alla stessa definizione del sistema omogeneo sarà soddisfatta l'ip. IV dai segmenti finiti rispetto ai segmenti infinitesimi. Infatti se si considera come unità un infinitesimo di 1° ordine, un elemento dato del primo gruppo è all'infinito a partire da un altro elemento dello stesso gruppo; e poichè in ogni segmento di questo gruppo rispetto alla prima unità vi sono altri elementi del gruppo che formano cogli estremi segmenti finiti relativamente a questa unità, è così soddisfatta l'ip. IV.

Ma sebbene ogni elemento sia elemento limite di uno o più segmenti variabili (XX'), inversamente non si può *a priori* dire che un segmento variabile (XX') che diventa indefinitamente piccolo e i cui estremi sono elementi del gruppo, contenga altri elementi fuori del campo di variabilità dei suoi estremi e che quindi abbia un elemento limite (*g*, 95); come non è escluso che possa esistere sempre un tale elemento.

Ricorrendo al continuo intuitivo determinato dai punti dell'oggetto rettilineo (55) noi siamo condotti ad ammettere che in ogni caso il segmento variabile (XX') contenga *degli elementi* fuori del campo di variabilità fra X e X'. Dunque stabiliamo la seguente ipotesi:

Ip. VI. **Ogni segmento il quale avendo gli estremi sempre variabili in versi opposti diventa indefinitamente piccolo contiene un elemento fuori del campo di variabilità degli estremi stessi** [1].

Def. I. Per distinguere un tal sistema omogeneo dagli altri in cui l'ip.

---

1) Al n. 99 dimostreremo l'indipendenza di questa ipotesi dalle precedenti. L'idealista del Du Bois Reymond (*l. c.* pag. 77), non stabilisce come sia composto un segmento dato di segmenti infinitesimi. (vedi nota 2, 85, nota 3, 93), in modo che la sua dimostrazione dell'esistenza del limite di due serie decimali convergenti non è determinata e contiene una petizione di principio perchè suppone implicitamente che quando il segmento finito (NN') (l. c.) diventa più piccolo di ogni segmento dato contenga sempre un infinitesimo i cui estremi non siano elementi della serie dei punti N e M. È necessaria quindi in senso relativo l'ip. VI, e in senso assoluto l'ip. VIII.

VI non ha luogo, lo diremo *sistema omogeneo continuo rispetto all' unità data o relativo ;* mentre chiameremo ogni altro sistema omogeneo ad una dimensione *sistema discreto rispetto all' unità data.*

a. In ogni segmento che diventa indefinitamente piccolo rispetto ad una data unità cogli estremi variabili in versi opposti vi è almeno un campo infinitesimo di elementi fuori del campo di variabilità degli estremi del segmento variabile.

Difatti se A è l'elemento dato dall' ip. VI, siccome vi è sempre un campo infinitesimo rispetto all'unità data (def. II, 94) così ne esiste uno di identico intorno ad ogni elemento del sistema (def. I, 68), e perciò anche intorno ad A. Nessun elemento di questo campo può appartenere al campo di variabilità degli estremi del segmento sempre variabile, altrimenti vi sarebbero degli stati infinitesimi del segmento, contro l'ipotesi (def. I, 95).

b. Ogni segmento (XX') *che diventa indefinitamente piccolo rispetto ad una unità data e i cui estremi sono variabili in versi opposti, ha per limite un solo elemento del sistema, e in senso assoluto un campo infinitesimo.*

Difatti sia (XX') il segmento variabile Y e Y' due elementi di esso, ma non contenuti nei campi di variabilità degli elementi X e X'. Il segmento (YY') deve essere infinitesimo, se Y e Y' sono distinti (def. II, 82, e def. II III, 57), poichè altrimenti nella sua variabilità (XX') rimarrebbe sempre maggiore di un segmento finito (YY') contro l'ipotesi.

b'. Dato il segmento variabile (AX) *crescente e la variabile* (AX') *decrescente diretti nello stesso verso, e se* (XX') *diventa indefinitamente piccolo rispetto all'unità, vi è un solo elemento* Y *tale che* (AY) *è segmento limite dei due segmenti variabili. Se* (AX) *è sempre crescsnte e* (AX') *sempre decrescente,* (AY) *non è stato di una delle due variabili.*

Ciò deriva immediatamente dal teor. *b* e dalla def. IV, 95.

c. Il sistema omogeneo continuo rispetto ad un' unità di misura lo è rispetto a qualunque unità infinita, ma può non esserlo rispetto ad un'unità infinitesima.

Difatti in tal caso i segmenti finiti sono uguali rispetto all'unità infinita perchè nulli (*g*, 85) e tutto il campo finito si riduce anzi ad un solo elemento rispetto all'unità infinita; mentre il sistema potrebbe esser discreto (def. 1) rispetto ad un'unità infinitesima intorno ad un suo elemento dato qualunque del campo finito.

97. *a. Gli stati successivi di una variabile sempre crescente o decrescente e illimitata di 1ª specie a partire da uno di essi si possono indicare coi numeri delle serie (I).*

Difatti fra due stati dati consecutivi (AX), (AX') di un segmento variabile basta considerare quelli pei quali (AX') (se $(AX) > (AX')$), oppure $(X'X)$ (se $(AX') > (AX)$) sia finito, perchè se fosse infinitesimo si potrebbe trascurare rispetto ai segmenti finiti (*g*, 85); d'altronde non può essere infinito (*h*, 85). Dunque se la variabile è sempre crescente o decrescente rispetto all'unità di misura, (XX') nel primo caso ($(X'X)$ nel secondo) è sempre finito, quando si tratta di due stati diversi. Ma gli stati del segmento variabile costituiscono una serie illimitata di 1ª specie la quale si può far corrispondere univocamente e nel medesimo ordine alla serie (I) (*c'*, 46 e *b*, 43); dunque gli stati

della variabile si possono indicare successivamente coi numeri della serie (I) (47) cioè:

$$(AX_1),\ (AX_2)....(AX_n)....$$

Oss. I. Quando parleremo di una variabile crescente o decrescente (AX_n) rispetto ad un'unità intenderemo, se non diremo altrimenti, una serie limitata o illimitata di 1ª specie (def. 35; def. III, 39).

Se (AB) è segmento limite di un segmento variabile (AX_n) in luogo di $\lim (AX) = AB$ si scrive:

$$\lim (AX_n) \equiv (AB)$$

quando

$$\lim n = \infty$$

vale a dire col crescere di n, X_n si avvicina indefinitamente a B, cioè (AX_n) si avvicina indefinitamente ad (AB) (def. IV, 95) [1].

Oss. II. Indicando ogni aumento della variabile, se è crescente, rispettivamente con $x_1\ x_2\ ....\ x_n\ ....$ a partire dal primo elemento A costante, si ha:

$$x_n = x_1 + x_2 + \ldots + x_{n-1}$$

e quindi in luogo di

$$\lim (AX_n) \equiv (AB)$$
$$\lim n = \infty$$

potremo scrivere

$$\lim S\ x_n \equiv (AB)$$
$$\lim n = \infty$$

essendo S il segno di somma.

b. Data la variabile finita sempre crescente (AX) *(crescente) e la variabile finita decrescente (sempre decrescente)* (AX') *nel medesimo verso tale che* (AX) $((AX'))$ *sia sempre minore (maggiore) di ogni stato di* (AX') $((AX))$, *ed ogni segmento* (AY) *minore (maggiore) di* (AX') $((AX))$ *appartenga alla* 1ª (2ª) *variabile, il segmento* (XX') *diventa indefinitamente piccolo rispetto alla data unità.*

Che siano anzitutto possibili tali variabili risulta immediatamente da a, 95 e dalle def. I e II del n. 83. Osserviamo inoltre che per essere (AX) e (AX') finite, il segmento $(X'X)$ fra due stati qualunque di (AX) e (AX') non può mai essere infinito (h, 85). Anzitutto si vede che non può essere uno stato di (AX) segmento limite (AL) della variabile (AX'). Se ciò fosse, siccome la variabile (AX) è sempre crescente e in modo che fra due stati successivi (AL), (AL_1) di essa la differenza è finita per quanto sia piccola (h, 85), così in (LL_1) vi sarebbero elementi X', perchè (LX') deve diventare per ipotesi più piccolo di ogni segmento dato (LL_1) (def. IV, 95). Dunque avremmo uno stato (AL_1) della

---

1) Rimanendo nel solo campo di un' unità come avviene comunemente, si può scrivere

$$\lim (AX_n) \equiv (AB)$$
$$n = \infty$$

Ma non è proprio se non quando il segno ∞ non indica già un ifinito attuale, ma un infinito potenziale, che non è nel suo essere costante ma finito e variabile.

variabile (AX) maggiore di uno stato della variabile (AX'), contro il dato del teorema.

Ora supponiamo che sia sempre

(1) $$(XX') > (BC)$$

essendo (BC) un segmento finito dato; e per meglio fissare le idee supponiamo che nel segmento (XX') sia contenuto sempre un segmento finito dato identico a (BC) in modo che sia $(XX') > (BC)$. Da (1) si ricava che se (AX_1) è uno stato qualunque di (AX) (def. I, 83) la variabile (AX') è maggiore di $(AX_1) + (X_1X_2)$ che è perciò uno stato di (AX), essendo $(X_1X_2) \equiv (BC)$, perchè se fosse uguale o minore non si avrebbe la (1). Ma siccome la variabile (AX) non soddisfa che alla condizione di essere sempre minore di qualunque stato della variabile (AX'), ne consegne che considerato uno stato

$$(AX_1) + (X_1X_2) \equiv (AX_2)$$

della prima variabile, siccome la (1) ha sempre luogo per ipotesi fra due stati qualunque di (AX) e (AX') si conclude che è pure uno stato della variabile (AX) il segmento

$$(AX_1) + (X_1X_2)n \equiv (AX_n).$$

Ma qualunque sia n se (AX'_1) è uno stato determinato della variabile (AX), $(X_1X'_1)$ è finito (h, 85), dunque vi è sempre un numero n tale che

$$(X_1X_2)\,n > (X_1X_1') \qquad \text{(def. II, 82; def. I, } c', 81)$$

e perciò se fosse vera la (1) vi sarebbe uno stato di (AX) maggiore di uno stato di (AX'), il che è contrario al dato del teorema. Dunque la (1) è assurda.

Un'analoga dimostrazione varrebbe se (AX) fosse crescente, (def. I, 83) ed (AX') sempre decrescente.

c. *Il segmento $(X_n\ X_{n+r})$ compreso fra due stati successivi (AX_n), (AX_{n+r}) della variabile finita, se è sempre crescente, o $(X_{n\pm r}X_n)$ se è sempre decrescente, e se ha per limite il segmento (AB), diventa indefinitamente piccolo col crescere indefinitamente di n essendo r costante.*

Difatti scelto il segmento $(B'B)$ nel 1° caso possiamo considerare in esso due elementi X_n e X_{n+r} perchè per n sufficientemente grande in $(B'B)$ cade un elemento X_n (def. IV, e b, 95) e quindi anche X_{n+r}. Se è decrescente ed (AB) è il suo segmento limite basta considerare un segmento (BB') nel verso di (AB).

d. *Un segmento finito (AX_n) variabile sempre crescente (o decrescente) ha sempre rispetto all'unità di misura uno ed un solo segmento limite più grande (o più piccolo) di tutti gli stati della variabile.*

Se il segmento diventa più grande di ogni segmento finito dato diventa indefinitamente grande e rispetto all'unità di misura ha il segmento infinito di 1° ordine come segmento limite (i, 85 e oss. IV, 86).

Se il segmento non diventa maggiore di ogni segmento finito dato vuol dire che vi deve essere un segmento (AB) nel verso della variabile maggiore di ogni stato della variabile stessa. Ora se (AB) è il primo segmento nel verso dato che ha questa proprietà rispetto all'unità, (AB) è il segmento limite di

(AX), perchè ciò significa che (XB) deve diventare indefinitamente piccolo (def. IV, 95). Difatti scelto nel segmento (AB) un segmento finito $(B'B)$ quanto piccolo si vuole, se in esso non cadessero elementi X_n, il primo segmento maggiore di tutti gli stati della variabile (AX_n) sarebbe almeno (AB') e non (AB).

Se (AB) non è il segmento limite di (AX) vi sono in (AB) altri segmenti (AB'), (AB'').... tali che $(AB) > (AB') > (AB'') >$.... maggiori di (AX_n) qualunque sia n. Questi segmenti si possono considerare come stati di un segmento decrescente maggiore degli stati di (AX_n) (def. II, 83) e quindi vi deve essere (b', 96 e b) un segmento (AY) limite dei due segmenti variabili. In tal caso lo stato (AY) appartiene alla serie decrescente perchè questa è costituita da tutti i segmenti compresi in (AB) maggiori di tutti gli stati di (AX).

Lo stesso ragionamento vale se (AX) è decrescente, senza che X si avvicini indefinitamente ad A, nel qual caso il segmento limite è nullo rispetto all'unità data (d, 95) [1]).

Oss. III. Siccome noi supponiamo che la serie corrispondente alla variabile sia limitata naturale o illimitata di 1ª specie (oss. I) così essa può avere in un dato verso un solo elemento o segmento limite. Nel caso di serie che abbiano altri limiti il limite del teor. *d* è quello che ordinariamente si chiama secondo Weierstrass *limite superiore o inferiore.*

---

1) La esistenza del segmento limite di due serie convergenti viene data da alcuni mediante un postulato, benchè sotto forme diverse. Vedi ad es. *Stolz* (l. c. pag 81-81. *De Paolis* (Elem. di Geometria Post. X e XI, pag. 332, 334). Ma la definizione di *Stolz* non suppone che la variabile sia finita ed è analoga a quella usata da *Dedekind* per definire con serie di numeri razionali i numeri irrazionali ordinari.

Dando questa definizione come s' è detto (nota, 3 90) lo *Stolz* dimostra l' assioma di *Archimede* ammettendolo in particolare. Lo *Stolz*, come dissi (vedi nota suddetta) si serve di questa dimostrazione per negare l'esistenza dei segmenti infinitesimi sulla retta, mentre la sua definizione li esclude *a priori*, come li escludono le altre definizioni conosciute del continuo ordinario.

Il signor *Killing* (Ueber die Nicht-Eucl. Raumformen p. 46-47 Leipzig 1885) crede dimostrare la suddetta proprietà partendo dal teorema che due segmenti rettilinei o si possono sovrapporre oppure il primo è una parte del secondo, o il secondo è congruente ad una parte del primo, aggiungendo che questi tre casi si escludono a vicenda. Se a partire da A, egli dice, i punti B e C sono nella stessa direzione (verso) e C non appartiene al segmento (AB) vi è sempre un segmento (AD) multiplo di (AB) che contiene il punto C; e inversamente dato il segmento (AC) lo si può dividere in un numero finito di parti uguali in modo che almeno uno dei punti di divisione cada fra A e B. Se, egli dice,

A B

la prima proprietà non è vera vi deve essere un punto R tale cho nessun multiplo finito di (AB) supera (AR), *mentre si giunge ad ogni punto compreso fra A e R.* Se si prende però in (AB) un segmento $(SR) \equiv (AB)$; siccome secondo l'ipotesi mediante l'addizione del segmento (AB) a sè stesso si giunge ad ogni punto compreso fra S e R lo stesso processo condurrebbe oltre l'elemento R; e perciò non è permessa l'ipotesi d'un limite.

La proprietà che ammette il *Killing* in questa dimostrazione e che non dimostra, è che se esiste il punto R coll'addizione di (AB) a sè stesso si debba giungere *necessariamente* ad ogni punto compreso fra A e R, e che inoltre R goda le stesse proprietà degli altri punti. E questa ipotesi contenuta nella dimostrazione del *Killing* la quale esclude i segmenti infinitesimi, è in fondo la proprietà che vuol dimostrare.

H. Grassmann (Ausdehn. Lehre 1844, opp. 1878, pag. XX e seg.) dice : « Die reine Mathematik ist die Wissenschaft des *besonderen* Seins als eines durch das Denken *gewordenen* » e più oltre : jedes durch das Denken gewordene kann auf zwiefache Weise geworden sein, entweder durch einen einfachen Akt des *Erzeugens*, oder durch einem zwiefachen Akt des *Setzens* und *Verknüpfens.* Das auf die erste Weise gewordene ist die *stetige* Form oder die Grösse im engeren Sinn, das auf die letztere Weise gewordene die *diskrete* oder *Verknüpfungsform*. Egli ammette il concetto del *divenire continuo* ma non lo definisce. Egli dice che l'atto del generare si può ritenere composto di due atti, del porre e dell'unire, e ciò che è posto nel momento del porre è già unito a ciò che è diventato. Ma questa non è punto una definizione determinata di ciò che è l'atto del generare. Ammesso pure che questo atto abbia un senso ben determinato, come ad es. l'atto del pensare *prima* una cosa e *poi* un'altra cosa (sul quale abbiamo fondato il concetto di serie), bisogna pur cominciare da qualche cosa per generare qualche cosa. Ora questa qualche cosa da cui si comincia è o non è una parte

d'. Due serie di segmenti sempre crescenti o decrescenti rispettivamente uguali, determinano segmenti uguali rispetto all'unità data.

Siano (AB) e $(A'B')$ i segmenti determinati dalle due serie (*d*). Se fosse $(AB) > (A'B')$ in (AB) vi sarebbe un segmento $(AB_1) \equiv (A'B')$ (def. I, II, 61 e *b*, 69), e quindi la prima serie dovrebbe avere per segmento limite (AB_1) come la seconda ha per segmento limite $(A'B')$, il che è assurdo (*e* e *b*, 61 e *d*).

d''. Due serie di variabili (AX) e (AX') l'una crescente e l'altra decrescente hanno un segmento limite comune se (AX') è sempre maggiore di (AX), ed ogni segmento (AC) maggiore di uno stato di (AX) e minore di uno stato di (AX') è uno stato di (AX) o di (AX').

La variabile (AX) è limitatamente o illimitatamente crescente (def. I, 83). Nel primo caso l'ultimo stato (AC) di (AX) è suo segmento limite. Se la variabile (AX') é limitatamente decrescente, essa deve avere per dato lo stesso segmento (AC) come primo segmento o segmento limite, altrimenti se fosse $(AC') > (AC)$ questo segmento, essendo D un punto di (CC') il segmento, (AD) non apparterrebbe ad alcuna delle due variabili.

Se invece (AX') è sempre decrescente si cade nel caso del teor. *b* e perciò hanno un segmento limite (AY) comune (*b'*, 95) che in tal caso è (AC) (*d'*).

Similmente, se (AY) è sempre crescente essa ha un segmento limite (AX) (*d*), e considerando poi come stato di (AB) anche (AY) si ricade nel caso precedente.

98. *Def. I.* Un elemento A si chiama *elemento limite* rispetto ad un'unità di una serie di elementi $X_1 X_2 .... X_n ....$ ordinati in un dato verso nella forma fondamentale; o quando è (come abbiamo inteso fin qui nel caso del segmento (def. V, 62)) il primo o l'ultimo elemento della serie; oppure quando la serie è tale che in un segmento (AM) finito quanto piccolo si vuole nel verso opposto di essa vi è un elemento della serie data.

a. Se (AB) è il segmento limite di un segmento (AX_n) l'elemento B è elemento limite della serie data dagli elementi X_n.

Difatti un segmento variabile finito equivale ad una serie data di segmenti finiti (def. I, II, 83), in modo che il segmento limite del segmento variabile è segmento limite della serie. Se (AB) è il segmento limite, in un segmento $(B'B)$ quanto piccolo si vuole cadono elementi X_n (def. IV, 95) e quindi B è anche l'elemento limite della serie di elementi X_n col crescere indefinitamente di n (def. I).

del continuo. Se non lo è essa sola non può generare il continuo, perchè gli elementi senza parti della retta non costituiscouo la retta, e perciò non può servire a generare il continuo stesso; o è una parte del contlnuo e in ogni suo stato in cui la consideriamo è già essa stessa un continuo e si cade in una petizione di principio.

Più avanti, p. XXII, *Grassmann* dice: «Das was neu entsteht, entsteht eben nur an dem schon gewordenen, ist also ein Moment des Werdens selbst, was hier in seinem weiteren Verlauf als Wachsen erscheint». Ma tutta la forma stessa si può ritenere si ottenga da una sua parte già ottenuta; e non è certo questa una parte indefinitamententе piccola, come egli sembra voler dire colla parola *momento*; e se si vuole partire dal concetto di momento, corrispondente all'istante del tempo, bisogna considerarla rispetto ad una parte già data e costruita. Come si definisce una grandezza arbitrariamente piccola se non la si confronta con grandezze già date? E non si ammette così implicitamente il continuo come dato, senza punto definirlo? La definizione del continuo mediante il movimento di un punto ha gli stessi difetti, oltrechè il punto senza parti non genera il continuo (55). Il linguaggio del movimento si può applicare anche ad un sistema discreto (67). E chiaro dunque che astrattamente la continuità del movimento ammette il continuo già esistente (Vedi pref.).

b. Un gruppo di un numero infinito (∞) *di elementi distinti* (X) *compreso in un segmento dato* (AB) *ha sempre almeno un elemento limite rispetto all' unità di misura.*

Se A non è limite di (X) significa che vi sono segmenti (AY) di (AB) che non contengono infiniti elementi X (def. I). Se uno degli elementi Y, ad es. Y_1, non è limite di (X) vi è un segmento $(AY_2) > (AY_1)$ che non contiene infiniti elementi di (X). Se nessuno degli elementi Y è limite di (X), la serie (AY) in (AB) è sempre crescente e quindi ha un segmento limite (AC) (d, 97). L'elemento C è limite del gruppo X, altrimenti se in un segmento (CC') nel verso di (AB) non vi fossero infiniti elementi X, (AC') sarebbe uno stato di (AY) contro d, 97.

L'elemento limite può appartenere al gruppo stesso.

b'. Una serie di elementi (X_n) *sulla forma fondamentale tale che il segmento* ($X_n X_{n+r}$) *coll' aumentare di n diventa indefinitamente piccolo ha un solo elemento limite rispetto all' unità di misura.*

Difatti deve essere contenuta a partire da un elemento X_n in un dato verso in un segmento ($X_n B$) altrimenti ($X_n X_{n+r}$) non diventerebbe indefinitamente piccolo. In questo segmento vi è un numero infinito (∞) di elementi X, appunto perchè ($X_n X_{n+r}$) diventa indefinitamente piccolo, e quindi (X_n) ha un elemento limite. Non può avere che un solo elemento limite in questo caso perchè n diventa indefinitamente grande una sola volta, cioè la serie (X_n) è illimitata di 1ª specie (def. III, 39), e quindi (X_n X_{n+r}) diventa indefinitamente piccolo una sola volta.

§ 8.

Scomposizione di un segmento finito in n parti uguali — Legge commutativa della somma di due o più segmenti consecutivi — Il segmento (AB) è identico allo stesso segmento percorso nel verso opposto rispetto all' unità finita — Elementi limiti del gruppo di elementi ottenuto colla divisione successiva di un segmento in n parti uguali — Altre proprietà degli elementi limiti dei gruppi rispetto ad un' unità.

99. *a. Se il segmento* ($X_1X'_1$), *o* (X'_1X_1), *dato da due segmenti* (AX_1), (AX'_1) *diventa indefinitamente piccolo, il segmento dato dai secondi estremi dei multipli di* (AX_1) *e* (AX'_1), *secondo lo stesso numero n diventa pure indefinitamente piccolo . E inversameute.*

Sia $(AX'_1) > (AX_1)$; si ha:

(1) $$(AX'_1)\,n > (AX_1)\,n \qquad (d,\ 79)$$

e indicando con X_n e X_n i secondi estremi di questi multipli si ha:

$$(AX'_n) > (AX_n)$$

in modo dunque che X_n cade nel segmento (AX'_n) (def. I, 61; c', 68, b, 36). Dato un segmento (AC) qualunque il suo multiplo secondo un numero dato nel suo verso a partire da A è determinato ed unico (a, 72 e d', 79). Si viene

dunque così a stabilire una corrispondenza univoca e del medesimo ordine fra gli elementi X_1 e gli elementi X_n, perchè ad ogni elemento X_1 a partire da A corrisponde un solo elemento X_n, e viceversa ad uno di questi elementi non può corrispondere che un solo elemento X_1. Se ne corrispondesse un altro X'_1 si dovrebbe avere $(AX'_1)n \equiv (AX_1)n \equiv (AX_n)$ da cui $(AX'_1) \equiv (AX_1)$ (d', 79); dunque X'_1 coincide con X_1 (b,' 69). La corrispondenza è anche del medesimo ordine perchè se si ha $(AX'_1) < (AX_1) < (AX''_1)$ per la (1) si ha pure: $(AX'_n) < (AX_n) < (AX''_n)$ (d, 79), vale a dire se X_1 è compreso fra X'_1 e X''_1; X_n è compreso fra gli elementi corrispondenti X_n, X''_n (def. I, 61). Se dunque (AX_1) è uno stato della variabile (AX) e se $(X_1X'_1)$ decresce, decresce pure $(X_nX'_n)$ per la corrispondenza univoca e del medesimo ordine (def. I, 61), e quando $(X_1X'_1)$ diventa indefinitamente piccolo, $(X_nX'_n)$ ha un segmento limite (X_nY) supponendo che X_1, e perciò anche X_n, sia costante (d, 97).

Dimostriamo che Y coincide con X_n.

Supponiamo dapprima $n=2$, e sia $(AX'_1) > (AX_1)$.

Sia

$$(X'_1X''_2) \equiv (AX_1) \equiv (X_1X_2), \quad (AX'_1) \equiv (X'_1X'_2) \qquad (b,\ 69)\ (2)$$

siccome

$$(AX_2) \equiv (AX_1) + (X_1X_2), \quad (AX''_2) \equiv (AX'_1) + (X'_1X''_2),$$
$$(AX'_2) \equiv (AX'_1) + (X'_1X'_2) \qquad \text{(def. I, 72)}$$

si ha:

$$(AX_2) < (AX''_2) < (AX'_2) \qquad (3)$$

perchè

$$(AX_1) < (AX'_1) \text{ e } (X'_1X''_2) < (X'_1X'_2) \quad \text{(def. I e II, 61; } g, f, 73).$$

$A \quad X_1 \quad X_2$
$X'_1 \quad L \quad X''_2 \, X'_2$

Così si stabilisce una corrispondenza univoca e del medesimo ordine fra gli elementi X'_1 e X''_2 e quindi anche fra gli elementi X''_2 e X'_2 (f, 42). Difatti come ad ogni elemento X'_1 corrisponde un solo elemento X''_2 nel verso di (AB) (b', 69), così ad ogni elemento X''_2 non può corrispondere che il solo elemento X'_1 perchè vi è un solo segmento $(X'_1X''_2)$ identico al segmento (AX_1) nel verso dato e in modo che X''_2 sia secondo estremo (b', 69). Se un elemento precede X'_1, l'elemento corrispondente deve precedere X''_2 essendo il segmento di due elementi corrispondenti qualunque uguale ad (AX_1) (def. I, b', 61), dunque la corrispondenza è anche del medesimo ordine (def. III, 42).

Ora, se $(X_1X'_1)$ diventa indefinitamente piccolo tale diventa pure $(X_2X''_2)$, perchè se no $(X_2X''_2)$ avrebbe un segmento limite (X_2L) (d, 97) e quindi scelto un elemento Z fra X_2 e L (a, 95) e considerando il segmento $(WZ) \equiv (X_1X_2)$ nello stesso verso (b', 69), l'elemento W non potrebbe cadere in (X_1X_2), pei punti del quale gli elementi corrispondenti X''_2 sono situati fuori del segmento (X_2L). Dunque il segmento (X_1X_2) sarebbe parte del segmento (WZ), il che è assurdo (d, 73). Dunque L deve coincidere con X_2.

Ora si ha:

$$(AX_1)+(X_1X'_1)\equiv(AX'_1),\ (X'_1X''_2)+(X''_2X'_2)\equiv(X'_1X'_2) \qquad \text{(def. I, 72)}$$

e per le (2) si ha:

$$(X_1X'_1)\equiv(X''_2X'_2) \qquad (g''', 73).$$

Se dunque $(X_1X'_1)$ diventa indefinitamente piccolo tale diventa anche $(X''_2X'_2)$ (def. I, 95; e, 61); ma lo diventa anche come si è veduto il segmento $(X_2X''_2)$, dunque anche $(X_2X'_2)$ (h, 95), ciò che era da dimostrare.

Se fosse $(AX')<(AX_1)$ si avrebbe $(AX_2)>(AX'_2)>(AX''_2)$ (d, 79 e f, 73)

A W X_1 L X_2
X'_1 X'_2 X''_2 Z

e se vi fosse un elemento L limite di X''_2 differente da X_2, il segmento (WZ) $\equiv(X_1X_2)$ avrebbe l'elemento W nel segmento (AX_1) distinto da X_1 (d, 73; def. I, e, 61), mentre per ogni elemento X'_1 compreso in (WX_1) l'elemento corrispondente X''_2 sarebbe situato contro l'ipotesi in (LX_2) (g, 73 e def. I 61); dunque L deve coincidere con X_2. In questo caso si ha:

$$(AX_1)-(X'_1X_1)\equiv(AX'_1);\ (X'_1X''_2)-(X'_2X''_2)\equiv(X'_1X'_2)$$

da cui

$$(X'_1X_1)\equiv(X'_2X''_2) \qquad \text{(def. I, 74, } g''', 73)$$

e per conseguenza $(X'_2X''_2)$ diventa indefinitamente piccolo con (X'_1X_1), ma tale diventa anche (X''_2X_2) e quindi anche (X'_2X_2) (h, 95).

Il teor. per $n=2$ è dunque dimostrato.

Ora supponiamo che se X'_1 si avvicina indefinitamente ad X_1, X'_{n-1} si avvicini indefinitamente ad X_{n-1} (def. I, 95). Dimostriamo che ciò ha luogo anche per gli elementi X_n e X'_n.

Si ha $(AX_1)\equiv(X_{n-2}X_{n-1})\equiv(X_{n-1}X_n)$, $(AX'_1)\equiv(X'^{n-2}X'_{n-1})\equiv(X'_{n-1}X'_n)$ per dato, e nel caso $(AX_1)<(AX'_1)$ si ha:

$$(X_{n-2}X_{n-1})<(X'_{n-1}X'_n) \qquad (4)$$

X_{n-2} X_{n-1} X_n
X'_{n-2} X'_{n-1} X''_n X'_n

Sia

$$(X'_{n-1}X''_n)\equiv(X_{n-1}X_n), \qquad (5)$$

per la (4) X''_n cade nel segmento $(X'_{n-1}X'_n)$ (def. I, 61; c', 68; b, 36), e poiché è $(AX'_{n-1})>(AX_{n-1})$ (d, 79), X'_{n-1} è compreso per la stessa ragione fra X_{n-1} e X'_n, e quindi per (5) e (4) X''_n è compreso fra X_n e X'_n. Si dimostra come per $n=2$ che quando X_{n-1} si avvicina indefinitamente a X_{n-1}, X_n si avvicina indefinitamente a X'_n.

Si ha inoltre:

$$(X_{n-2}X_{n-1})+(X_{n-1}X'_{n-1})\equiv(X_{n-2}X'_{n-1}),$$
$$(X'_{n-1}X''_n)+(X''_nX'_n)\equiv(X'_{n-1}X'_n)$$

ma essendo $(AX'_{n-2}) > (AX_{n-2})$ (d, 79) e $(AX'_{n-1}) > (AX'_{n-2})$ (f, 73), si ha:

$$(X_{n-2}X'_{n-1}) > (X'_{n-2}X'_{n-1}) \equiv (X'_{n-1}X'_n) \quad (c', 68;\ b, 36 \text{ e def. I}, 61)$$

dunque

$$(X_{n-1}X'_{n-1}) > (X''_n X'_n) \quad ((5),\ f,\ 73).$$

Se $(X_{n-1}X'_{n-1})$ decresce indefinitamente a maggior ragione decresce indefinitamente $(X''_n X'_n)$ (def. I, 95; d', 61), dunque anche $(X_n X'_n)$ (h, 95) [1].

X_{n-1} X_n
X'_{n-1} $X'_n\ X''_n$

Se $(AX'_1) < (AX_1)$ si ha $(AX'_{n-1}) < (AX_{n-1})$. Si può far accostare X'_{n-1} a X_{n-1} in modo che X''_n cada fra X_{n-1} X_n, basta che sia $(X'_{n-1}X_{n-1}) < (X_{n-1}X_n)$ (b', 69); e poichè $(X'_{n-1}X_n) > (X'_{n-1}X''_n)$ (def. I, 61) $(X'_{n-1}X'_n) < (X'_{n-1}X''_n)$ per costruzione, l'elemento X''_n è compreso fra X'_n e X_n (c', 68; b, 36 e def. I, 61).

Ora si ha:

$$(X_{n-2}X_{n-1}) - (X'_{n-1}X_{n-1}) \equiv (X_{n-2}X'_{n-1}),\ (X'_{n-1}X''_n) - (X'_n X''_n) \equiv (X'_{n-1}X'_n)$$

e l'elemento X'_{n-1} è compreso fra X_{n-2} e X_{n-1} essendo $(X_{n-2}X_{n-1}) = (X'_{n-1}X''_n)$ (d, 73 ed e, 61). E come prima si dimostra che X''_n ha per elemento limite X_n quando X'_{n-1} ha per elemento limite X_{n-1} (def. I, 98). Ma

$$(X_{n-2}X'_{n-1}) < (X'_{n-2}X'_{n-1}) \equiv (X'_{n-1}X'_n) < (X'_{n-1}X''_n)$$

essendo per dato $(AX_{n-2}) > (AX'_{n-2})$ (d, 79) e $(X_{n-2}X_{n-1}) \equiv (X'_{n-1}X''_n)$; dunque $(X'_{n-1}X_{n-1}) > (X'_n X''_n)$ (def. I, 74; g^{v}, 73), e perciò $(X'_n X''_n)$ diventa indefinitamente piccolo con $(X'_{n-1}X_{n-1})$, (def. I, 95 e d', 61), e quindi anche $(X'_n X_n)$ (h, 95).

Dunque se il teorema è vero per $n-1$ è vero per n, ma lo è per $n = 2$, e perciò anche per n qualunque (c', 46; l, 39).

Se si suppone finalmente che X, X'_1 siano tutti e due variabili in verso opposto o nello stesso verso in modo che $(X_1X'_1)$, o (X'_1X_1), diventi indefinitamente piccolo; $(X_1X'_1)$, o (X'_1X_1), determina un elemento limite Y_1 (b, 96 opp. b, 97). Ma quando $(X_1X'_1)$, o (X'_1X_1), decresce indefinitamente decrescono pure indefinitamente (X_1Y_1) e $(Y_1X'_1)$, ovvero (X'_1Y_1) e (Y_1X_1) nel primo caso; nel secondo caso (X'_1Y_1) e (X_1Y_1), oppure $(Y_1X'_1)$ e (Y_1X_1); e inversamente (def. I, 95 e h, 95). Dunque per le dimostrazioni precedenti diventano indefinitamente piccoli $(X_n Y_n)$ $(Y_n X'_n)$ o $(X'_n Y_n)$, $(Y'_n X_n)$ nel primo caso, e nel secondo $(X'_n Y_n)$, $(X_n Y_n)$ oppure $(Y_n X'_n)$ e $(Y_n X_n)$ quando diventa tale anche $(X_1X'_1)$, o (X'_1X_1), e perciò anche $(X_n X'_n)$, o $(X'_n X_n)$ (h, i, 95).

La prima parte del teorema è dunque dimostrata.

Inversamente se $(X_n X'_n)$, o $(X'_n X_n)$, ha un elemento limite Y_n, il segmente (AX) ha un segmento limite (AY) (d', 79 e d, 97), e per la prima parte del teorema deve essere $(AY)n \equiv (AY_n)$ [2].

---

[1] La dimostrazione è indipendente dall'essere $X'n\text{-}2$ contenuto al segmento $(X_{n-2}X_{n-1})$.

[2] La dimostrazione è lunga ma in compenso e semplice e intuitiva. Questa proprietà è fondamentale per quelle che seguono che sono pure proprietà fondamentali del continuo.

b. Ogni segmento finito può essere diviso in un solo modo in un numero finito n qualunque di parti consecutive uguali dello stesso verso rispetto alla unità di misura.

Sia (AB) il segmento dato. Vi sono segmenti (A) i cui multipli secondo n sono più piccoli di (AB) (a', 95). Sia dunque

$$(AX^{(1)})\, n \equiv (AX^{(1)}{}_n) < (AB) \qquad {}^{1})$$

Ora, se in ogni segmento $(B'B)$ contenuto in $(X_n{}^{(1)}B)$ non vi fossero altri elementi X_n, siccome vi sono elementi X'_1 tali che $(AX'_n) > (AB)$ (a', 95), $(X_n{}^{(1)}X'_n)$ non diverrebbe indefinitamente piccolo con $(X_1{}^{(1)}X'_1)$, contro il teorema precedente, essendo X_1 compreso fra X e B (d', 79). Dunque la variabile $(AX^{(1)}{}_n)$ ha per limite (AB) (def. IV, 95) e la variabile $(AX^{(1)})$ ha per limite il segmento (AY) (d', 79 e d, 97), tale che $(AY)n \equiv (AB)$ (a, e d, 97) [1].

b'. Se la forma fondamentale è chiusa si può dividere in n parti uguali.

Basta supporre in b che gli estremi del segmento coincidano rispetto alla unità (def. III, 57 e def. II, 85).

b''. Dato un segmento (AB) finito vi è sempre un segmento $(AB)\dfrac{1}{n}$.

È una forma diversa del teor. b (ind. I, 79).

Def. I. L'elemento che divide in due parti uguali un segmento dato chiamasi elemento *medio* del segmento stesso.

c. L'ipotesi VI è indipendente dalle ipotesi precedenti.

Ciò risulta dal teorema b. Difatti i segmenti di un segmento che si ottengono colla divisione per metà, soddisfano alle ipotesi precedenti quando anche intorno ai loro estremi supponiamo dati i campi infinitesimi (oss. I, 96)

Ognuno di questi segmenti si può esprimere col simbolo $(AA_1)\dfrac{m}{2^n}$, ove m e n sono numeri dati dalla serie (I) (46). Ora dato un numero r si può dividere il segmento (AA_1) in r parti uguali, e se il secondo estremo del segmento $(AA_1)\dfrac{1}{r}$ fosse un elemento di divisione per metà si dovrebbe avere $(AA_1)\dfrac{1}{r} \equiv (AA_1)\dfrac{m}{2^n}$, ossia prendendo il multiplo secondo 2^n, $(AA_1)\dfrac{2^n}{r} \equiv (AA_1)\, m$. Ma perchè vi sia un numero m che soddisfi a questa condizione bisogna che r divida esattamente 2^n, il che non è in generale perchè 2^n è divisibile soltanto per 2 e per le potenze di 2 il cui esponente non è maggiore di n: il 3 ad es. non divide 2^n qualunque sia n.

La proprietà dell'ip. VI è confermata anche dall'intuizione (55).

d. Se (AA') è la n^{ma} parte e (AA'') la n'^{ma} parte di un segmento qualunque (AB) $(n' > n)$, (AA'') è più piccola di (AA'), e se n aumenta indefinitamente (AA') diventa indefinitamente piccola.

---

1) La dimostrazione di questo teor. data dal sig. *Stolz* (l. c. pag. 83) senza bisogno del teor. a, ammette però la legge commutativa di due grandezze qualunque del sistema, che noi invece dimostreremo. Così l'ammette il mio chiariss. amico *De Paolis* (Teoria dei gruppi geometrici. Mem. della R. Accademia di Napoli 1890, pag. 15-16) sebbene la sua dimostrazione essendo incompleta può lasciar credere che si possa evitare il teor. a e anche la legge commutativa. — (Veggasi anche la mia nota citata: Il continuo rettilineo e l' assioma V d' Archimede).

Se fosse $(AA') \equiv (AA'')$, essendo per dato $(AA')n \equiv (AA'')n' \equiv (AB)$ (c, 60), sarebbe $(AA')n' \equiv (AB)$ (d, 79 e c, 60) e perciò anche $n = n'$ (d, 79). Se invece fosse $(AA') < (AA'')$ sarebbe pure $(AA')n < (AA'')\,n$ (d, 79), ma per dato è $(AA'')\,n' \equiv (AA')n \equiv (AB)$, dunque sarebbe $(AA'')n' < (AA'')n$, mentre d'altra parte deve essere $(AA'')n' > (AA'')n$, essendo $n' > n$ (d, 79), dunque è assurdo $(AA') \leqq (AA'')$. Per conseguenza quando n aumenta (AA') diminuisce.

Se ora è dato un segmento (AE) finito quanto piccolo si vuole, si ha:

$$(AE)m < (AA') < (AE)(m+1) \qquad \text{(def. II, 82; } c'\text{. 81).}$$

Dividendo dunque (AA') in $m+1$ parti uguali si ha $(AA')\ \frac{1}{m+1} < (AE)$ (a, d', 79); ma $(AA')\ \frac{1}{m+1} \equiv \frac{(AB)}{n(m+1)}$ (c e a, 79), dunque il teorema è dimostrato.

Oss. I. Osserviamo che questo teorema è indipendente dall'ip. VI qualora si ammetta la divisione di *ogni* segmento limitato in un numero *qualunque* n di parti uguali; ipotesi però che come si vede è più complessa di quella del limite. [1])

d'. *Se si divide un segmento* (AB) *qualunque in* n *parti uguali* ($n \geqq 1$), *e queste ancora in* n *parti uguali, e così via, esse divengono indefinitamente piccole.*

Difatti si ottengono le parti $\frac{(AB)}{n}, \frac{(AB)}{n^2}, \ldots \frac{(AB)}{n^r} \ldots\ldots$ e col crescere indefinito di r, n^r diventa più grande di ogni numero dato m, dunque ecc. (d). [2]).

e. Se si addiziona un segmento (BC) *ad un segmento* (AB) *a partire da* B *del medesimo verso, o di verso opposto rispetto, all'unità di misura si ha lo stesso risultato sommando al segmento* (BC) *a partire da* C *il segmento identico ad* (AB) *e dello stesso verso di* (AB). *Il risultato è indipendente dall'elemento dal quale si comincia per eseguire l'operazione.*

Vale a dire scriveremo

$$(AB) + (BC) \equiv (AC), \quad (BC) + (AB) \equiv (AC)$$

intendendo nella seconda identità che a partire da C viene percorso un segmento identico ad (AB) e nel medesimo verso di (AB).

Supponiamo dapprima che (AB) e (BC) siano dello stesso verso.

1) Se (BC) è infinitesimo rispetto ad (AB), rispetto ad (AB) come unità si ha:

$$(AB) + (BC) \equiv (AB) + o \equiv (AB)$$
$$(BC) + (AB) \equiv o + (AB) \equiv (AB) \qquad (g\text{, 85; def. I 76})$$

e il teorema rispetto all'unità è in tal caso dimostrato.

2) Supponiamo che (AB) e (BC) siano finiti ambidue.

Se sono multipli secondo i numeri m ed n di uno stesso segmento (AA'),

---

1) Ad es. il sistema dei numeri razionali soddisfa a questa condizione senza essere continuo relativo. Ciò dà un'altra ragione per non definire il continuo fondamentale mediante quello numerico, se si bada alla semplicità dei principii ammessi speciamente in geometria,(v. nota n. 55).

2) I teoremi dei numeri della serie (1) (46) di cui facciamo uso nellà dimostrazione di c e d', si dimostrano facilmente mediante i teoremi già dati al cap. III.

scomposti (AB) e (BC) nelle loro m rispettivamente n parti uguali ad (AA'), possiamo considerarne prima n e poi per la legge commutativa della somma dei numeri della serie (I) (46) le rimanenti m senza alterare il risultato (AC) (oss. I, II, 80). Ma n e m parti consecutive uguali ad (AA') danno rispettivamente due segmenti identici a (BC) e (AB) (def. I e II, d, 79); dunque anche in tal caso il teorema è dimostrato.

3) Ci rimane il caso in cui (AB) e (BC) non siano nella suddetta condizione essendo però dello stesso verso.

$Y'\ C'_1\ C'\ X'\ B'\quad A\quad B\ X\ C\ Y$

Consideriamo a partire da A nel verso opposto ad (AB) e quindi anche a (BC) i segmenti:

(1) $$(B'A) \equiv (AB), \quad (C'B') \equiv (BC) \qquad (b', 69)$$

L'elemento B' è contenuto per costruzione in $(C'A) \equiv (C'B') + (B'A)$ (def. I, 72). Si scomponga (AB) in n parti uguali (b) e una di esse sia (AA') che per n abbastanza grande sarà minore di (BC) (d). Dovremo avere quindi un numero $m > n$ tale che

(2) $$(AA')m < (AC) < (AA')(m+1) \qquad (\text{def. II, 82; } c', 81).$$

L'elemento C sarà compreso dunque nella parte $(m+1)^{ma}$ che indicheremo con (XY) e X compreso in (BC) essendo per costruzione $(AX) > (AB)$. Si consideri:

(3) $$(Y'A) \equiv (AY) \quad (X'A) \equiv (AX)$$

L'elemento X è compreso nel segmento (AY) e quindi X' nel segmento $(Y'A)$ essendo $(AX) < (AY)$ e quindi anche $(X'A) < (Y'A)$ (e, 61).

Si ha pure pel secondo caso considerato che:

(4) $$(Y'B') \equiv (BY), \quad (X'B') \equiv (BX).$$

Ora (BY) è maggiore di (BC) e quindi anche $(Y'B')$ è maggiore di $(C'B')$ ((1); e, 61). Così per la stessa ragione $(X'B')$ è minore di $(C'B')$; dunque l'elemento C' è compreso nel segmento $(Y'X')$. Si ha:

(5) $$(Y'X') \equiv (XY)$$

perchè pel caso 2).

$$(Y'X') + (X'A) \equiv (Y'A) \equiv (Y'A) + (Y'X') \text{ e } (AX) + (XY) \equiv (AY) \quad ((3); c, 68; b, 78).$$

Se C_1' è un elemento tale che

(6) $$(AC) \equiv (C'_1A)$$

siccome (AC) è maggiore di (AX) e minore di (AY) ((2)). $(C_1'A)$ deve esser maggiore di $(X'A)$ e minore di $(Y'A)$, ((6), (3); e, 61) e quindi C_1' è pure compreso nel segmento $(Y'X')$.

Se il numero n cresce indefinitamente (XY), e quindi anche $(Y'X')$, decresce indefinitamente (d). Siccome $(Y'X')$ diventa indefinitamente piccolo e C', C_1' sono sempre compresi nel suddetto segmento essi devono coincidere (d, f, 95,)

Si deve avere dunque:

$$(C'B') + (B'A) \equiv (C'A) \equiv (AC)$$

ossia

$$(BC)+(AB)\equiv(AC) \qquad \text{nel senso suindicato.}$$

(4) Supponiamo ora il caso che (AB) e (BC) siano di verso opposto sempre però considerando i due segmenti nel risultato in uno stesso verso del sistema, ad es. in quello dato da (AB). Il teorema dice che se si considera a partire da A prima il segmento $(B'A)\equiv(CB)$ nel verso di (CB) e poi il segmento $(B'A')\equiv(AB)$ a partire da B' nel verso di (AB), si ha:

$$(AA')\equiv(AC)$$

B' A C B

Se $(CB)<(AB)$, (BA), (AC), (AB) sono diretti nel medesimo verso (def. III, 67) e per la dimostrazione precedente si ha:

$$(B'C)\equiv(AB)\equiv(B'A') \qquad (c, 68 \text{ e } b, 78).$$

E partendo in uno e nell'altro verso da B' vi è un solo segmento identico ad un segmento dato (b', 69) dunque si ha che l'elemento A' coincide coll'elemento C, ossia $(AA')\equiv(AC)$.

C A A' B

Se invece $(CB)>(AB)$, (CA) ed (AB) sono dello stesso verso, e quindi considerando un segmento (CA') nel verso di (CA) identico ad (AB) si ha pel caso 3).

$$(CA)\equiv(A'B)$$

ossia

$$(AB)+(BC)\equiv(BC)+(AB).$$

5) Il teorema è vero anche da qualunque elemento si cominci a far l'operazione e in qualunque verso (a, 78), dunque il teorema è pienamente dimostrato.

e'. Dato un segmento (AB) *vi è sempre un segmento* (AC) tale che

$$(AC)\,m<(AB)<(AC)\,(m+1)$$

essendo m *un numero dato.*

Poniamo $m=n-1$ e dividiamo (AB) in n parti uguali. L'ultima parte sia $(B'B)$ e la prima (AA'). Scegliamo in $(B'B)$ un elemento C' e dividiamo $(B'C)$ in $n-1$ parti uguali; una di queste parti sia $(B'C'')$. Sia $(A'C)\equiv(B'C'')$; il segmento (AC) soddisfa alla condizione del teorema.

Difatti si ha:

$$[(AA')+(A'C)]\,m\equiv(\overset{1}{AA'})+(\overset{1}{A'C})+\ldots.+(\overset{m}{AA'})+(\overset{m}{A'C})\equiv(AA')\,m+(A'C)\,m\ (e)$$

ma si ha per costruzione:

$$(AA')\ m+(A'C)\ m<(AB) \qquad (d,\ 79.)$$

dunque:

$$[(AA')+(A'C)]\,m<(AB) \qquad (e, 61)$$

Si ha invece:

$$[(AA')+(A'C')]\ n=(AA')\ n+(A'C')\ n>(AB)$$

essendo

$$(AA')\ n\equiv(AB) \qquad (f,\ 73.)$$

Oss. II. Il teorema *e* vale non solo pel sistema identico nella posizione delle sue parti (def. I, 70) ma eziandio pel solo sistema omogeneo (def. I, 68).

Inoltre è importante di notare come la dimostrazione del teorema in tutti i casi e specialmente nel 3° sia indipendente dall' ipotesi VI sulla continuità, di modo chè vale anche per tutti i sistemi omogenei discreti (def. I, 96) perchè nel 3° caso la variabile $(X'Y')$ contiene già gli elementi costanti C' e C'_1, e quindi ha per limite rispetto all'unità data questi elementi coincidenti (g, 95). Bisogna però ammettere in questo caso la divisibilità in n parti uguali di ogni segmento finito sulla quale si appoggia la dimostrazione del teorema, proprietà codesta che non include ancora quella della continuità, ma che viene dimostrata per mezzo di quest' ultima. (b)

f. Il segmento multiplo secondo un numero m della parte n^{ma} (AC) di un segmento (AB) è sottomultiplo secondo il numero n di un segmento multiplo di (AB) secondo il numero m.

Si ha dunque:

$$(1) \qquad (AC) \equiv \frac{(AB)}{n} \qquad \text{(ind. I, 79)}$$

e sia

$$(AD) \equiv (AC)\,m$$

e quindi

$$(AD) \equiv \frac{(AB)}{n}\,m \qquad (b,\ 9).$$

Sia inoltre

$$(2) \qquad \frac{(AB)\,m}{n} \equiv (AD')$$

vogliamo dimostrare che

$$(AD) \equiv (AD').$$

Si ha da (1)

$$(AC)\,n \equiv (AB) \qquad \text{(def. II, 79)}$$

e sostituendo in (2)

$$\frac{(AC)\,n.\,m}{n} \equiv (AD')$$

ossia

$$\equiv \frac{(AC)\,m.\,n}{n} \equiv (AC)\,m$$

perchè $(AC)\,m.\,n$ è multiplo di $(AC)\,m$ secondo il numero n e quindi $(AC)\,m$ è sottomultiplo secondo questo numero di $(AC)\,m.\,n$ (def. I, II, 79).

Ma $(AC)\,m \equiv (AD)$; dunque

$$(AD) \equiv (AD') \qquad (c,\ 60)$$

$$f'. \qquad (AB)\frac{m}{n} \equiv \frac{(AB)\,m}{n}$$

Perchè $(AB)\frac{m}{n} \equiv \frac{(AB)}{n}\,m$ (b, 79) e quindi pel teorema f si ha la relazione f'.

g. Un segmento qualunque finito (AB) è uguale rispetto all'unità di misura al segmento stesso (BA) percorso nel verso opposto.

Cioè

$$(AB) \equiv (BA)$$

(1) Dimostriamo dapprima che se $(AB) \equiv (AB')$ si ha:

$$(BB') \equiv (B'B).$$

$$\underset{B \quad B_1 \qquad\qquad\qquad B_1' \quad B'}{\overset{A}{\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots}}$$

I segmenti (AB) e (AB') sono diretti in verso opposto, altrimenti B coinciderebbe con B' (b', 69); quindi $(B'A)$ e (AB) sono diretti nelle stesso verso, ma non si sa se (AB) sia identico a $(B'A)$. Si ha però:

$$(B'A) + (AB) \equiv (B'B) \qquad \text{(def. I, 72)}$$

Ma

$$(B'A) \equiv (BA)$$

perchè per dato è

(1) $$(AB) \equiv (AB') \qquad (a.\ 69)$$

Inoltre

$$(BA) + (AB') \equiv (BB') \equiv (B'A) + (AB) \qquad (a,\ 78)$$

dunque

(2) $$(BB') \equiv (B'B)$$

Supponiamo ora che (BA) non sia identico ad (AB) e sia identico ad un segmento (AB_1) nello stesso verso di (AB) (def. I e a', 70) e quindi B_1 non coincida con B. L'elemento B_1 sia inoltre contenuto nel segmento (BA). Vi è nel verso opposto di (AB) a partire da A nel sistema un segmento

(3) $$(AB_1) \equiv (AB_1') \qquad (a',\ 70)$$

da cui $$(B_1A) \equiv (B_1'A) \qquad (a,\ 69)$$

e l'elemento B_1' è contenuto in (AB') per l'identità dei due segmenti (AB) e (AB'), (AB_1) e (AB_1') (def. I e II, 61 ; c', 68 e b, 36 opp. b, 60).

Inoltre da (2)

(4) $$(B_1B_1') \equiv (B_1'B_1)$$

e per ipotesi

(5) $$(BA) \equiv (AB_1)$$

e poichè da e (1), (5), (3) si ha

(6) $$(B'A) \equiv (AB_1) \equiv (AB_1') \qquad (e,\ 8 \text{ o } c,\ 60)$$

ne segue

(6') $$(AB') \equiv (B_1A) \equiv (B_1'A). \qquad (a,\ 69)$$

Ora è

$$(BA) + (AB') \equiv (BB') \equiv (AB_1) + (B_1'A) \qquad ((5)\ (6');\ a,\ 78)$$

considerati i segmenti dell'ultimo membro come consecutivi. Ma

$$(AB_1) + (B'_1A) \equiv (B'_1A) + (AB_1) \equiv (B_1'B_1) \qquad (e)$$

vale a dire

(7) $$(BB') \equiv (B_1'B^1) \qquad (e,\ 8 \text{ o } c,\ 60)$$

Si ha pure:

$$(BB') \equiv (BB_1) + (B_1B_1') + (B_1'B')$$

ossia per la (4)

$$(BB') \equiv (BB_1) + (B_1'B_1) + (B'_1B')$$

intendendo, come abbiamo già detto, che in luogo di (B'_1B_1) vi sia un segmento ad esso uguale consecutivo di (BB_1), e così per $(B_1'B')$ rispetto a $(B_1'B_1)$. Vale a dire confrontando con la (7) si deve avere $(B'_1B') \equiv o$. Se ciò non fosse, essendo $(BB') \equiv [(BB_1) + (B_1'B_1)] + (B_1'B') > (BB_1) + (B_1'B_1)$. ($d$, 77 e def. I 61) ed anche

$(BB_1)+(B_1'B_1)>(B_1'B_1)$, sarebbe $(BB')>(B_1'B_1)$ (d, 61), il che è assurdo ((7) e b,' 61). Dunque si ha anche $(BB_1)\equiv o$ ossia B e B_1, B' e B'_1 coincidono (def. I, oss. I, 76) e perciò:

$$(AB)\equiv(BA).$$

Se invece B è contenuto nel segmento (AB_1), per l'identità dei segmenti (AB) e (AB'), (AB_1) e (AB_1'), si cade nel caso precedente. Dunque il teorema è pienamente dimostrato [1]).

Oss. II. Noi ci serviamo della dimostrazione del teor. e e di teoremi che precedono il principio di continuità (ip. VI), ma il teor. e come si è osservato non dipende neppure da questo principio, quindi anche il teor. g ne è indipendente.

h. Dividendo un segmento (AB) in n parti uguali e le parti risultanti in n parti uguali e così via, si ottiene un gruppo di elementi del segmento dato compresi gli estremi i cui altri elementi sono elementi limiti del gruppo dato rispetto all'unità di misura.

Basta fare la dimostrazione per $n=2$ perchè per n qualunque finito il procedimento è il medesimo.

Sia dato il segmento (AB) e sia N_1 il suo elemento medio (def. I). Sia N_2 l'elemento medio del segmento (N_1B) ed N_3 quello di (N_2B) e va dicendo. Si ha:

$$(N_1B)\equiv(AB)\frac{1}{2}$$

$$(N_2B)\equiv(N_1B)\frac{1}{2}\equiv(AB)\frac{1}{2^2}$$

$$(N_3B)\equiv(N_1B)\frac{1}{2^2}\equiv(AB)\frac{1}{2^3}$$

. . . .

$$(N_rB)\equiv N_{r-1}B)\frac{1}{2}\equiv\ldots\equiv(AB)\frac{1}{2^r} \qquad (c',\ 79)$$

Coll'aumentare indefinito di r poichè ogni segmento (N_rB) ha un elemento medio, (N_rB) diviene indefinitamente piccolo (d'). Dunque B è elemento limite degli elementi N_r. Così si dimostra che A è elemento limite d'un gruppo analogo di elementi N.

Sia ora M un elemento qualunque del segmento (AB) che non sia elemento medio di alcuno dai segmenti costruiti colla divisione per metà. Esso sarà compreso o nel segmento (AN_1) o (N_1B). Supponiamo lo sia nel primo e sia N_2 l'elemento medio di (AN_1); M sarà posto o nel segmento (NN_2) o (N_2N_1). Se esso è situato nel segmento (N_2N_1) coll'elemento medio N_3, M sarà situato o nel segmento (N_2N_3) o (N_3N_1). Evidentemente si ha:

$$(AN_1)\equiv(AB)\frac{1}{2}$$

1) Questa proprietà si dà nei trattati di geometria elementare ed anche in molte memorie sui fondamenti di geometria come un assioma o postulato, ammettendo anche come assiomi sotto forma diversa (facendo cioé uso del movimento delle figure senza deformazione) le proprietà date nella definizione del sistema identico nella posizione delle sue parti (def. I, 70, def. I, 68). Il teor. b è conseguenza della def. I, 68 del sistema omogeneo colla divisione in n parti uguali di ogni segmento nel 1. caso (oss. I), mentre g è conseguenza della def. I, 70 del sistema identico nella posizione delle sue parti. Negli Elementi di geometria ad es. di *De Paolis* la proprietà $(AB)\equiv(BA)$ si deduce infatti dai postulati II, parte III, IV. X, XI. l'ultimo dei quali stabilisce la continuità nel senso del teor. b', 95. Gli altri assiooni che si dànno per la sola retta si possono semplificare colla guida dell'oss. I, 81.

$$(AN_2) \equiv (N_1N_2) \equiv (AN_1)\frac{1}{2} \equiv (AB)\frac{1}{2^2}$$

$$(N_3N_1) \equiv (N_2N_3) \equiv (N_2N_1)\frac{1}{2} \equiv (AB)\frac{1}{2^3}$$

Continuando così l'operazione l'elemento M verrà a trovarsi fra due elementi medi N_r, N_s tali che

$$(N_r N_s) \equiv (AB)\frac{1}{2^n}$$

che diventa indefinitamente piccolo col crescere di n (d'), e che quindi ha l'elemento M dato come elemento limite (g, 95).

Il teorema è dunque dimostrato.

h'. *Le parti* (AX) *di un segmento* (AB) *considerato come unità, i cui elementi* X *siano elementi della divisione successiva di* (AB) *per metà, possono essere rappresentate dal simbolo*

$$(AB)\left(\frac{\alpha_1}{2}+\frac{\alpha_2}{2^2}+\cdots\cdots+\frac{\alpha_n}{2^n}\right),$$

ove le α_1, α_2 .... α_n *sono uguali a o e 1, ma non tutte zero. Negli altri casi possono essere rappresentate dal simbolo*

$$lim\ (AB)\left(\frac{\alpha_1}{2}+\frac{\alpha_2}{2^n}+\cdots\cdots+\frac{\alpha_n}{2^n}+\cdots\right)$$

con: $\qquad lim\ n = \infty$

Ciò deriva dalla dimostrazione del teorema h stesso.

Oss. IV. Nel caso $\alpha_1 = \alpha_2 \ldots, = \alpha_n = \ldots = o$ si ha il segmento nullo (def. I, 76).

h''. *Nel caso che* n *non abbia nel simbolo dato un ultimo valore e se l'operazione si considera come eseguita possiamo rappresentare le parti del segmento* (AB) *col simbolo*

$$(AB)\left(\frac{\alpha_1}{2}+\cdots+\frac{\alpha_n}{2^n}+\cdots\right)$$

$$n = 1.2 \ldots m \ldots \qquad (n = \infty)\ ^{1)}.$$

Veramente $(AB)\left(\frac{\alpha_1}{2}+\cdots+\frac{\alpha_n}{2^n}+\cdots\right)$ è un segmento illimitato che non ha un ultimo elemento, e quindi non contiene l'elemento X, ma nelle nostre ricerche possiamo sostituire questo segmento illimitato al segmento (AX) stesso, non considerando la loro diversità (def. III, 9).

Oss. V. Così se si ha un segmento (AB) limite di una variabile (AX) (non importa che sia sempre crescente o sempre decrescente, purchè sia soddisfatta la condizione che la differenza di due stati successivi diventi indefinitamente piccola), il segmento (AB) può essere sostituito anche da tutta la serie degli stati di (AX) sebbene l'elemento B sia fuori di questa serie.

---

[1] ω secondo *Cantor* (vedi *n.* 90).

Analogamente dicasi se (AB) è segmento limite di due serie (AX) e (AX') l'una sempre crescente, l'altra sempre decrescente.

Def. II. Se $(AB)\left(\frac{\alpha_1}{2}+\cdots+\frac{\alpha_n}{2^n}+\cdots\right)$ determina un segmento (AX), essendo X un elemento ottenuto colla divisione successiva in n parti uguali del segmento (AB), il simbolo $\left(\frac{\alpha_1}{2}+\cdots+\frac{\alpha_n}{2^n}+\cdots\right)$ si chiama *razionale*, in caso contrario si chiama *irrazionale.* [1]

§ 9.

Ipotesi sui campi infinitesimi dei segmenti (VII) — Infinitesimo e zero assoluto — Scomposizione dei segmenti in un dato numero infinito di segmenti infinitesimi — Indefinitamente piccolo in senso assoluto — Segmenti finiti assoluti variabili sempre crescenti o decrescenti — Ipotesi sul continuo assoluto (VIII) — Discreto assoluto. — Elementi limiti assoluti di un gruppo di elementi sulla forma fondamentale.

100. *Oss. I.* Considerando ora di nuovo tutta la forma fondamentale e il segmento (AB) che ci ha servito alla costruzione della prima scala (def. I e oss. I, 80) abbiamo le seguenti ipotesi:

1ª. (AB) è indivisibile, (def. V, 62);

2ª. (AB) è somma di un numero finito di segmenti indivisibili;

3ª. (AB) è divisibile in un numero qualsiasi finito n di parti finite fra loro, nel qual caso e per la def. I, 68 e per l'ip. VI (AB) è continuo relativo;

4ª. vi è un ultimo campo infinitesimo rispetto al segmento primitivo dato (AB), ad es. di ordine η (oss. III, 91 e def. VI, 86). In tal caso ogni segmento infinitesimo di 1°, ordine rispetto ad (AB) avrebbe un ultimo campo infinitesimo d'ordine $\eta-1$. E può darsi ancora in questo caso che nell'ultimo campo infinitesimo d'ordine η rispetto ad (AB) vi sia un ultimo segmento indivisibile che non contenga cioè altri elementi (def. V, 62). In tal caso la forma fondamentale non potrebbe esser continua in questo campo (ip. VI).

5ª. Può darsi ancora che il segmento (AB) non contenga un ultimo campo infinitesimo in modo che la serie degli ordini dei campi infinitesimi sia illimitata, ma non oltrepassi un numero infinito determinato. Così succederebbe se gli ordini dei campi infinitesimi fossero dati dai numeri 1, 2, 3.. n... della serie (I) (46).

In ognuno di questi casi i segmenti dati della forma fondamentale non avrebbero la stessa proprietà rispetto alla loro scomposizione in campi infinitesimi e quindi

---

3) Volendo limitarci al finito soltanto, la via da seguire si semplifica. Basta dopo le def. date nell'oss. II, 81 stabilire la seguente ipotesi:

Dato un segmento (AB) *qualunque del sistema omogeneo vi è sempre in esso un elemento* C *distinto da* A *e* B.

In questo caso non occorre tener conto dell'unità di misura, essendovene una sola. Dall'ipotesi suddetta e dalle definizioni del sistema omogeneo si deducono i teor. del n. 95. Si dà poi l'ip. VI e si dimostrano nello stesso modo i teor. dei n. 96-99. Questa sarebbe in massima la via da seguire in un trattato di geometria elementare ad uso delle scuole liceali per stabilire le proprietà della retta considerata dapprima in sè (Vedi nota n. 81, la pref. e le note indicate con numeri romani della parte I). Alcuni di questi teor. ad es. h' e h'' e la def. II. di questo numero non occorrono come si vedrà nei fondamenti della geometria.

per l'uniformità stessa, sotto questo rispetto, dei segmenti dati stabiliamo la seguente ipotesi:

Ip. VII. **Il segmento** (AB) **che ha servito a costruire la prima scala** (def. I, 80) **contiene infinitesimi dello stesso ordine di quelli di ogni altro segmento limitato della forma fondamentale maggiore di** (AB).

a. L'ipotesi VII è indipendente dalle ipotesi precedenti.

Che sia indipendente risulta dal fatto che esprime una proprietà non contenuta nelle ipotesi precedenti, e non può per questo derivare da esse, come non ne è esclusa, potendo essere applicate anche con questa nuova ipotesi. Infatti sul segmento primitivo (AB) che ci ha servito a costruire la prima scala (def. I, 80) non abbiamo fatta alcuna ipotesi (oss. I. 80), mentre le ipotesi IV e V ci hanno servito per costruire i segmenti infiniti rispetto ad un segmento uguale o maggiore di (AB), e l'ipotesi VI ci ha servito per definire la continuità dei segmenti della forma fondamentale relativamente ad un'unità, cioè di quei segmenti che contengono degli infinitesimi e che quindi rispetto a questi soddisfano alle ipotesi IV e V. Scelto un infinitesimo d'ordine η rispetto ad (AB), rispetto ad esso come unità fondamentale possiamo applicare le ipotesi IV e V, come si possono applicare ad un infinitesimo d'ordine η rispetto ad ogni altro segmento limitato maggiore di (AB), e quindi anche l'ipotesi VI.

b. Ogni segmento limitato della forma fondamentale soddisfa all'ip. VII.

Se è dato un segmento (XY) qualunque vi è sempre un solo segmento (AC) nel verso della scala uguale a (XY) (b', 69).

Se è $(AC) \equiv (AB)$, il teorema si confonde coll'ipotesi stessa (b, 60). Se è invece $(AC) > (AB)$ (b, 73), (AC) è finito o infinito rispetto ad (AB) (f, 82); ed è chiaro che siccome (AB) ha infinitesimi degli stessi ordini di un segmento qualunque (DE), a maggior ragione li deve avere (AC) (def. I, 61).

Se è invece $(AC) < (AB)$, (AC) è finito o infinitesimo rispetto ad (AB) (def. II, f, 82). Se la proprietà b vale quando è infinitesimo, a maggior ragione vale quando è finito (def. I, 61) e def. II, 82). Sia infinitesimo di ordine η e supponiamo non abbia infinitesimi gli ordini dei quali sorpassino un numero dato σ di (II) (91). In tal caso (AB) non avrebbe infinitesimi di ordine $\eta+\sigma$, che sarebbero infinitesimi d'ordine σ rispetto ad (AC) (oss. III, 91 e def. III 86), mentre (AB) deve avere di tali infinitesimi, essendovi dei segmenti infiniti ad es. quelli di ordine $\eta+\sigma$ rispetto ad (AB), rispetto ai quali (AB) è infinitesimo d'ordine $\eta+\sigma$ (ip. VII).

Oss. II. ***Dall'ipotesi stessa risulta che non vi è un ultimo segmento dato (AB) indivisibile***, cioè un segmento (AB) più piccolo di ogni segmento dato.

c. La differenza di due segmenti (AB), (CD) finiti assoluti non identici è un segmento finito assoluto.

Difatti se $(AB) > (CD)$ e ($C'B$) in (AB) è identico a (CD), si ha che in (AB) A e C' non coincidono (def. I, b, 61) e quindi (AC') è un segmento finito assoluto (def. V, 92).

Def. I. Non abbiamo un infinitesimo rispetto all'unità assoluta nel senso

fin qui usato di questa parola, altrimenti vi sarebbe un ultimo infinitesimo contro l'ip. VII. Ma per *uniformità di linguaggio* possiamo dire che vi è un *infinitesimo assoluto* i cui estremi dobbiamo però ritenerli come un solo elemento in senso assoluto (def. III, 57) in base ai principî già ammessi, vale a dire *l'infinitesimo assoluto è nullo rispetto all'unità assoluta,* ossia rispetto ad ogni segmento (AB) come unità di misura (def. V, 92) [1]).

d. Due segmenti che differiscono per un segmento infinitesimo assoluto sono uguali in senso assoluto.

Difatti sono uguali in senso assoluto (def. III, 9) perchè gli estremi di un segmento infinitesimo assoluto sono per noi coincidenti in senso assoluto (def. III, 57 e def. I).

e. Ogni segmento (AB) della forma fondamentale da A verso B si può scomporre in un numero infinito η determinato di segmenti consecutivi infinitesimi successivamente di ordine η, η-1, ..., 1.

Difatti scelto in (AB) un segmento (AC) infinitesimo d'ordine η (oss. III. 91) rispetto ad (AB) (b) i campi infiniti di 1°, 2°,...., (η-1°) ordine rispetto ad (AC) sono i campi infinitesimi di ordine η-1, η-2.... 1 rispetto ad (AB) (f'', 92 e d, 93). Scelto quindi un elemento C' nel campo infinitesimo d'ordine η-1, un elemento C'' nel campo infinitesimo d'ordine η-2 e così via, un elemento $C^{\eta-1}$ nel campo infinitesimo d'ordine 1, il segmento (AB) rimane scomposto negli η segmenti consecutivi (AC), (CC'), $(C'C'')$, ..., $(C^{\eta-1}B)$ nel senso stabilito nella conv. I del n. 91.

f. In ogni segmento (AB) vi è semgre un segmento il cui multiplo secondo il numero dato η è minore di (AB) ed uno il cui multiplo secondo lo stesso numero è maggiore di (AB).

Se η è un numero intero finito n, vale la stessa dimostrazione data pel teor. a' del n. 95.

Se è infinito, sia μ l'ordine d'infinito di η. Tutti i numeri dello stesso ordine sono rappresentati dal simbolo ∞^{μ} e sono della stessa specie (c, 91 e a, 86). Sia (AB') un infinitesimo di quest'ordine ed essendo già stabilite le scale e quindi le loro origini come bisogna supporre nel confronto dei segmenti infiniti (oss. IV, 91) [2]), prendendo i multipli di (AB') secondo i numeri dello stesso ordine di η e considerando soltanto quelli che differiscono di un numero dello stesso ordine (come ad es. ∞_1, ∞_1. 2 e non ad es. ∞_1, $\infty_1 \pm n$ che sono uguali rispetto all'unità infinita di 1° ordine) (AB) sarà compreso fra due di questi multipli, se non è esso stesso uno di essi e sarà finito con essi. Ad es. si avrà $(AB')\eta_1 \leqq (AB) < (AB')(\eta_1 + 1_\mu)$ intendendo che 1_μ in questo caso sia l'unità infinita della stessa specie dei numeri η, η_1 (l, 92).

1) Se $\eta_1 \geqq \eta$ allora $(AB')\,\eta \leqq (AB')\,\eta_1 \leqq (AB)$, ($g$, 92; d', 61).

In tal caso si ha pure $\eta_1 + 1_\mu > \eta$ e vi sarà un numero m finito tale

1) Dalla definizione stessa risulta che se A è l'infinitesimo assoluto non vi è alcun numero della classe (II) tale che A. η sia uguale o superi un segmento qualunque cogli estremi distinti. Esso non ci può servire dunque, come l'elemento fondamentale, a costruire da solo la forma fondamentale (105).

2) Vedi n. 103.

che $\eta\, m > \eta_1 + 1_\mu$, perchè η e $\eta_1 + 1_\mu$ sono dello stesso ordine e perciò finiti (*c*, 91; *a*, 86; *c*,' 81). Quindi preso un segmento $(AB'') \equiv (AB')\, m$ si avrà:

$$(AB'')\,\eta > (AB)$$

essendo per ipotesi $(AB')(\eta_1 + 1\,\mu) > (AB)$. (*d*, 61).

2) Se invece $\eta_1 < \eta$ e se η e η_1 differiscono per un numero infinitesimo, ad es. $\eta = \eta_1 + \sigma$ scegliendo per η il numero $\eta_1 + \sigma + 1\,\mu$ si ha:

$$(AB')(\eta_1 + \sigma + 1\,\mu) > (AB)$$

e se
$$(AB')(\eta_1 + \sigma) \leqq (AB)$$

essendo σ, infinitesimo rispetto a η_1 e (AB) finito rispetto a $(AB')\,\eta_1$, si ricade nel caso di prima.

3) Se poi η differisce da η_1 almeno di un'unità 1_μ, ossia $(A_{\infty_1}\mu)$, allora siccome dopo η_1 abbiamo $\eta_1 + 1_\mu$ si avrà evidentemente $\eta \geqq \eta_1 + 1_\mu$, quindi

$$(AB')\,\eta > (AB).$$

E per avere in questo caso un segmento il cui multiplo secondo η sia minore di (AB), basterà dividere (AB') in un numero m di segmenti consecutivi (*a*, 95) di cui ad es. (AB'') sia il minore, e si avrà:

$$(AB'')\, m\, \eta_1 < (AB) \qquad (d'', 79 \text{ e } g, 92).$$

Essendo m un numero tale che

$$\eta_1\, m > \eta,$$

si ha:

$$(AB'')\,\eta < (AB'')\, m\, \eta_1 \qquad (g,\ 92 \text{ e } d',\ 60).$$

e a più forte ragione

$$(AB'')\,\eta < (AB). \qquad (d',\ 61).$$

Un analogo ragionamento vale se nel 2° caso è $(AB')(\eta_1 + \sigma) > (AB)$ per avere un segmento (AB'') tale che sia $(AB'')\,\eta < (AB)$. In tal caso basta prendere $m = 2$.

Def. II. Un segmento (AX) finito assoluto (def. V, 92) che diventa più piccolo di ogni segmento assoluto dato, diremo che diventa *indefinitamente piccolo in senso assoluto* o che *tende a diventare infinitesimo assoluto* (def. I) o che ha per *limite* questo infinitesimo.

E scriveremo

$$\textit{lim. ass.}\ (AX) \equiv \text{infinitesimo ass.}$$

Def. III. Un segmento finito assoluto (AX) tale che X si avvicina indefinitamente in senso assoluto ad un altro elemento B si dice che ha per *limite* il segmento (AB), e si scrive:

$$\textit{lim. ass.}\ (AX) \equiv (AB).$$

Oss. III. Le definizioni sui segmenti variabili date al n. 83 valgono anche se si tratta di segmenti finiti assoluti.

Def. IV. Per variabile assoluta sempre crescente o sempre decrescente intendiamo un segmento variabile sempre crescente o sempre decrescente (83) tale che le differenze di due stati qualsivogliano da uno stato qualunque dato della variabile non restino sempre finite fra loro, o non siano sempre infinite o infinitesime fra loro di un ordine che non superi un numero dato di (II) (91).

g. Se un segmento finito assoluto (AX) *coll'estremo* X *variabile diventa più piccolo di ogni segmento finito assoluto dato esso ha per limite lo zero assoluto.* Cioè:

$$lim._{ass.} (AX) \equiv 0$$

Perchè l'infinitesimo assoluto è nullo rispetto all'unità assoluta (def. I).

h. Un segmento variabile (AX) *può diventare indefinitamente piccolo in senso assoluto in uno e nell' altro verso.*

Dim. analoga a quella del teor. *e*, 95.

i. Se gli elementi X *e* X' *si avvicinano indefinitamente in senso assoluto e nei versi opposti ad un dato elemento* A, (XX') *diventa indefinitamente piccolo assoluto.*

Dim. analoga a quella del teor. *f*, 95.

l. Un segmento che diventa indefinitamente piccolo in senso assoluto cogli estremi variabili in versi opposti e contiene un elemento fuori del campo di variabilità dei suoi estremi ha per limite un solo elemento (def. II, *h*, e *g*).

m. Se X *si avvicina indefinitamente ad un elemento* X' *in senso assoluto, e questo nello stesso verso ad un elemento* A, X *si avvicina in senso assoluto ad* A.

Dim. analoga a quella del teor. *h*, 95.

n. Se X *e* X' *si avvicinano indefinitamente in senso assoluto e nello stesso verso ad un elemento* A, (XX') *o* $(X'X)$, *diventa indefinitamente piccolo in senso assoluto.*

Dim. analoga a quella del teor. *i*, 95.

101. Oss. I. L'ipotesi VI ci dice che se (XX') diventa indefinitamente piccolo rispetto ad ogni segmento dato (AB) come unità, quando X e X' si avvicinano in verso opposto, il segmento (XX') contiene sempre almeno un elemento Y differente da X e X'. Ma per l'ipotesi VII esso contiene sempre degli infinitesimi rispetto ad (AB). Quando invece (XX') diventa indefinitamente piccolo in senso assoluto diventa più piccolo di ogni segmento infinitesimo dato (def. II, 100), e quindi i due casi sono distinti, e dalla sola ipotesi VI come si vedrà in seguito (*c*, 103) non deriva che nel secondo caso (XX') contenga un elemento fuori del campo di variabilità degli estremi. Per ciò, è anche per l'uniformità che in senso ristretto intuiamo fra le parti indefinitamente piccole dell'oggetto rettilineo (55) stabiliamo la seguente ipotesi:

Ip. VIII. **Ogni segmento (XX') cogli estremi variabili in versi opposti che diventa indefinitamente piccolo in senso assoluto contiene un elemento fuori del campo di variabilità dei suoi elementi.**

a. Non può esservi che un solo elemento nel segmento (XX') *che goda la proprietà dell'ip. VIII.*

Difatti se ve ne fossero altri, essi rispetto all'unità assoluta o in senso

assoluto coinciderebbero in un solo elemento, altrimenti (XX') resterebbe maggiore di un segmento finito assoluto dato contro l'ip. VIII (def. II, 100).

a'. Data la variabile (AX) *sempre crescente e la variabile* (AX') *sempre decrescente e diretta nello stesso verso e se* (XX') *diventa indefinitamente piccolo, in senso assoluto vi è un solo elemento* Y *tale che* (AY) *è limite dei due segmenti variabili, e non è uno stato delle due variabili* (*a*).

Def. I. Il sistema omogeneo che soddisfa all'ip. VIII lo diremo *continuo assoluto,* mentre gli altri li diremo *discreti assoluti.*

b. Un sistema omogeneo continuo in senso assoluto è continuo relativamente ad ogni segmento dato come unità di misura, o in altre parole: *se è soddisfatta l'ip. VIII resta soddisfatta anche l'ip. VI rispetto ad ogni unità.*

Difatti quando il segmento (XX') diventa indefinitamente piccolo in senso assoluto (def. II, 100) a maggior ragione diventa indefinitamente piccolo rispetto ad ogni segmento (AB) come unità (def. I, 95), e poichè (XX') ha un elemento limite in senso assoluto lo ha anche relativamente all'unità (AB) (*b*, 96).

102. Oss. I. Fra due stati dati consecutivi di un segmento variabile (AX) e (AX') basta considerare quelli pei quali gli estremi X e X' sono distinti, perchè altrimenti X e X' coincidono in senso assoluto. Gli stati successivi quindi della variabile in senso assoluto sempre crescente o sempre decrescente li potremo indicare coi numeri sempre maggiori della serie (II) (def. IV. 100).

a. Se (AB) *è segmento limite di un segmento variabile* (AX_η) *si ha:*

$$lim\,(AX_\eta) \equiv (AB)$$

con: $$lim\,\eta = \Omega \text{ [1]} \qquad \text{(def. VI, 92)}$$

Difatti col crescere di η, X_η si avvicina indefinitamente a B, cioè (AX_η) si avvicina indefinitamente ad (AB) (def. III, 100).

b. Data la variabile sempre crescente (*crescente*) (AX) *e la variabile decrescente* (*sempre decrescente*) (AX') *in senso assoluto, ed ogni segmento* (AY) *minore* (*maggiore*) *degli stati di* (AX) $[(AX')]$ *appartenga alla variabile* (AX), $[(AX')]$, *il segmento* (XX') *diventa indefinitamente piccolo in senso assoluto.*

La dimostrazione di questo teorema è analoga a quella del teor. *b*, 97: basta supporre che (BC) sia un segmento finito assoluto dato qualunque. Si dimostra cioè allo stesso modo che $(AX_1)+(X_1X_2)\,n$, essendo $(X_1X_2)\equiv(BC)$, è uno stato di (AX) qualunque sia n. Ma se la variabile (AX) non avesse altri stati oltre a quelli dati col variare indefinitamente di n, non sarebbe variabile in senso assoluto (def. IV, 100). Quindi fra gli stati di (AX) per l'ipotesi $(XX')>(BC)$ dovremo avere anche $(AX_1)+(X_1X_2)\,\eta$, dove η è un numero infinito. Ma η non può essere inferiore ad un numero qualunque μ infinito di ordine σ di (II) (91) perchè in tal caso le differenze degli stati della variabile da (AX_1) facendo variare η sarebbero al più infinite d'ordine σ, contro la def. IV, 100. Dunque coll'ipotesi precedente η dovrebbe crescere indefinitamente in senso assoluto. Ma se (AX_1') è uno stato dato della variabile (AX'), vi è sem-

---

1) Sarebbe improprio scrivere in questo caso $\eta = \Omega$.

pre un numero η di (II) tale che $(X_1X_2)\eta > (X_1X_1')$ (*l*, 92), vale a dire vi sarebbe uno stato di (AX) maggiore di uno stato (AX_1') di (AX') contro il dato. Dunque ecc. [1]).

c. Il segmento $(X_\eta X_{\eta+\rho})$ *compreso fra due stati successivi di* (AX_η) *e* $(AX_{\eta+\rho})$ *della variabile se è sempre crescente, o* $(X_{\eta+\rho} X_\eta)$ *se è sempre decrescente, e se (AB) è il suo segmento limite, col crescere indefinitamente di* η *diventa più piccolo di ogni segmento dato.*

Analogamente a *c* del n. 97.

d. Un segmento (AX_η) *variabile sempre crescente (o decrescente) in senso assoluto ha sempre uno ed un solo segmento limite maggiore (o minore) di ogni stato della variabile.*

Dim. analoga a quella del teor. *d*, 97. Soltanto nel 1° caso è da osservare che qui non abbiamo l'infinito di 1° ordine, ma l'infinito è assoluto, ossia tutto il sistema nel verso della variabile a partire dall'origine *A*. Basta appoggiare la dimostrazione ai teor. *a'*, 101 e *b*, anzichè ai teor. *b'*, 96 e *b*, 97.

d'. Se due serie sempre crescenti o decrescenti in senso assoluto di segmenti rispettivamente uguali determinano due segmenti (AB) e (A'B'), questi segmenti sono uguali in senso assoluto.

Come il coroll. *d'* del n. 97.

Def. I. Un elemento *A* si chiama *elemento limite assoluto di una serie di elementi* $X_1 X_2 \ldots\ldots X_\eta \ldots\ldots \equiv (X_\eta)$ ordinata secondo un verso della forma fondamentale quando in ogni segmento (AB) piccolo quanto si vuole ma dato, vi è un elemento della serie.

e. Se (AB) è un segmento limite assoluto di un segmento variabile (AX_η), *l'elemento B è l'elemento limite assoluto della serie data dagli elementi* X_η.

Dim. analoga a quella del teor. *a*, 98.

§. 10

Divisione assoluta di un segmento in n parti uguali. — Determinazione delle scale rispetto ad un segmento dato come unità fondamentale. — Divisione di un segmento in η parti uguali — Legge commutativa della somma di due o più segmenti consecutivi — Il segmento (AB) è identico al segmento opposto (BA) — Elementi limiti del gruppo di elementi ottenuti colla divisione successiva di un segmento in η parti uguali — Altre proprietà degli elementi limiti assoluti di un segmento dato — Simboli che rap-

---

1) Se $AX)$ è sempre finito o infinitesimo rispetto adun' unità e (AX') è sempre infinito, (AX) soddisfa alla condizione di essere sempre minore di (AX') e che ogni segmento (AY) minore di tutti i segmenti infiniti è uno stato della variabile (AX). In tal caso però (XX') non diventa più piccolo di ogni segmento dato, perchè rimane superiore ad ogni segmento finito.

Limitandosi al campo dei segmenti finiti, infintesimi d'ordine finito, η è allora un numero finito o infinito d'ordine finito, e se la variabile in tal caso è sempre decrescente o sempre crescente in verso assoluto basta che le differenze dei suoi stati da un certo stato non rimangano finite fra loro.

presentano le parti e gli elementi di un segmento — Segmenti commensurabili di 1ª e 2ª specie, e segmenti incommensurabili.

103. *a. Ogni segmento* (AB) *è divisibile in un solo modo e in senso assoluto in* n *parti uguali.*

Il teor. *a*, 99 vale anche in senso assoluto; basta supporre nella dimostrazione di questo teorema che (X_1X_1') diventi indefinitamente piccolo in senso assoluto anzichè in senso relativo ad un'unità.

Non occorre dire per la dimostrazione in senso assoluto che X'_n ha un punto limile Y che coincide con X_n, come pure non occorre supporre che X_2'' abbia un punto limite L differente da X_2, basta supporre che X_2'' non si avvicini indefinitamente in senso assoluto all'elemento X_2, nel qual caso si può scegliere un segmento (X_2L) tale che in esso non vi siano punti X_2''; ed allora vale la stessa dimostrazione nei due casi $(AX_1') \lesseqgtr (AX)_1$.

Così nel caso da $n-1$ ad n.

Per la proprietà inversa basta osservare che $(X_n X_n')$ è sempre maggiore di (X_1X_1'), perchè nel caso $(AX_1') > (AX_1)$, e similmente se fosse $(AX_1) > (AX_1')$ si ha:

$$(AX_1') \equiv (AX_1) + (X_1X_1'),\ (AX_1')\, n \equiv (AX_1)\, n + (X_n X_n')$$

La 2ª ci da:

$$(AX_1')(n-1) + (AX_1') \equiv (AX_1)(n-1) + (AX_1) + (X_n X_n')$$

o ancora

$$(AX_1')(n-1)(AX_1) + (X_1X_1') \equiv (AX_1)(n-1) + (AX_1) + (X_n X_n') \quad (d,\ 77)$$

ma

$$(AX')(n-1) > (AX_1)(n-1) \qquad (d,\ 79)$$

dunque

$$(AX_1) + (X_1X_1') < (AX_1) + (X_n X_n') \qquad (d,\ 77\ ;\ g^{\text{v}},\ 73)$$

e perciò

$$(X_1X_1) < (X_n X_n') \qquad (f,\ 73).$$

La dimostrazione di *a* è analoga a quella del teor. *b*, 99 basandosi sul teor. *f*, 100 anzichè sul teor. *a'*, 95.

Oss. I. È da osservare che questo teorema non coincide col teor. *b*, 99, perchè con questo il secondo estremo della parte n^{ma} rappresenta un campo infinitesimo di 1° ordine, mentre col teor. *a* la parte n^{ma} è un solo segmento in senso assoluto.

b. Dato un simbolo irrazionale α *ed un segmento* (AB) *qualunque, relativamente all'unità* (AB) *esso determina una serie di segmenti infinitesimi di* 1° *ordine, ma non un solo segmento.*

Difatti esso determina un solo segmento $(AC) \equiv (AB)\, \alpha$ in senso relativo $(h'', 99)$, e quindi in senso assoluto C rappresenta un campo infinitesimo di 1° ordine $(b,' 92)$. Ora se (AX) è un segmento coll'estremo X in questo campo l'operazione $(AX)\, n$ è pienamente determinata e a senso unico $(d,\ 79)$, ma appli-

cando l'operazione inversa di quella del simbolo α, da (AX) si ottiene non un segmento ma tutta la serie di segmenti dati da A con B e con tutti gli altri elementi del campo infinitesimo di 1° ordine intorno a B rispetto all'unità (AB).

Determinazione delle scale rispetto ad un segmento dato come unità fondamentale.

Prima di continuare nello studio delle proprietà particolari di un segmento rispetto ai suoi infinitesimi è bene che noi facciamo vedere come si possono fissare le scale (oss. IV, 91) affine di poter confrontare in modo determinato i segmenti fra loro e far meglio conoscere la costituzione delle nostre grandezze.

Dapprima data l'origine fondamentale A siano date le origini dei campi infiniti che vengono indicate coi numeri ∞_1^{μ}, ove μ è un numero della nostra classe (II) (91) eccettuato lo zero. Osservo che fissata l'origine A_{∞_1} è determinata anche la scala di unità (AA_{∞_1}), e per ogni elemento di divisione le scale di unità (AA_1) che sono identiche a quella di origine A nel verso dato e di unità (AA_1) $(c, d, 69)$.

Fissata l'origine $A_{\infty_1^2}$ sono determinate in modo unico le scale nel campo infinito di 2° ordine, perchè considerando ad es. un segmento $(A_{\infty_1^2}B) \equiv (AA_{\infty_1})$ $(b', 69)$, (AB) che è multiplo di (AA_1) secondo il numero $\infty_1^2 + \infty_1$ (def. I, 92) e intorno agli elementi di divisione rappresentati dai sinboli infiniti $\infty_1^2 n \pm \infty_1 n_1$, ove n e n_1, sono finiti, abbiamo le scale di unità (AA_1) in un verso o di unità (A_1A) nel verso opposto.

Basta dunque supporre dati gli elementi o le origini $A_{\infty_1}, A_{\infty_1^2}, \ldots. A_{\infty_1^m}$, ... $A_{\infty_1^{\infty_1}}$, ... $A_{\infty_1^{\mu}}$, essendo μ un numero dato della classe (II) (91).

Così nei campi infinitesimi a cominciare da A, determinati dall'ipotesi VII, e che sono sottoposti ai teoremi già trovati ai n. 86-92, basta fissare gli elementi o le origini $A_{\frac{1}{\infty_1}}, A_{\frac{1}{\infty_1^2}}, \ldots. A_{\frac{1}{\infty_1^{\mu}}}$ in modo dunque che il multiplo secondo il numero ∞_1^{μ} di $\left(AA_{\frac{1}{\infty_1^{\mu}}}\right)$ è (AA_1).

E intorno agli elementi di divisione già ottenuti siano date le scale di queste unità.

Ma ciò non basta. Abbiamo veduto che in senso assoluto un segmento qualunque limitato, ad es. (AA_1), si può dividere in n parti uguali (a). Intorno a ciascuno degli elementi M_r della divisione, assoluta ad es. per metà applicata un numero n qualsiasi di (I), (46), costruiamo le scale di unità $(M_r M_r')$ $\left(AA_{\frac{1}{\infty_1}}\right)$, e così intorno a M_r e agli elementi di divisione di queste scale possiamo costruire i campi infinitesimi di qualunque ordine colle unità uguali ad $\left(AA_{\frac{1}{\infty_1^2}}\right)$ e $\left(A_{\frac{1}{\infty_1^2}}A\right)$, e così via $(b', 69)$. Ora, nell'unità $(M_r M_r')$ faremo la divisione assoluta per metà applicata un numero finito qualunque n di volte i cui elementi da M_r saranno indicati dal simbolo

$$(M_r M_r')\left(\frac{\alpha_1'}{2} + \frac{\alpha_2'}{2^2} + \cdots + \frac{\alpha_n}{2^n}\right) \qquad (h', 99)$$

e in base al teor. b', 69 avremo anche gli elementi corrispondenti a questi segni in ogni unità delle scale di origine M_r e di unità $(M_r M_r')$ e $(M_r' M_r) \equiv -(M_r M_r')$ (c'), 77 e così per ogni elemento M_r di (AA_1).

A partire da A uno qualunque degli elementi di divisione per metà così ottenuti nel campo infinitesimo di 1° ordine intorno ad M_r sarà espresso dal simbolo:

$$(1) \qquad (AA_1)\frac{m}{2^n} \pm (M_r M_r')m_1\frac{m'}{2^{n'}} \qquad (m < 2^n, m' < 2^{n'})$$

ove m, m_1, m' e n' sono numeri di (I) (46), quando in senso assoluto si ha:

$$(AA_1)\frac{m}{2^n} \equiv (AM_r)$$

Il simbolo (1) può scriversi anche così:

$$(AA_1)\left(\frac{m}{2^n} + m_1\frac{m'}{2^n \infty_1}\right)$$

Così continuando si ottengono gli elementi della divisione assoluta per metà nell'unità fondamentale (AA_1), che saranno indicati dal simbolo:

$$Z = (AA_1)\left[\left(\frac{\alpha_1^{(0)}}{2} + \frac{\alpha_2^{(0)}}{2^2} + \dots + \frac{\alpha_n^{(0)}}{2^n}\right) \pm \frac{m_1}{\infty_1}\left(\frac{\alpha_1^{(1)}}{2} + \frac{\alpha_2^{(1)}}{2^2} + \dots + \frac{\alpha_n^{(1)}}{2^{n_1}}\right) \pm \dots\right.$$

$$\pm \frac{m_r}{\infty_1^r}\left(\frac{\alpha_1^{(r)}}{2} + \dots + \frac{\alpha_{nr}^{(r)}}{2^{nr}}\right) + \dots + \frac{m_{\infty_1 - r'}}{\infty_1^{\infty - r1}}\left(\frac{\alpha_1^{(\infty_1 - r')}}{2} + \dots + \frac{\alpha_{n(\infty_1 - r')}^{(\infty_1 - r')}}{2^{n\infty_1 - r'}}\right)$$

$$\left. + \dots + \frac{m_\mu}{\infty_1^\mu}\left(\frac{\alpha_1^{(\mu)}}{2} + \dots + \frac{\alpha_\mu^{(\mu)}}{2^{n_\mu}}\right)\right]$$

dove le α non sono tutte zero e sono numeri uguali a o e a 1, qualunque sia n. S'intende che r e r' devono essere numeri finiti dati, e quindi l'infinitesimo di ordine $\infty_1 - r'$ si riferisce all'elemento determinato dalle parentesi precedenti, e così via.

Ogni altro elemento di (AA_1) che non sia rispetto ad (AA_1) un elemento di divisione per metà viene dato in senso relativo dal simbolo:

$$(2) \qquad (AA_1)\left(\frac{\alpha^{(0)}}{2} + \frac{\alpha^{(0)}}{2^2} + \dots + \frac{\alpha_n^{(0)}}{2^n}\right) \qquad (h'', 99)$$

$$n = \infty$$

Se questo simbolo determina un elemento X tale che (AX) sia una parte n^{ma} di (AA_1) allora (2) determina un solo elemento in senso assoluto (a). Se ciò non è, ossia se il simbolo

$$(2') \qquad \alpha = \left(\frac{\alpha_1^{(0)}}{2} + \dots + \frac{\alpha_n^{(0)}}{2^n} + \dots\right), \qquad n = \infty$$

è irrazionale, allora non determina un solo elemento ma un campo di elementi (b). Noi fisseremo perciò l'elemento in questo campo che vogliamo sia rappre-

sentato in senso assoluto dal simbolo α, e nel fissare gli altri elementi oltre che del teor. *a*, dati che siano i segmenti a partire da A che in senso assoluto corrispondono ai simboli irrazionali α e β, uno dei quali può essere anche razionale, ed è ad es. $\alpha \geqq \beta$, al simbolo $\alpha \pm \beta$ faremo corrispondere il segmento somma o differenza dei segmenti precedenti, che è pienamente determinato. E costruito un segmento (AN) che corrisponde in senso assoluto al simbolo irrazionale α, immagineremo costruiti mediante il teor. *b'*, 69 a partire da ogni elemento già dato in (AA_1) colle operazioni precedenti, i segmenti uguali al segmento (AN). Intorno all' elemento N, e degli altri che così otteniamo, costruiremo i campi infinitesimi e gli elementi della divisione per metà.

Così faremo per le unità $\left(AA_{\frac{1}{\infty_1}}\right) .... \left(AA_{\frac{1}{\infty_1{}^{\mu}}}\right)$ Ad es. un elemento della divisione per metà del campo infinitesimo di 1° ordine intorno ad N verrà indicato dal simbolo:

$$(AA_1)\left(\frac{\alpha_1{}^{(0)}}{2}+\frac{\alpha_2{}^{(0)}}{2^2}+ .... +\frac{\alpha_n{}^{(0)}}{2^n}+ ....\right) \pm \frac{m_1}{\infty_1}\left(\frac{\alpha^{(1)}}{2}+ .... +\frac{\alpha_n{}^{(1)}}{2^{n_1}}\right)$$

$$n = \infty$$

Limitandosi ai soli numeri infiniti di ordine finito basta arrestarsi nel simbolo Z al numero $\infty_1{}^r$, essendo r un numero qualunque di (I). In tal caso ogni elemento X di (AA_1) deve trovarsi nei campi infinitesimi di 1° ordine indicati dalla prima parentesi di Z quando n è finito o quando cresce indefinitamente, perchè ogni elemento dato di (AA_1) è limite del gruppo degli elementi ottenuti colla successiva divisione per metà, se non è esso stesso uno di que-sti elementi (*h*. 99). Quindi X si troverà nel campo infinitesimo di 1° ordine di uno dei punti ottenuti colla prima parentesi di Z, supposto che n possa essere infinito (∞), se non è esso stesso uno degli elementi rappresentati dal simbolo Z. Vediamo dunque che X si troverà in un campo infinitesimo di 1° ordine fra due elementi di divisione in un campo di unità $\left(AA_{\frac{1}{\infty_1}}\right)$ ad es. fra $A_{n\frac{1}{\infty_1}}$ e $A_{(n+1)\frac{1}{\infty_1}}$ essendo $\left(AA_{m\frac{1}{\infty_1}}\right) \equiv \left(AA_{\frac{1}{\infty_1}}\right) m$, qualunque sia m. Si troverà dunque ripetendo la stessa considerazione nel campo infinitesimo di ordine n intorno ad un elemento già ottenuto dal simbolo Z, ove $n, n_1, ...$ n_r possono essere anche infiniti (∞), e si troverà fra due elementi N_ρ, $N_{\rho+1}$ di divisione di questo campo, essendo $(N_\rho N_{\rho+1}) \equiv (AA_1)\frac{1}{\infty_1{}^r}$. Col crescere indefinito di r, limitandosi come abbiamo detto ai segmenti infiniti e infinitesimi di ordine finito, $(AA_1)\frac{1}{\infty_1{}^r}$ diventa più piccolo di ogni segmento dato ε. Difatti ε deve essere infinitesimo di ordine dato s rispetto ad (AA_1) (*m*, 92), e quindi basterà prendere $r = s + 1$, perchè si ha che $(AA_1)\frac{1}{\infty_1{}^{s+1}}$ è infinitesimo di 1° ordine rispetto ad ogni segmento infinitesimo di ordine s (def. II. 86), e perciò più piccolo di ε (def. II, 82). Per l'ip. VIII, valevole anche in questo caso spe-

ciale (100), X è un elemento determinato. Dunque col crescere indefinito di r in Z viene determinato in questo caso un elemento della forma.

Se si considerano invece anche gli infiniti e gli infinitesimi di ordine infinito che formano coi precedenti un gruppo nel senso del teor. m, 93, l'elemento X determinato come abbiamo detto dal simbolo Z rappresenterà invece un campo infinitesimo di ordine infinito. E fissando gli elementi X che corrispondono ai simboli Z quando r cresce indefinitamente rimanendo, come sappiamo, sempre finito, con le stesse regole precedenti usate pei simboli irrazionali della forma (2') potremo determinare altri elementi del sistema.

Def. I. Chiameremo *elementi della divisione assoluta successiva per metà* di (AA_1) quelli ottenuti colle regole precedenti dal simbolo Z quando μ è un numero dato qualunque della classe (II), anche se le n e le r sono infinite (∞).

Questa divisione sarà detta *di* 1ª *specie* se n, n_1, ecc. r, r' ecc. sono numeri finiti; sarà detta invece di 2ª *specie* quando vi è un passaggio al limite.

Stabiliti così gli elementi della divisione assoluta successiva per metà nell'unità (AA_1) rimangono stabilite anche in ogni altra unità $(A_n\ A_{n+1}) \equiv (AA_1)$ della scala di origine A e di unità (AA_1). Bisognerà fare la stessa cosa seguendo gli stessi criteri per le unità (AA_{∞_1}), $(AA_{\infty_1^2}) \ldots (AA_{\infty_1^\mu})$; così avremo i multipli dei segmenti ottenuti secondo un numero di (II), ad es. il multiplo secondo il numero η del segmento rappresentato da Z, si ottiene colla stessa operazione indicata da Z nel segmento $(AA_\eta) \equiv (AA_1)\,\eta$, che è così pienamente determinata, senza venir meno ai teor. d, 79 e g, 92.

Oss. II. La classe dei numeri di (II) (91) dobbiamo ritenerla completata coi simboli (numeri) della divisione successiva assoluta per metà delle unità infinite in conformità all'ip. IV e delle altre ipotesi dalle quali si deduce questa divisione [1]).

c. *Se il segmento (XX') o $(X'X)$ dato da due segmenti (AX), $AX')$ diventa indefinitamente piccolo, il segmento dato dai secondi estremi dei multipli di (AX) e (AX') secondo lo stesso numero η diventa pure indefinitamente piccolo in senso assoluto, e inversamente.*

Ogni altro elemento dato X della forma fondamentale oltre agli elementi della divisione assoluta per metà sarà nel campo infinito di una data unità ad es. (AA_1), fra A_n e A_{n+1}. Con un ragionamento analogo al precedente quando ci siamo limitati ai segmenti infiniti e infinitesimi di ordine finito, si vede che X è in un campo di un'unità infinitesima di ordine infinito μ compreso fra due elementi N_σ, $N_{\sigma+1}$ di divisione di questo campo, tali che $(N_\sigma N_{\sigma+1}) \equiv (AA_1)\frac{1}{\infty_1^\mu}$ essendo μ un numero dato di (II). Col crescere indefinito in senso assoluto di μ il segmento $(N_\sigma\ N_{\sigma+1})$ ha per elemento limite assoluto X, e quindi anche X_η sarà l'elemento limite del segmento corrispondente $((N_\sigma)_\eta (N_{\sigma+1})_\eta)$, essendo ad es. $(A(N_\sigma)_\eta) \equiv (A\,N_\sigma)\,\eta$. Si prova infatti come precedentemente per μ finito, che col crescere indefinito assoluto di μ,

---

1) Vedi es. 4, 93 e la rappresentazione geometrica della nota n. 105

$\frac{(AA_1)}{\infty_1^{\mu}}$ diventa più piccolo di ogni segmento dato ε della forma (ip. VIII). Il segmento (AX) é determinato in tal caso dallo stesso simbolo Z quando $\mu = \Omega$, aggiungendo però in principio $(AA_1)\ n$, essendo X compreso fra A_n e A_{n+1}.

Se invece è dato X_η, essendo compreso nel segmento suddetto, l' elemento X del summultiplo (AX) di (AX_η) secondo il numero η è compreso fra N_σ e $N_{\sigma+1}$ (g, 92).

Se l'elemento X' si avvicina indefinitamente in senso assoluto all'elemento X, in un dato momento entrerà nel segmento $(N_\sigma X)$ oppure $(X N_{\sigma+1})$, e quinanche X'_η nel segmento $((N_\sigma)_\eta X_\eta)$ oppure $(X_\eta (N_{\sigma+1})_\eta)$ (g, 92), e se μ cresce indefinitamente in senso assoluto X_η' avrà per elemento limite X_η (def. I, 102). La proprietà inversa è manifesta.

Così per (XX') essendo X e X' variabili in senso assoluto si dimostra in modo analogo a quello usato pel teor. a, 99 che $(X_\eta X'_\eta)$ diventa indefinitamente piccolo in senso assoluto (def. II, 100), e inversamente; riferendosi all'ip. VIII e al teor. b, 102, ai teor. m, n del n, 101 anzichè ai teor. h e i del n. 95, e a ciò che si è dimostrato precedentemente.

d. Fissate le scale, ogni segmento dato (AB) è divisibile in un solo modo in un numero infinito η qualunque di parti consecutive uguali.

La dimostrazione è analoga a quella del teor. b, 99, basandosi sul teorema precedente e sul teor. d, 102 e sulla conv. 91.

d'. Se la forma fondamentale è chiusa, fissate le scale, si può dividere in un solo modo in un numero η qualunque di parti consecutive uguali.

Basta supporre che gli estremi del segmento considerato in a e d coincidano.

Oss. III. Per ottenere ad es. espresso mediante (AA_1) la metà di (AX) rappresentato dal simbolo Z, basterà prendere la metà dei singoli segmenti dati dai termini del simbolo Z e sommarli insieme, perchè la metà di $(AA_1)\frac{\alpha_n}{2^n}$ è $(AA_1)\frac{\alpha_n}{2^n}\cdot\frac{1}{2}$ $\equiv (AA_1)\frac{\alpha_n}{2^{n+1}}$ (c e a, 79); ne viene quindi che la metà di (AX) è determinata dal simbolo:

$$(AA_1)\Bigg[\left(\frac{\alpha_1^{(0)}}{2^2}+\frac{\alpha_2^{(0)}}{2^3}+\dots+\frac{\alpha_n^{(0)}}{2^{n+1}}+\dots\right)$$

$$\pm\frac{m_1}{\infty_1}\left(\frac{\overset{(1)}{\alpha_1}}{2^2}+\dots+\frac{\overset{(1)}{\alpha_{n+1}}}{2^{n+1}}+\dots\right)+\dots$$

$$+\frac{m_\mu}{\infty_1^\mu}\left(\frac{\overset{(\mu)}{\alpha_1}}{2^2}+\dots+\frac{\overset{(\mu)}{\alpha_{n\mu}}}{2^{n\mu+1}}+\dots\right)\Bigg],\ \mu\,\Omega=$$

E se si vuol determinare il segmento corrispondente al simbolo $\left(\frac{\alpha_1}{2}+\dots+\frac{\alpha_n}{2^n}+\dots\right)$

rispetto ad (AX) faremo la stessa operazione rispetto a tutti i termini di questo simbolo e sommeremo insieme. Si ha sempre come si vede un simbolo della stessa forma di Z, che determinerà quindi un elemento col crescere indefinito di n (a, 101) che sarà il secondo estremo del segmento considerato. E così via.

d'. Dato un segmento (AB) *vi è sempre un segmento* $(AB)\frac{1}{\eta}$ *summultiplo d'ordine* η *del segmento* (AB).

d''. Fissate le scale di unità fondamentale (AA_1) *rimangono pienamente determinate quelle rispetto ad ogni altro segmento come unità fondamentale a partire da un elemento dato qualunque come origine fondamentale.*

Invero fissate le scale rispetto all'unità (AA_1) nel modo che si è detto ed essendo determinati in modo unico i multipli e i summultipli di ogni segmento (AX) le scale rispetto a questo segmento (AX) a partire dall'elemento A come origine fondamentale sono pienamente determinate perchè ogni operazione eseguita coi simboli precedenti in (AX) si riduce ad un'operazione analoga eseguita con (AA_1). La proprietà è vera anche rispetto ad un altro punto qualunque come origine fondamentale (c, 69).

e. Se (AA') *è la* η^{ma} *parte e* (AA'') *la* η'^{ma} *parte di* (AB) $(\eta' > \eta)$, (AA'') *è più piccola di* (AA'); *e se* η *cresce indefinitamente in senso assoluto* (AA') *diminuisce indefinitamente in senso assoluto.*

La prima parte si dimostra come quella analoga del teor. d del n. 99, facendo uso del teor. g, 92 anzichè del teor. d, 79. Per la seconda parte basta usare il teor. l, 92 anzichè il teor. c', 81.

104 *a. Se si addiziona un segmento* (BC) *ad un segmento* (AB) *a partire da* B, *del medesimo verso o di verso opposto, si ha lo stesso risultato sommando al segmento* (BC) *a partire da* C *il segmento identico ad* (AB) *e dello stesso verso di* (AB). *Il risultato è indipendente dall'elemento dal quale si comincia per eseguire l'operazione.*

Scriveremo

$$(AB) + (BC) \equiv (AC), \quad (BC) + (AB) \equiv (AC).$$

La dimostrazione è analoga a quella del teor. e, 99 appoggiandosi agli stessi teoremi del n. 69 e sulla def. I, 61 e sul teor. b, 78 che sono indipendenti dal concetto di scala e quindi di finito, infinito e infinitesimo (def. II, 82); sul teor. l, 92 anzichè sul teor. c', 81 e sul teor. i, 100 anzichè sul teor. g, 95.

È escluso qui il primo caso perché non vi è un segmento (BC) infinitesimo assoluto cogli estremi distinti (def. I, 100).

Per il secondo caso ci appogggiamo alla legge commutativa della somma dei numeri di (II) complelata secondo l'oss. II, 103.

Si ha in tal caso seguendo la dimostrazione del teor. e, 99:

$$(AA')\mu . m < (AC) < (AA')\mu(m+1) \qquad (l, 92)$$

quindi (XY) rappresenta un multiplo secondo il numero μ di (AA') anzichè essere ad esso uguale. Così di $(X'Y')$ che è identico a (XY). Se il numero η cresce indefinitamente non solo (AA'), ma anche $(AA')\mu$ (poichè μ è un numero dato) decrescono indefinitamente in senso assoluto, e quindi il teor. è dimostrato anche per il caso 3). Gli altri casi 4) e 5) si dimostrano nello stesso modo.

Oss. I. Qui l'identità si considera in senso assoluto (def. III, 9; def. V, 91).
Oss. II. Analoga all' oss. I, 99.

a'. Dato un segmento (AB) vi è sempre un segmento (AC) tale che

$$(AC)\mu < (AB) < (AC)(\mu + 1).$$

Dim. analoga a quella del teor. *e'*, 99. È da osservare che rispetto alla legge commutativa nel prodotto $[(AA') + (A'C)]\mu$ è lo stesso come se $(A'C)$ fosse uguale ad un summultiplo di (AA'); e siccome in questo caso vale la legge distributiva (*d*, 93), così vale anche quando (AA') e $(A'C)$ non sono l'uno multiplo dell'altro.

b. Il segmento multiplo secondo un numero μ della parte η^{ma} (AC) di un segmento (AB), è summultiplo secondo il numero η di un segmento multiplo di (AB) secondo il numero μ.

Dim. analoga a quella del teor *f*, 99 appoggiandosi alle indicazioni della def. I del n. 92 anzichè alla indicazione I del n. 79.

b'.

$$(AB)\frac{\mu}{\eta} \equiv \frac{(AB)\mu}{\eta}$$

Perchè

$$(AB)\frac{\mu}{\eta} \equiv \frac{(AB)}{\eta}\mu \qquad (d, 92).$$

c. Un segmento qualunque (AB) è identico allo stesso segmento percorso nel verso opposto, cioè $(AB) \equiv (BA)$.

Dim. analoga a quella del teor. *g*, 99 appoggiandosi sui teor. *a*, 69; *a*, 78, sulla def. I e sul teor. *b*, 70 sul principio *e*, 8 che valgono indipendentemente dal concetto di scala, e quindi in senso assoluto sul teor. *a* precedente anzichè sul teor. *e*, 99.

d. Dividendo un segmento (AB) in η parti uguali e le parti rimanenti in η parti uguali, e così via, si ottiene un gruppo di elementi del segmento dato compresi gli estremi, i cui altri elementi sono elementi limiti del gruppo dato in senso assoluto.

Se (AB) è dato dal simbolo Z (103) sia nel caso che le n siano finite o infinite (∞) e che μ sia dato o sia $\mu = \Omega$, (oss. II) abbiamo veduto come siano determinati i multipli e i summultipli di (AB) secondo i numeri di (II) mediante le scale già fissate, e si è pure veduto che possono essere determinati mediante l'unità primitiva (AA_1) i segmenti che rappresentano gli elementi medi, secondo le convenzioni stabilite per la determinazione delle scale (103). Dunque vale per (AB) ciò che vale per (AA_1) (*d''*, 103) ed il teor. per $\eta = 2$ è dimostrato.

Gli elementi di (AA_1) possono essere indicati dal simbolo Z del n. 103, quando si fa la divisione successiva in p parti uguali, e quindi con un ragionamento analogo al precedente si dimostra che ciò vale anche per (AB); il teorema è vero anche per $\eta = p$.

Se $\eta = \infty_1$ osserviamo che la prima serie nel simbolo che indica gli elementi ottenuti colla divisione per ∞_1, è

$$(1)\qquad \left(\frac{\alpha_1{}^{(o)}}{\infty_1}+\frac{\alpha_2{}^{(1)}}{\infty_1{}^2}+\ldots+\frac{\alpha_n{}^{(o)}}{\infty_1{}^n}+\ldots\right)$$

dove n è finito e le α possono avere i segni o, 1,...., n, ..., $\infty_1\left(\frac{\beta_1}{2}+\ldots+\frac{\beta_n}{2^n}\right)\pm m$ .... ∞_1-1, ($\beta=o$, 1, tranne il caso che siano tutte o). Se n cresce indefinitamente limitandosi ai soli numeri infiniti e quindi anche agli infinitesimi d'ordine finito, allora per ∞_1 bisogna arrestarsi a questa serie, ed essa determina un segmento (numero) limite, che potrà essere espresso dal simbolo Z, del n. 103. Ad es. sostituendo ad $\alpha_1{}^{(o)}$ il simbolo $\infty_1\left(\frac{\beta_1{}^{(o)}}{2}+\ldots+\frac{\beta_n{}^{(o)}}{2^n}+\ldots\right)$ ($\beta=o$, 1) e alle altre α il simbolo o si ha precisamente un numero qualunque compreso nella prima parentesi del simbolo Z del n. 103. Se si aggiunge al numero suddetto $\pm m$ si ha ancora $\pm\frac{m}{\infty_1}$.

Se invece si considerano anche segmenti infinitesimi di ordine infinito, bisogna passare ad es. al campo infinitesimo d'ordine ∞_1-r_1, e si avranno quindi ancora a partire dall'origine già data nel modo stabilito i simboli:

$$\pm\frac{m_1}{\infty_1{}^{\infty_1-r_1}}\left(\frac{\alpha_1{}^{(1)}}{\infty_1}+\ldots+\frac{\alpha_{n_1}{}^{(1)}}{\infty_1{}^{n_1}}\right)$$

. . . .

$$\pm\frac{m_2}{\infty_1{}^{2\infty_1-r_2}}\left(\frac{\alpha_1{}^{(2)}}{\infty_1}+\ldots+\frac{\alpha_{n_2}{}^{(2)}}{\infty_1{}^{n_2}}\right)$$

. . . .

$$\pm\frac{m_s}{\infty_1{}^{s\infty_1-r_s}}\left(\frac{\alpha_1{}^{(s)}}{\infty_1}+\ldots+\frac{\alpha_{n_s}{}^{(s)}}{\infty_1{}^{n_s}}\right)$$

Gli elementi che corrispondono ai singoli termini quando n_1, n_2, ... n_s crescono indefinitamente ($\lim n=\infty$) sono determinati allo stesso modo che l'elemento corrispondente in senso assoluto dal simbolo (1).

Col crescere di s limitandosi ai numeri infiniti di ordine finito con ∞^{∞_1} i quali formano un gruppo chiuso nel senso del teor. m, 93, il simbolo precedente rappresenta un elemento o un segmento della forma fondamentale a partire dall'origine fondamentale A.

Se η è un numero finito con ∞_1, η^n lo è pure e quindi per η avremo in tal caso il simbolo stesso sostituendo η ad ∞_1.

Pel numero $\infty_1{}^\sigma$ si ha un simbolo analogo al precedente: basta sostituire $\infty_1{}^\sigma$ in luogo di ∞_1 essendo le α uguali a o e a tutti i numeri interi da 1 a $\infty_1{}^\sigma-1$ e a tutti i segni, ottenuti colla divisione successiva per metà rispetto ai segmenti $(AA_{\infty_1{}^\sigma})$, $(AA_{\infty_1{}^{\sigma-1}})$ ecc. come unità (h', 99).

Se η è finito rispetto a ∞_1^σ basterà sostituire η a ∞_1^σ, ed avremo;

$$Z_1 = (AA_1)\left(\frac{\alpha_1^{(0)}}{\eta} + \frac{\alpha_2^{(0)}}{\eta^2} + \dots + \frac{\alpha_n^{(0)}}{\eta^n} + \dots\right)$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

$$\pm \frac{m_1}{\infty^{\sigma\infty_1 - r_1}}\left(\frac{\alpha_1^{(1)}}{\eta} + \dots\dots + \frac{\alpha_{n_1}^{(1)}}{\eta^{n_1}} + \dots\right)$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

$$\pm \frac{m_2}{\infty_1^{\sigma\infty_1 2 - r_2}}\left(\frac{\alpha_1^{(2)}}{\eta} + \dots\dots + \frac{\alpha_{n_2}^{(2)}}{\eta^{n_2}} + \dots\right)$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

$$\pm \frac{m_s}{\infty_1^{\sigma s\infty_1 - r_s}}\left(\frac{\alpha_1^{(s)}}{\eta} + \dots\dots + \frac{\alpha_{ns}^{(s)}}{\eta^{ns}} + \dots\right)$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

$$\pm \frac{m_\mu}{\infty_1^{\sigma\infty_1\mu - r_1^{(\mu)}}}\left(\frac{\alpha_1^{(\mu)}}{\eta} + \dots\dots + \frac{\alpha_{n_\mu}^{(\mu)}}{\eta^{n_\mu}} + \dots\right)$$

ove le α possono essere il numero o, i numeri interi $1, 2, \dots, \eta-1$ e i segni che si ottengono dalla divisione successiva per metà rispetto ai segmenti $(AA_{\infty_1}{}^\sigma)$ ecc. come unità le n e le s sono numeri interi finiti dati o che crescono indefinitamente, e le r sono numeri interi finiti dati.

Def. I. Se μ è un numero dato il segmento Z_1 dà un *elemento* che chiameremo *elemento della divisione successiva di* (AA_1) in η *parti uguali.*

Ogni altro elemento essendo compreso fra due di questi elementi il cui segmento è uguale a $\frac{1}{\eta^n\, u\, \infty_1^{\sigma\infty_1\mu - r_1}}$ col crescere indefinitamente in senso assoluto di μ, l'elemento X è elemento limite dell'operazione indicata dal simbolo suddetto — e il teor. d è così dimostrato.

Oss. I. Pei numeri infiniti il simbolo Z_1 è come si vede alquanto diverso dal simbolo Z del n. 103 che vale pei numeri finiti; ed è facile di scorgerne anche le ragioni. Difatti se sostituiamo ad es. nel simbolo Z in luogo di 2 il numero ∞_1 la seconda parentesi e così le successive fino a quella che accompagna $\frac{m_{\infty_1 - r_1}}{\infty_1^{\infty_1 - r_1}}$ ci danno numeri del simbolo (1).

d. Le parti di un segmento dato (AB) *a partire da* A *possono essere rappresentate dal simbolo* Z *del n.* 103 *ove in luogo di* 2 *si può porre un numero intero finito qualunque* p, *oppure dal simbolo* Z_1.

Ciò risulta dalle dim. dello stesso teor. d.

e. Un gruppo di un numero infinito (Ω) *di elementi* (X) *compreso in un segmento dato* (AB) *ha almeno un elemento limite.*

Basta dividere (AB) in η parti uguali (d, 103); in una di esse almeno vi sono Ω punti del gruppo (X), intendendo che la classe (II) sia completata nel senso dell'oss. II, 103. Sia $(A'B')$ questa parte. Si può scegliere η_1 abbastanza grande perché in $(A'B')$ vi siano almeno due elementi A'', B'' della divisione di (AB) in η_1 parti uguali, che siano distinti da A' e B'. In uno dei segmenti $(A'A'')$, $(A''B'')$, $(B''B')$ vi devono essere Ω punti X; così pure se in $(A'B')$

cadesse un maggior numero di punti di divisione in η_1 parti uguali. Crescendo η_1 veniamo a costruire una serie di segmenti contenuti successivamente l'uno nell'altro della forma $\frac{(AB)}{\eta}$ che contengono un numero Ω di punti. Col crescere indefinito di η, $\frac{(AB)}{\eta}$ diventa indefinitamente piccola *(e,* 103), e perciò la serie suddetta di segmenti determina un elemento L tale che in ogni segmento $\frac{(AB)}{\eta}$ quanto piccolo si vuole che contiene L cadono elementi X; donde *f.*

Oss. II. Per $\Omega = \infty$ questa dimostrazione vale anche relativamente ad un'unità in luogo della dimostrazione data al n. 98.

e'. Una serie di elementi (X_η) *nella forma fondamentale tale che il segmento* $(X_\eta X_{\eta+1})$ *coll' aumentare di* η *diventa indefinitamente piccolo in senso assoluto ha un elemento limite.*

Dim. analoga a quella di *b'*, 98 appoggiandosi al teor. *d*, 102.

f. L'ipotesi VIII è indipendente dalle precedenti.

L'indipendenza dell'ip. VIII dalle precedenti risulta dal simbolo Z. Per meglio fissare le idee, senza togliere nulla alla generalità dell'ipotesi, siano dati i soli campi infiniti e infinitesimi d'ordine finito, che come si sa soddisfano alla proprietà dell'ip. VII *(m,* 93). Consideriamo il gruppo ordinato di elementi che si ottiene dal simbolo Z quando m è un numero dato qualsiasi. — Abbiamo tutti gli elementi della divisione per metà (def. I, 103). Ora è facile vedere che questo gruppo di elementi soddisfa appunto alle ipotesi che precedono l'ip. VIII, ben inteso che l'ip. V va ristretta in tal caso ai campi suddetti. Se si considerano infatti due elementi X' e X'' dati da:

$$Z' = (AA_1)\left[\left(\frac{\alpha'^{(0)}}{2} + \dots\right) \pm \frac{m_1'}{\infty_1}\left(\frac{\alpha'^{(1)}}{2} + \dots\right) + \dots + \frac{m'_{r_1}}{\infty_1}\left(\frac{\alpha'^{(r')}_1}{2} + \dots\right)\right]$$

$$Z'' = (AA_1)\left[\left(\frac{\alpha_1''^{(0)}}{2} + \dots\right) \pm \frac{m_1''}{\infty_1}\left(\frac{\alpha''^{(1)}}{2} + \dots\right) \pm \dots \pm \frac{m''_{r''}}{\infty_1^{r''}}\left(\frac{\alpha_1^{(r'')}}{2} + \dots\right)\right]$$

la differenza di Z' e Z'' rappresenta appunto il segmento $(X'X'')$ (a), e ogni elemento della divisione per metà di $(X'X'')$ è compreso anche nel simbolo Z precedente ove r è un numero dato di (I). Se $(X'X'')$ è infinitesimo ad es. d'ordine s $(s \geq o)$ allora l'elemento Y tale che ad es. $(X'Y) = 2(X'X'')$ si otterrà da Z' aggiungendo nella parentesi che accompagna $\frac{m's}{\infty_1^s}$ la metà della differenza $(X'Y)$ che viene espressa da un simbolo Z'''.

Ora se r è invece infinito (∞), o, considerando Z in costruzione, se r diventa indefinitamente grande, si ha un simbolo che non è reducibile a Z quando r é dato, come il simbolo

$$\frac{\alpha_1}{2} + \frac{\alpha_2}{2^2} + \dots + \frac{\alpha_n}{2^n},$$

quando n è ∞, non si può ridurre alla stessa forma quando n è finito. Difatti per due segmenti uguali espressi con Z le α e le n e le r devono essere rispet-

tivamente uguali nell'ordine in cui sono dati. Ciò non è possibile se per uno dei segmenti r è un numero dato di (I) (46), mentre per l'altro diventa più grande di ogni numero dato.

105 *a. Il segmento* $(AC)\frac{\mu}{\eta}$ *rispetto ad* (AC):

1) *è finito se* μ *e* η *sono finiti o infiniti dello stesso ordine,*

2) *è infinito d'ordine* μ_1-η_1 *se* μ *è infinito d'ordine* μ_1 *e* η *è infinito d'ordine* η_1, *essendo* $\mu_1 > \eta_1$

3) *è infinitesimo d'ordine* η_1-μ_1 *se nel secondo caso* $\eta_1 > \mu_1$.

Difatti η è un numero del campo ∞^{η_1} e quindi $\frac{(AC)}{\eta}$ è un infinitesimo d'ordine η_1, un multiplo di $\frac{(AC)}{\eta}$ secondo un numero η_1 è finito rispetto ad (AC) (f', 92): e quindi se μ è infinito d'ordine $\mu_1 > \eta_1$, $(AC)\frac{\mu}{\eta}$ è un infinito d'ordine μ_1-η_1, (f'', 92 e d, 93), analogamente pel terzo caso.

Def. I. Due segmenti che contengono un summultiplo secondo un numero intero di (*II*) si chiamano *summultipli di* 1ª *specie*. Due segmenti invece che si ottengono l'uno dall'altro o da un terzo colla divisione illimitata in η parti uguali ma non illimitata in senso assoluto si chiamano *commensurabili di* 2ª *specie.* I primi e i secondi si chiamano *commensurabili in senso assoluto.*

Negli altri casi si chiamano *incommensurabili in senso assoluto.*

Oss. I. Limitandosi ad una sola unità di misura mancano i segmenti commensurabili di 2ª specie — secondo la def. I, 103 questi segmenti sono ottenuti colla divisione in η parti uguali — essi partecipano sotto questo aspetto della proprietà dei segmenti commensurabili di 2ª specie, e partecipano sotto un altro aspetto della proprietà dei segmenti incommensurabili in senso relativo [1]).

b. Segmenti commensurabili di 1ª *specie con un terzo sono commensurabili fra loro.*

Perchè se contengono un summultiplo uguale col terzo l'uno secondo il numero μ e l'altro secondo il numero η e $\mu = \eta$ essi hanno un summultiplo comune. Se invece $\mu > \eta$ i summultipli secondo il numero $\mu.\eta$ dell'uno e dell'altro sono uguali al summultiplo secondo lo stesso numero del terzo.

Oss. II. Non risulta però che due segmenti incommensurabili con un terzo siano anche incommensurabili tra loro, anzi due segmenti commensurabili possono essere incommensurabili con un terzo.

Def. II. I simboli corrispondenti ai segmenti commensurabili di 1ª di 2ª specie e incommensurabili coll'unità fondamentale si chiamano rispettivamente *numeri razionali assoluti di* 1ª *e* 2ª *specie e irrazionali assoluti.*

c. Dati i due segmenti (AB) e (AC), $(AB) < (AC)$ *vi è sempre un numero* η *razionale tale che:*

---

1) Non abbiamo bisogno di dimostrare l'esistenza dei segmenti incommensurabili nè in senso relativo nè assoluto, e quindi neppure dei segmenti commensurabili di 2 specie, per le nostre ricerche sui fondamenti della geometria, bastandoci nell'uno o nell'altro caso l'ip. VI o l'ip. VIII; come del resto non abbiamo bisogno dell'ip. V, delle proprietà che da essa dipendono e dei simboli che rappresentano i diversi segmenti della retta a partire da un'origine e rispetto ad una data unità.

$$(AB)\,\eta \leqq (AC) < (AB)(\eta+1)$$

essendo 1 *l' unità fondamentale.*

Difatti se (AB) è infinitesimo d'ordine ρ rispetto ad (AC) vi è sempre un numero η_1 d'ordine ρ tale che $(AB)\,\eta_1 \leqq (AC) < (AB)(\eta_1 + 1\,\rho)$ essendo $1_\rho = \infty_1{}^\rho$ (*l.* 92). Indichiamo con $(A'_1 A_{\infty_1}{}^\rho)$ questo multiplo di (AB) compreso fra i due multipli $(AB)\,\eta_1$, $(AB)(\eta_1 + 1\rho)$ e con (A_1C_1) la parte di (AC) compresa nel segmento $(A'_1 A_{\infty_1}\rho)$. Basta considerare in $(AA_{\infty_1}\rho)$ gli infinitesimi d'ordine ρ, che sono appunto finiti con (AA_1) che rappresenta l'unità 1 (*a*, 86 e *c*, 91). Se C_1 non è un elemento di divisione in parti uguali ottenuto nelle diverse unità infinitesime di 1°, 2°,...., ρ^{mo} ordine rispetto ad $(AA_{\infty_1}{}^\rho)$, nel quale caso η sarebbe un numero nazionale assoluto o relativo (def. II) e tale che sarebbe $(AB)\,\eta \equiv (AC)$, l'elemento C_1 apparterrà al campo infinitesimo di ρ^{mo} ordine intorno ad un elemento di $(A'_1 A_{\infty_1}\rho)$ rappresentato da un numero razionale assoluto o relativo. Se questo è ad es. η_2, poichè il campo infinitesimo intorno a questo elemento si ottiene portando da una parte o dall'altra successivamente l'unità 1 così si vede che l'elemento C_1 sarà compreso fra due elementi indicati dai numeri $\eta_2 + m$, $\eta_2 + (m+1)$ oppue $\eta_2 - m$, $\eta_2 - (m+1$.

c'. Se (AB) *e* (AC) *sono finiti,* η *è intero e finito* (def. II 82; *c'*, 81)

Oss. III. **In questo caso due numeri finiti che differiscono di un numero infinitesimo non sono ugnali.**

d. Per prima forma costituente il continuo assoluto (relativo), si può considerare l'indefinitamente piccolo in senso assoluto (relativo). Se si tratta del continuo relativo, in senso assoluto possiamo considerare anche un infinitesimo d' ordine determinato.

Consideriamo dapprima il continuo relativo, e siano (AB) un segmento finito, (AA') un segmento infinitesimo di 1° ordine. Si ha che $(AA')\,\infty_1$ è un segmento finito rispetto ad (AB) (*f*, 92). E poichè rimanendo nel campo di una sola unità non si considerano altri campi infiniti si può anche dire in tal caso che $(AA')\,\infty$ dà un segmento finito rispetto ad (AB).

Dividiamo ora (AB) in n parti uguali rispetto ad (AB) come unità (*b*, 99) e indichiamole numericamente con $p_1, p_2, \ldots, p_n$; mentre una qualunque di esse la indicheremo con p. Abbiamo:

$$(AB) \equiv p_1 + p_2 + p_3 + \ldots + p_n$$

od anche

$$(AB) \equiv \sum_{m=1}^{m=1} p_m \qquad (1)$$

indicando col segno $\sum_{m=1}^{m=n} p_m$ la somma delle n parti p.

Ora lasciamo che n cresca indefinitamente, p diminuirà invece indefinitamente (*d*, 99), e avremo:

$$(AB) \equiv \sum_{m=1}^{m=\infty} p_m \qquad (2)$$

In questo caso dunque (AB) è rappresentato come somma di parti indefinitamente piccole.

La stessa cosa vale se consideriamo (AB) rispetto all'unita assoluta (92).

Consideriamo ora un infinitesimo (AA') ad es. di η^0 ordine rispetto ad (AB). Si ha ad es. che

$$\sum_{\mu=1}^{\mu=\infty_1{}^{\eta}} (AA')\,\mu$$

è un segmento finito rispetto ad (AB) $(f, 91)$; e prendendo come unità fondamentale (AA') si ha:

$$\sum_{\mu=1}^{\mu=\eta_1 . m} (AA') \leqq (AB) < \sum_{\mu=1}^{\mu=\eta_1 (m+1)} (AA')\,\mu \qquad (l, 92)$$

ove η è un numero intero di (II) (def. V. 91)
od anche

$$\sum_{\mu=1}^{\mu=\eta} (AA')\,\mu \leqq (AB) < \sum_{\mu=1}^{\mu=\eta+1} (AA')\,\mu \qquad (a)$$

ove η è un numero razionale assoluto (c).

Oss. IV. Osserviamo però che in questo caso bisogna uscire dal campo dell'unità della stessa specie di (AB) (def, I, 86), poichè l'infinitesimo non va considerato

---

1) *Rappresentazione geometrica di una parte del continuo assoluto.*

Consideriamo dapprima il campo infinito di ordine 1 rispetto all'unità fondamentale ed anche le scale nel verso opposto a partire dall'origine fondamentale. I numeri di (II) si lasciano raggruppare nelle serie $S_1^{(0)}$, $S_1^{(1)}$, ... $S_1^{(m)}$, .. $(l.\ 93)$. Ad ogni segmento della forma $(AA_1)\ \frac{\infty_1}{n}$ corrisponde una serie $S_1 \frac{1}{n}$, e quindi ad ogni segmento della forma $(AA_1)\ \infty_1 \left(\frac{\alpha_1}{n} + \frac{\alpha_2}{n^2} + \ldots + \frac{\alpha_m}{n^m} + \ldots\right)$ per $\lim m = \infty$ $(\alpha = o, 1, \ldots, n\text{-}1)$ corrisponde una serie S_1. Da ciò è chiaro che non considerando gli infinitesimi rispetto all'unità fondamentale e considerando soltanto i segmenti infiniti di ordine 1, si può far corrispondere univocamente i segmenti di questa parte della forma fondamentale ai punti del piano (xy) euclideo ordinario facendo corrispondere cioè i valori di y alle scale S, le cui origini sono rispettivamente indicate con $o, \frac{\infty_1}{n}, \ldots \infty_1 \ldots 2\infty_1 \ldots \infty_1 \left(\frac{\alpha_1}{n} + \frac{\alpha_2}{n} + \ldots + \frac{\alpha_m}{n^m} + \ldots\right)$, e quelli di x ai segmenti delle serie S stesse a partire dalle loro origini. Per poter far uso anche dei valori negativi di y bisogna considerare le scale S_1 che si hanno pei segmenti negativi del continuo fondamentale (112). Due elementi indefinitameute vicini in questo continuo sono situati in una serie S_1. A due tali elementi corrispondono due punti indefinitamente vicini del piano, ma non ha luogo la proprietà inversa, perché due elementi corrispondenti nella forma fondamentale appartengono a due serie S_1 indefinitamente vicine.

Y
$2\infty_1{-1}$ $2\infty_1$ $2\infty_1{+1}$
$\infty_1{-1}$ ∞_1 $\infty_1{+1}$
-1 0 1 X
$-\infty_1{-1}$ $-\infty_1$ $-\infty_1{+1}$
$-2\infty_1{-1}$ $-2\infty_1$ $-2\infty_1{+1}$

Le parallele all'asse delle x tutte dirette nel medesimo verso a partire dall' origine fondamentale rappresentano le serie S_1, le quali hanno la loro origine nel loro punto d' intersezione coll'asse delle y. Se immaginiamo percorse nel medesimo verso tutte le parallele comprese nella striscia piana limitata dalle parallele condotte per o e per ∞_1 da o fino al punto ∞_1 abbiamo una chiara rappresentazione del campo finito e infinito di ordine 1, immaginando però che le parallele anzichè essere l'una *sopra* l' altra, e indipendenti fra loro, siano invece una *dopo* l' altra e determinate una dall'altra; vale a dire non abbiano lo stesso punto comune all'infinito, e formino un tutto inscindibile. Se il segmento $(o \ldots \infty_1)$ lo si immagina poi condensato nel segmento (AB), si ha un continuo di cui l'unità $(1..0)$ primitiva è un infinitesimo attuale. Così possiamo procedere pei campi infiniti di ordine 2, 3 ecc. m, e abbiamo:

Non tenendo conto degli infinitesimi rispetto ad un unità fondamentale tutti i segmenti del campo finito e infinito d'ordine finito m possono essere rappresentati univocamente e nel medesimo ordine in un sistema di parallele dello spazio euclideo a m dimensioni.

come nullo e il nulla ripetuto quanto si vuole ci dà sempre il nulla. È per questo che rimanendo nel campo di una sola unità val meglio, come si fa ordinariamente, tenersi al primo caso.

Da ciò è chiaro che una costruzione della forma fondamentale assoluta coll'infinitesimo assoluto è impossibile, non essendo altro per noi che lo zero assoluto (def. I, 100).

§ 11.

Corrispondenza di proporzionalità fra i segmenti di una o più forme fondamentali.

106. *Def. I.* Dati due segmenti (AC), $(A'C')$ di due forme fondamentali diverse o coincidenti (ip. I, II e def. V. 57), possiamo stabilire una corrispondenza fra i loro elementi e gli elementi dei loro multipli in modo che agli estremi A e C di (AC) corrispondano gli elementi A' e C' di $(A'C')$, e agli estremi dei multipli di (AC) o dei suoi summultipli ottenuti da (AC) colla divisione successiva in un numero dato η di parti uguali (*e*, 99 e *d*, 103) corrispondano gli estremi degli stessi multipli di $(A'C')$ o degli stessi summultipli di $(A'C')$, e in modo che a un elemento compreso fra due degli elementi suddetti della prima forma corrisponda almeno un elemento compreso fra i due elementi corrispondenti della seconda forma.

Chiameremo una tale corrispondenza *corrispondenza di proporzionalità* fra le due forme fondamentali nelle quali giacciono i due segmenti (AC) e $(A'C')$ e determinate da (AC) e $(A'C')$.

I segmenti corrispondenti li chiameremo segmenti *fra loro proporzionali.*

a. Se (BD) *ed* (EF) *sono segmenti commensurabili con* (AC) *ottenuti colla divisione successiva in* η *parti uguali di* (AC), *e* $(B'D')$, $(E'F')$ *sono i segmenti proporzionali corrispondenti ai primi due nella corrispondenza di proporzionalità determinata da* (AC), $(A'C')$ *secondochè* $(BD) \gtreqless (EF)$ *si ha* $(B'D') \gtreqless (E'F')$.

Difatti si ha $(BD) \equiv (AC)\dfrac{\mu}{\eta^\rho}$ ed $(EF) \equiv (AC)\dfrac{\mu_1}{\eta^{\rho_1}}$, e quindi anche $(B'D') \equiv (A'C')\dfrac{\mu}{\eta^\rho}$, $(E'F') \equiv (A'C')\dfrac{\mu_1}{\eta^{\rho_1}}$ (def. I). Secondochè $(BD) \gtreqless (EF)$ si ha:

$(AC)\dfrac{\mu}{\eta^\rho} \gtreqless (AC)\dfrac{\mu_1}{\eta^{\rho_1}}$ (def. II, 61), ed anche $(AC)\dfrac{\mu\eta^{\rho_1}}{\eta^\rho\eta^{\rho_1}} \gtreqless (AC)\dfrac{\mu_1\eta^\rho}{\eta^{\rho_1}\eta^\rho}$ (*b'*, 79; *d*, 92);

e perciò $(A'C')\dfrac{\mu\eta^{\rho_1}}{\eta^\rho\eta^{\rho_1}} \gtreqless (A'C')\dfrac{\mu_1\eta^\rho}{\eta^{\rho_1}\eta^\rho}$ (*a*, 79 o *a*, 92; *d*, 79 o *g*, 92), da cui

$(A'C')\dfrac{\mu}{\eta^\rho} \gtreqless (A'C')\dfrac{\mu_1}{\eta^{\rho_1}}$ (*b'*, 79 e *d'*, 92), ossia $(B'D') \gtreqless (E'F')$ (def. II, 61).

b. All'elemento limite di una serie sempre crescente o decrescente di segmenti commensurabili (in senso assoluto di 1ª specie) ottenuti colla divisione successiva di (AC) *in* η *parti uguali, in una forma fondamentale, corrisponde l'elemento li-*

mite della serie dei segmenti proporzionali in un'altra o nella stessa forma fondamentale.

Se una serie sempre crescente (o decrescente) di segmenti commensurabili (in senso relativo e assoluto) che hanno simboli della forma $(AC)\frac{\mu}{\eta^\rho}$, ottenuti colla successiva divisione in η parti uguali, ha un elemento limite X, la serie dei segmenti corrispondenti $(A'C')\frac{\mu}{\eta^\rho}$ è sempre crescente (o decrescente) (def. I) ed ha pure un elemento limite X' (a; d, 97 o d, 102). Dico che X' e soltanto X' corrisponde ad X e viceversa. L'elemento X è elemento limite di un'altra serie sempre decrescente (o sempre crescente) di segmenti commensurabili della forma $(AC)\frac{\mu}{\eta^\rho}$ (h, 99 e d, 104). La serie corrispondente deve avere per elemento limite X', altrimenti se avesse un elemento limite Y' distinto da X', fra X' e Y' vi sarebbe un elemento Z' distinto da X' e Y' della divisione successiva per η (h, 99 o d, 104) al quale dovrebbe corrispondere un elemento Z distinto da X compreso fra le due serie suddette (def. I), ciò che è impossibile (a; b, 96 e a, 101).

c. Se (BD) ed (EF) hanno rispettivamente $(B'D')$, $(E'F')$ come segmenti corrispondenti nella corrispondenza di proporzionalità determinata da (AC), $(A'C')$; secondochè $(BD) \gtreqless (EF)$ si ha $(B'D') \gtreqless (E'F')$.

Sia (AB') il segmento uguale a (BD) nel verso di (AC) e nella forma fondamentale di (AC) (b', 69 o a', 70 e ip. I e II). Se (AB') è $<(AC)$, l'elemento B' è contenuto in (AC) (c', 68; b, 36 e def. I, 61), e quindi anche la serie di segmenti commensurabili che lo determina a partire da A (b; e h, 99 o d, 104), dunque anche la serie dei segmenti proporzionali nella forma fondamentale di $(A'C')$ e il suo elemento limite saranno contenuti in $(A'C')$ (b; d, 97 o d, 102). Se $(AB')>(AC')$, (AB') è compreso fra due multipli successivi secondo i numeri μ e $\mu+1$ di (AC) se non è uno di questi multipli, (c', 81 o c, 105) e si ricade nel caso precedente.

Se $(BD)\equiv(EF)$ si ha dunque $(B'D')\equiv(E'F')$ (b; def. II, 61 e def. I). Se $(BD)>(EF)$, prendendo i segmenti (AB'_1) e (AB'') uguali a (BD) e (EF) nella forma fondamentale di (AC), e indicando con $(AC)\frac{\mu}{\eta^\rho}$ un segmento che si accosta indefinitamente a B'_1, e con $(AC)\frac{\mu_1}{\eta^{\rho_1}}$ un segmento che si accosta indefinitamente a B'', $(AC)\frac{\mu}{\eta^\rho}$ può essere scelto maggiore di qualunque stato $(AC)\frac{\mu_1}{\eta^{\rho_1}}$ del primo segmento variabile, e quindi $(A'C')\frac{\mu}{\eta^\rho}$ sarà in tal caso maggiore di ogni stato del segmento variabile $(A'C')\frac{\mu_1}{\eta^{\rho_1}}$ (a), e perciò avremo $(A'B'_1)$ ossia $(B'D')>(A'B''_1)$ ossia di $(E'F')$ (b). Il teorema è dunque dimostrato.

d. La corrispondenza di proporzionalità è univoca e del medesimo ordine.

Difatti ogni elemento X della prima forma o è un elemento dei gruppi ottenuti colla divisione successiva in η parti uguali in senso relativo e assoluto di (AC) o dei segmenti consecutivi uguali ad (AC), oppure è limite di questi gruppi (h, 99; c', 81; d, 104; c 105); dunque d (def. I e b; def. III, 42).

e. All'elemento limite di una serie sempre crescente o decrescente di segmenti qualunque nella forma fondamentale corrisponde l'elemento limite della serie di segmenti proporzionali in un'altra o nella stessa forma fondamentale.

L'elemento limite X della prima serie può essere considerato come limite di una serie di segmenti commensurabili ottenuti colla successiva divisione in η parti uguali (in senso assoluto di 1ª specie) (h, 99; def. I, 105; def. I, 103 e d, 104). L'elemento limite della serie corrispondente, che è pure sempre crescente o decrescente (a e c), è limite della serie corrispondente di segmenti commensurabili. Difatti se X_η si avvicina indefinitamente a X, l'elemento X'_{η_2} corrispondente si avvicina indefinitamente a X', perchè $(X'_\eta X')$, o $(X'X'_\eta)$, deve diventare più piccolo di ogni segmento commensurabile dato rispetto ad $(A'C')$, tale divenendo anche il segmento corrispondente $(X_\eta X)$ o (XX_η) (c).

e'. Nella corrispondenza di proporzionalità agli elementi che dividono un segmento (AB) in un numero qualunque μ di parti uguali corrispondono ordinatamente gli elementi che dividono in ugual numero di parti uguali il segmento corrispondente (e; h, 99 o d, 104).

f. Se $(AC) \equiv (A'C')$ la corrispondenza di proporzionalità è quella d'identità.

Difatti la corrispondenza d'identità (b, def. 60) soddisfa alla def. I (d, d', 79; d', 97 o g, g', 92 e d', 102).

g. Nella corrispondenza di proporzionalità ad un segmento qualunque (AB) si può sostituire un segmento $(A''B'') \equiv (AB)$.

Difatti ogni multiplo o summultiplo di (AB) lo è anche secondo lo stesso numero di $(A''B'')$ (def. I, II, 79 opp. 92), e poichè la corrispondenza di proporzionalità è determinata dai multipli e summultipli di (AC) e $(A'C')$, è chiaro che ad (AB) possiamo sostituire $(A''B'')$, anche se (AB) coincide con (AC).

Oss. I. In altre parole nella corrispondenza di proporzionalità non si tien conto delle relazioni di posizione fra i segmenti (oss. I, 38).

Def. II. La prop.: I segmenti (AB), (AC); $(A'B')$, $(A'C')$, o segmenti ad essi identici, sono *in proporzione*, equivale alla prop.: I segmenti (AB), $(A'B')$ sono proporzionali nella corrispondenza determinata da (AC) e $(A'C')$.

h. Se le coppie (AB), (AC); $(A'B')$, $(A'C')$ sono in proporzione lo sono anche le coppie $(A'B')$, $(A'C')$; (AB), (AC).

Difatti agli elementi della prima forma determinata da (AC) secondo la def. I e il teor. b corrispondono univocamente gli elementi determinati nello stesso modo da $(A'C')$; e quindi a questi si possono far corrispondere univocamente e nel medesimo ordine i primi (d), vale a dire nella corrispondenza di proporzionalità le forme date da (AC) e $(A'C')$ si possono scambiare fra loro.

i. Se le coppie (AB), (AC); $(A'B')$, $(A'C')$ sono in proporzione con la coppia $(A''B'')$, $(A''C'')$, sono in proporzione fra loro.

Perchè le forme determinate da (AC) e $(A'C')$ corrispondono univocamente e nello stesso ordine secondo la def. I a quella determinata da $(A''C'')$ (d) e quindi

si corrispondono univocamente e nel medesimo ordine fra loro mediante la def. I (*f*, 42).

i'. *La coppia* (AB), (AC) *è rispetto alla corrispondenza di proporzionalità uguale alla coppia* $(A'B')$, $(A'C')$.

Difatti nella corrispondenza di proporzionalità la coppia (AB), (AC) può essere sostituita nella corrispondenza con la coppia $(A''B'')$, $(A''C'')$ dalla coppia $(A'B')$, $(A'C')$ (def. VII, 8; def. IV, 9).

l. I segmenti somme o differenze di segmenti proporzionali sono pure proporzionali.

Difatti se (AB), $(A'B')$; (BD), $(B'D')$ sono due coppie di segmenti proporzionali nella corrispondenza data da (AC) e $(A'C')$ i segmenti $(AD) \equiv (AB) \pm (BD)$ $(A'D') \equiv (A'B') \pm (B'D')$ sono dedotti da (AC) e $(A'C')$ colla stessa operazione che soddisfa alla def. I, e a *b*, o *e*.

m. Se (AB) *e* $(A'B')$ *sono proporzionali nella corrispondenza determinata da* (AC) *e* $(A'C')$; (AC) *e* $(A'C')$ *sono proporzionali rispetto ad* (AB) *e* $(A'B')$.

Supponiamo dapprima $(AB) < (AC)$ e quindi $(A'B') < (A'C')$ (*a*, e *c*); si avrà:

$$(AB)\mu \leqq (AC) < (AB)(\mu+1) \qquad (c', 81 \text{ opp. } c, 105).$$

e perciò anche

$$(A'B')\mu \leqq (A'C') < (A'B')(\mu+1) \qquad (a, \text{ e } c)$$

Se (AC) è multiplo di (AB) secondo il numero μ il teor. è immediata conseguenza della def. I. Se invece non lo è, sarà

$$(AC) \equiv (AB)\mu + (A_1C_1) \qquad (1)$$

ove

$$(A_1C_1) < (AB)$$

e analogamente

$$(A'C') \equiv (A'B')\mu + (A'_1C'_1)$$

ove

$$(A'_1C'_1) < (A'B').$$

Se (A_1C_1) è un summultiplo di (AB) ad es. uguale alla sua parte μ_1^{ma}, (AC) contiene $\mu\mu_1 + 1$ di queste parti, è cioè multiplo di $\frac{(AB)}{\mu_1}$ che corrisponde proporzionalmente alla parte $(\mu\mu_1+1)^{ma}$ di $(A'C')$, la quale è pure parte μ_1^{ma} di $(A'B')$. I segmenti (AC) e $(A'C')$ sono dunque in tal caso proporzionali nella corrispondenza determinata dalle parti μ_1^{me} di (AB) e $(A'B')$, e quindi anche per la dimostrazione precedente e pel teor. *i*, in quella determinata da (AB) e $(A'B')$. Se invece (AB) non è multiplo di (A_1C_1) si avrà:

$$(A_1C_1)\mu_1 < (AB) < (A_1C_1)(\mu_1+1) \quad (c', 81 \text{ opp. } c, 105) \quad (2)$$

ove

$$(A_1C_1) > (AB)\frac{1}{\mu_1+1} \qquad (d', 79, \text{ o } g', 92)$$

(A_1C_1) contiene una sola parte $\frac{(AB)}{\mu_1+1}$. Se si avesse $(A_1C_1) \overset{\equiv}{>} \frac{(AB)}{\mu_1+1}$. 2 si avrebbe pure:

$$(A_1C_1)(\mu_1+1) \overset{\equiv}{>} (AB)\,2 \qquad (d,\ 79 \text{ o } g,\ 92).$$

quindi

$$(A_1C_1)(\mu_1+1) > (A_1C_1)\,\mu_1\,2 \qquad ((2);\ d',\ 61)$$

vale a dire:

$$(A_1C_1)(\mu_1+1) > (A_1C_1)(\mu_1+1) + (A_1C_1)(\mu_1 - 1)$$

il che è assurdo (f, 73; o b, 61 se $\mu_1 = 1$).

Se (AC) e $(A'C')$ sono proporzionali rispetto ad

$$(AB_1) \equiv \frac{(AB)}{\mu_1+1}, \qquad (A'B'_1) \equiv \frac{(A'B')}{\mu_1+1}$$

lo sono pure per la dimostrazione precedente nella corrispondenza determinata da (AB) e $(A'B')$.

Da (1) si ha:

$$(AB_1)\,[\mu\,(\mu_1+1)+1] < (AC) < (AB_1)\,[\mu\,(\mu_1+1)+2] \qquad (3)$$

perchè (A_1C_1) contiene una sola parte $(\mu_1+1)^{ma}$ di (AB), cioè contiene una sola volta (AB_1) ed è maggiore di (AB_1) (2), mentre (AB) contiene μ_1+1 volte (AB_1). Analogamente per la corrispondenza di proporzionalità

$$(A'B')\,[\mu\,(\mu_1+1)+1] < (A'C') < (A'B')\,[\mu\,(\mu_1+1)+2] \qquad (c).$$

Si ha quindi:

$$(AC) \equiv (AB_1)\,[\mu\,(\mu_1+1)+1] + (A_2C_2) \qquad (4)$$

Se (A_2C_2) è un summultiplo di (AB_1) il teorema è dimostrato; se no, si avrà:

$$(A_2C_2)\,\mu_2 < (AB_1) < (A_2C_2)(\mu_2+1)$$

e ponendo

$$(AB_2) \equiv \frac{(AB_1)}{\mu_2+1} \equiv \frac{(AB)}{(\mu_1+1)(\mu_2+1)} \qquad (a,\ 79 \text{ o } c,\ 92)$$

si ha

$$(A_2C_2) > (AB_2);$$

e con un ragionamento analogo al precedente, ponendo $\mu' = \mu\,(\mu_1+1)+1$ si ha

$$(AB_2)\,[\mu'(\mu_2+1)+1] < (AC) < (AB_2)\,[\mu'(\mu_2+1)+2]$$

Così continuando si ha:

$$(AB_\sigma) \equiv \frac{(AB)}{(\mu_1+1)(\mu_2+1)\ldots\ldots(\mu_\sigma+1)}$$

che diventa indefinitamente piccolo coll'aumentare indefinito di σ (d, 99 o e, 103)

in senso relativo o assoluto. (AC) e $(A'C')$ si ottengono dunque come limiti di una serie di segmenti commensurabili con (AB) e $(A'B')$. Il caso $(A_1B) > (AC)$ si riduce al precedente, e quindi il teor. è dimostrato.

Def. III. Dato un segmento (AC) ogni altro segmento (AB) della forma fondamentale si può dedurre da (AC) in base al teor. *h*, 99 oppure in senso assoluto al teor. *d*, 104.

In questa costruzione noi paragoniamo (AB) e (AC), e la relazione di (AB) e (AC) in questo confronto (def. IV, 8) si chiama *rapporto* di (AB) ad (AC), che si indica col simbolo $\frac{(AB)}{(AC)}$.

Oss. II. Data la coppia (AB), (AC) è determinato da essa il rapporto di (AB) ad (AC), ma il rapporto non è la coppia stessa.

n. Se le coppie (AB), (CD); $(A'B')$, $(C'D')$ sono in proporzione, i loro rapporti sono uguali.

Difatti $(A'B')$ si ottiene da $(C'D')$ colla stessa operazione con cui (AB) si ottiene da (CD), e i rapporti delle due coppie dipendendo unicamente da questa operazione (def. III; def. I, II, 11) sono uguali (def. VII, 8 o def. IV, 9);

n'. Se le coppie (AB), (CD); $(A'B')$, $(C'D')$ sono in proporzione si ha:

$$\frac{(AB)}{(CD)} = \frac{(A'B')}{(C'D')}, \qquad (n, \text{ def. III}; \ b, \ 9).$$

Oss. III. Non possiamo adoperare il segno $\equiv$ perchè qui si tratta di un'uguaglianza relativa fra le coppie (AB), (CD); $(A'B')$, $(C'D')$, delle quali consideriamo altri contrassegni (def. I, 38; oss. II). Il rapporto è il contrassegno rispetto al quale vengono confrontate le coppie nella corrispondenza di proporzionalità (9).

n''. Se

$$\frac{(AB)}{(CD)} = \frac{(A'B')}{(C'D')}$$

le coppie (AB), (CD); $(A'B')$, $(C'D')$ sono in proporzione.

Difatti l'uguaglianza dei rapporti dà l'uguaglianza delle operazioni colle quali (AB) e $(A'B')$ si ottengono da (AC) e $(A'C')$ secondo la def. III, che sono anche quelle della def. I e del teor. *e*.

La proporzione fra le coppie (AB), (AC), $(A'B')$, $(A'C')$ si può indicare e indicheremo col simbolo

$$\frac{(AB)}{(AC)} = \frac{(A'B')}{(A'C')} \quad [1] \qquad (n' \text{ e } n'')$$

---

1) In fondo per la teoria delle proporzioni non occorre introdurre il concetto di rapporto, basta semplicemente la coppia di segmenti; d'altronde il rapporto è una relazione fra (AB) e (AC), non la coppia stessa, ma bensì un contrassegno di essa. Il rapporto è poi indipendente dalla corrispondenza di proporzionalità, perchè esso dipende soltanto dall'operazione speciale colla quale da (AC) si ottiene (AB).

Il rapporto non solo non dipende dalla posizione relativa dei segmenti (AB) e (AC) ma neppure dai segmenti stessi presi isolatamente, perchè segmenti non uguali ad (AB) e (AC) possono aver lo stesso rapporto. (Vedi anche § 2, Cap. VII).

Euclide definisce il rapporto (o ragione) come una relazione dei due segmenti (o grandezze omogenee) in ordine alla loro quantità (def. III, lib. V), ma egli non ha detto che cosa si debba intendere

Oss. IV. Ad ogni rapporto $\frac{(AB)}{(CD)}$ secondo la def. III corrisponde un segno (numero) che indica l'operazione colla quale da (CD) si ottiene (AB), che ha la forma del simbolo del teor. h', 99 o e', 105, se $(AB) < (CD)$. Se invece $(AB) > (CD)$ si ha:

$$(CD)\mu \leqq (AB) < (CD)(\mu+1) \qquad (c', 81 \text{ opp. } c, 105).$$

e quindi:

$$(AB) \equiv (CD)\mu + (C_1D_1)$$

ove $(C_1D_1) < (CD)$, che viene espresso mediante (CD) e uno dei simboli suddetti.

Def. IV. Questo segno o numero si chiama la *misura* del rapporto o della coppia (AB), (AC) nella corrispondenza di proporzionalità.

Oss. V. Senza adottare l'ipot. VII intorno agli ordini d'infinitesimo di un segmento qualunque (100), la corrispondenza di proporzionalità in senso assoluto non sarebbe possibile.

§ 12.

Estensione delle scale. Campi finito, infiniti e infinitesimi intorno ad un elemento della forma fondamentale aperta o chiusa rispetto ad un' unità.

107. *Oss. I,* Il teor. g del n. 99 o il teor. c del n. 104, ci permette di non tener conto nella relazione d'identità, come abbiamo fatto fin qui, del verso in cui sono percorsi i segmenti identici. Finora noi abbiamo considerate le scale di diverse unità a partire da un elemento dato come origine fondamentale in un solo verso sulla forma

---

per quantità (vedi nota 2, 38). Definisce l'*uguaglianza* di due rapporti (def. V, lib. V), e cade, a mio parere, in un difetto analogo a quello accennato nella nota in calce al n. 9. È vero che in Euclide la definizione di uguaglianza serve a completare quella di ragione, e significa che se i rapporti hanno tali proprietà da essere soddisfatta la def. V essi si possono sostituire uno all'altro; ma l'incovenientè non é tolto del tutto, poichè il rapporto, come dissi, esiste indipendentemente da un altro rapporto, e quindi pare a me debba essere definito pienamente prima di confrontarlo con altri. Molti dopo aver definita la proporzione fra quattro grandezze due a due omogenee e multiple l'una dell'altra, *dicono*, che il rapporto della prima alla seconda è *uguale* al rapporto fra la terza e la quarta, introducendo il rapporto come un modo di dire: non sappiamo perchè non si chiami anche *disuguale* o con altra parola, anzichè adoperare il segno = o la parola uguale che ha logicamente un senso determinato (8-11), oltrechè si fa dipendere il rapporto dalla proporzione. Si potrebbe anche dire secondo la nostra definizione e pei teor. i e i' che la coppia (AB), (AC) nella corrispondenza di proporzionalità si chiama rapporto; anche così lo si farebbe dipendere dalla corrispondenza di proporzionalità. Ad ogni modo però pei teor. n, n' n'' rapporto e coppia di segmenti nella corrispondenza suddetta sono termini equivalenti. (Vedi le note: 117 e 2, 121).

Con questa corrispondenza si possono svolgere tutte le proprietà dei rapporti di segmenti come abbiamo fatto qui per alcune di esse non avendo noi bisogno in fondo che della def. I e del teor. b per la dimostrazione di un teorema che serve di base alle proprietà fondamentali del piano. Si può dire che $\frac{(AB)}{(AC)} \gtrless \frac{(AB_1)}{(AC)}$ quando $(AB) \gtrless (AB_1)$, perché in questo modo si fanno corrispondere univocamente e nello stesso ordine i rapporti ai segmenti o agli elementi della forma fondamentale, dimodochè ad un elemento compreso fra due elementi dati corrisponde un rapporto compreso fra i rapporti corrispondenti. Se si tratta di due rapporti $\frac{(AB)}{(AC)}$, $\frac{(A'B')}{(A'C')}$, il primo è maggiore o minore del secondo secondo che è maggiore o minore del rapporto $\frac{(AB_1)}{(AC)}$ corrispondente di $\frac{(A'B')}{(A'C')}$ nella corrispondenza data da (AC) e $(A'C')$, perchè essa è univoca e del medesimo ordine. (d).

Qui ci siamo limitati ai segmenti di una o più forme fondamentali, ma poichè la corrispondenza di proporzionalità dipende soltanto dalla costruzione con cui i segmenti della forma fondamentale vengono dedotti da (AC) (def. I), così si può stabilire questa corrispondenza fra coppie di grandezze qualunque che si possono dedurre una dall'altra nel modo anzidetto.

fondamentale aperta (oss. I, 79 e def. VII, 92). Ora le considereremo anche nel verso opposto, e poichè la forma fondamentale in un verso è identica alla stessa forma nel verso opposto (a. 70), i suoi elementi a partire da A in un verso possono essere indicati dagli stessi segni di quelli considerati nel verso opposto, facendo corrispondere agli stessi segni nei due versi segmenti identici a partire da A.

Se si ha un segmento (AC) infinito rispetto ad (AA_1) siccome $(CA) \equiv (AC)$ (c, 104) (CA) è infinito dello stesso ordine rispetto ad (AA_1).

a. Se B' e B sono elementi dati dei campi infiniti d'ordine η in versi opposti (o da parte opposta) dall'origine, il segmento $(B'B)$ che comprende l'origine è pure infinito dello stesso ordine.

Se (AB') non è uguale ad (AB) vi è però un elemento B_1 nel verso di (AB) tale che

$$(AB') \equiv (AB_1) \qquad (a', 70).$$

Ma essendo (AB_1) infinito dello stesso ordine di (AB) è finito con (AB) (c, 91 e a, 86), e quindi anche la somma $(AB') + (AB)$ (i, 82), e perciò questa somma è infinita dello stesso ordine (c, 91; a, 86). Ma $(AB') \equiv (B'A)$ (g, 99; c, 104) dunque $(B'A) + (AB) \equiv (B'B)$ è finito rispetto ad (AB), ossia infinito dello stesso ordine (c, 91 e a, 86).

Def. I. I campi finiti rispetto ad un'unità data nei due versi della forma a partire da un suo elemento X qualunque dato (def. V, 83) *costituiscono il campo finito intorno all'elemento* X rispetto alla data unità.

Def. II. I campi infiniti di un ordine dato η in uno o nell'altro verso a partire da A costituiscono invece il *campo infinito d'ordine* η rispetto all'unità fondamentale data (def. II e oss. III, 91).

b. Se B e B' sono elementi limiti di un dato ordine η a partire da un elemento A in uno e nell'altro verso, si ha rispetto all'unità fondamentale

$$(AB') \equiv (AB)$$

Difatti essi sono limiti determinati dai campi infiniti di ordine η-1, i quali sono identici (def. I, a'', 70 e oss. III, 86).

108. *Oss. I.* Se la forma fondamentale è chiusa la possiamo considerare anche come una forma aperta (b, 63). In tal caso fra le due specie di forma fondamentale non vi sarebbe alcuna distinzione, perchè la stessa forma chiusa si considererebbe quale forma aperta.

a. Dato un segmento (AB) della forma fondamentale chiusa, esso o è finito o è infinitesimo d'ordine determinato η rispetto a tutta la forma; quindi nella forma non vi sono segmenti infiniti d'ordine superiore a η rispetto ad (AB).

La forma fondamentale chiusa è infinita di ordine determinato rispetto ad un suo segmento qualunque dato.

Intorno ad ogni elemento A rispetto ad un'unità (AB) fondamentale vi sono un campo finito e i campi infiniti di 1°, 2°, ..., η^{mo} *ordine, se η e l'ordine d'infinito della forma fondamentale rispetto ad (AB).*

I campi infiniti di 1°, 2°,... $(\eta-1)^{mo}$ *ordine in uno o nell'altro verso non coincidono, mentre coincidono i campi infiniti di* η^{mo} *ordine.*

Volendo tener conto infatti della forma chiusa come forma semplice, a partire da un suo elemento A qualunque la si può considerare come un segmento

limitato da due elementi coincidenti in A (a, 63), mentre i segmenti semplici conservano le stesse proprietà rispetto alle suddivisioni in parti infinitesime, e perciò anche in parti uguali (ip. VII; a, d, 103). Ma scelto un segmento (AB) infinitesimo d'ordine η rispetto a tutta la forma, questa è infinita d'ordine η rispetto ad (AB) (def. III, 86; oss. IV, 91), e in tal caso rispetto ad (AB) non vi è un infinito d'ordine superiore, che dovrebbe essere maggiore di tutta la forma data (def. II, 82 e def. II, 86).

Questa è la differenza caratteristica fra la forma fondamentale chiusa e quella aperta, perchè in quella aperta vi è in uno e nell'altro verso un segmento di ordine infinito qualunque dato rispetto ad ogni segmento. Inoltre scelto il segmento (AB) sulla forma aperta, i segmenti infiniti d'un ordine qualunque η in un verso non hanno alcun elemento comune, in modo che i campi infiniti d'ordine η non coincidono; mentre coincidono se la forma è chiusa rispetto all'elemento A, perchè si confondono colla forma stessa che è a partire da A fino ad A un segmento infinito di ordine η. Dunque ogni elemento X tale che (AX) è infinito in un verso d'ordine η è finito rispetto a tutta la forma, l'elemento X appartiene ad uno dei campi a partire da A nel verso opposto.

Gli elementi limiti all'infinito d'ordine η che rappresentano i campi all'infinito di 1° ordine rispetto all'unità infinita d'ordine η-1 (oss. III 86), coincidono come i campi che rappresentano, essendo essi in senso assoluto punti nei quali coincidono in uno e nell'altro verso i campi all'infinito d'ordine η nei due versi a partire da A rispetto all'unità di ordine η-1 (def. IV, 86; oss. III e def. II, 91).

Oss. II. Nel passaggio dal campo di un'unità ad un'altra infinita bisognerà tener presente che gli elementi limiti non sono elementi determinati rispetto alla nuova unità ma che rappresentano appunto tutto un campo di elementi (i', 85).

a'. Ogni elemento dato di un campo finito o di un campo infinito d'ordine minore di η *della forma chiusa intorno ad un elemento, lo divide in due parti uguali relativamente alle unità di questi campi* (a; e a'', 70).

§ 13.

Ancora dell'uguaglianza assoluta e relativa di due forme.

109. *a. L'uguaglianza di due segmenti limitati di forma fondamentale rispetto all'unità assoluta equivale all'uguaglianza in senso assoluto.*

Difatti essi non possono differire di alcun segmento (AB) dato, neppure se è infinitesimo di ordine determinato η quanto grande si vuole, mentre se differiscono di un segmento infinitesimo assoluto, questo si confonde con lo zero assoluto (def. I, 97).

a'. L'uguaglianza in senso assoluto dà l'uguaglianza relativamente ad ogni unità di misura.

Perchè se due segmenti sono uguali in senso assoluto a maggior ragione lo sono in senso relativo (def. III e IV, 9 opp. b', 91).

a''. L'uguaglianza relativa ad una data unità di due segmenti finiti dati si può ritenere come un' uguaglianza assoluta quando non sia stabilito che essi differiscono di un infinitesimo in senso assoluto.

Siano (AB), (CD) i due segmenti dati. Se (AB) e (CD) non sono invece uguali in senso assoluto, e $(CD') \equiv (AB)$, poichè (CD) e (CD') coincidono rispetto all'unità relativa (b', 91) possiamo ritenere che ad (AB) in senso relativo sia uguale (CD') anzichè (CD). Dunque è dimostrato in tal caso che l'uguaglianza relativa dei due segmenti può ritenersi come un' uguaglianza assoluta.

Ma se invece è già stabilito che $(CD) \gtrless (AB)$ in senso assoluto, e poi dall'unità relativa si passa all'unità assoluta, (CD) rimane sempre lo stesso, e i due segmenti (AB) e (CD) che sono uguali in senso relativo non lo sono invece in senso assoluto, perchè è già stabilito che il segmento che si confronta con (AB) in senso assoluto non è (CD') ma (CD).

b. L'uguaglianza rispetto ad una data unità di due segmenti infiniti o infinitesimi non è in generale un' uguaglianza assoluta nè un' uguaglianza relativa alla loro unità se sono della stessa specie.

Perchè due segmenti infinitesimi o infiniti sono uguali rispetto all'unità finita mentre possono essere disuguali rispetto ad un'unità infinitesima o infinita (i, h, 85 e b', 91).

c. Due forme identiche devono esser tali in senso assoluto e perciò anche rispetto a qualunque unità relativa.

Difatti se differissero in qualche cosa non sarebbero più identiche, salva la diversità di posizione (def. III, oss. III, 9 e oss. III, 58).

CAPITOLO VII.

Forme a più dimensioni — Campo di tutte le forme — Grandezza estensiva ed intensiva di una forma e in particolare della forma fondamentale [1]).

---

§ 1.

Definizione delle forme a più dimensioni e loro campo.

110. *Def. I.* Un sistema ad una dimensione riferito ad un altro sistema ad una dimensione a (def. I, 62), preso come nuovo elemento, si chiama sistema o forma a *due dimensioni* rispetto all'elemento fondamentale di a (def. I, 57).

E in generale un sistema ad una dimensione riferito ad un sistema a $\eta-1$ dimensioni, come nuovo elemento, si chiama *sistema o forma* a η *dimensioni* rispetto all'elemento fondamentale.

Oss. I. La definizione precedente suppone che gli elementi di un sistema ad una dimensione siano identici (def. I, 62 e def. I, 57); possiamo supporre che non lo siano, e diremo:

Def. II. Se è data una forma determinata da più forme ad una dimensione $a'\, a''\, a'''... a...^{\mu}$ rispetto all' elemento fondamentale e se si può stabilire fra gli elementi di $a'\, a''...a^{\mu}$ una corrispondenza univoca e dello stesso ordine, in modo che gli elementi corrispondenti determinano un sistema ad una dimensione, la forma data si chiama pure a *due dimensioni* rispetto all'elemento fondamentale.

In tal guisa si possono definire forme a un numero qualunque dato di dimensioni.

a. La forma data da tutte le forme definite in base ai suddetti principii, e nelle quali esse sono contenute (def. I, e def, II, 13) *non ha un numero determinato di dimensioni.*

Difatti la costruzione delle forme a più dimensioni è illimitata, poichè supposta data una forma a η dimensioni possiamo costruirne un'altra a $\eta+1$ dimensioni.

§ 2.

Grandezza estensiva e intensiva delle forme e della forma fondamentale.

Def. I. Grandezza estensiva di una forma che non è un solo elemento (def. IV, 57) si dice la forma considerata nelle relazioni di posizione fra le

---

1) Di questo capitolo come di altre proprietà non faremo uso nella geometria (vedi pref.), perchè senza fondarci da principio su troppi concetti generali preferiamo di dare le definizioni delle figure a più dimensioni, della loro grandezza intensiva, delle figure continue quando si presenterà il bisogno o l' utilità.

sue parti, astrazion fatta dalle relazioni di uguaglianza (def. III, 9) e di disuguaglianza con altre forme (def. I, II, 61).

Def. II. Grandezza intensiva o *quantità* di una forma che non è un solo elemento (def. IV, 57) si intende la forma considerata come sostituibile ad nn altra forma identica in ogni unione (29) con altre forme (oss. III, 58), astrazion fatta quindi dalle relazioni di posizione.

a. Quando di una forma non si tien conto delle relazioni di posizione delle sue parti fra loro, che non sono un solo elemento, la forma risultante è la grandezza intensiva della forma data.

Non tenendo conto delle relazioni di posizione delle parti fra loro, alle parti A e B ecc. della forma F possiamo sostituire due forme identiche A' e B'.... qualunque, vale a dire consideriamo solo la grandezza intensiva di queste parti (def. II). In questo modo alle parti A, B ecc. della forma F in unione con un'altra forma F_1 si possono sostituire rispettivamente le parti A', B' ecc. di una forma F' identica a F, e siccome ogni forma è data dalle sue parti, alla forma F in unione con F_1 possiamo sostituire la forma F', quindi ecc. (def. II).

Oss. I. Il concetto di maggiore e di minore di due forme secondo la def. I e II del n. 61, riguarda soltanto la grandezza intensiva delle forme (*a*, 61 e def. II).

Se una forma si considera dunque soltanto nelle relazioni di uguaglianza e di disuguaglianza con altre forme, (def. I e II, 61) si fa astrazione dalle sue relazloni di posizione con altre forme o delle sue parti (*a*) e quindi si ha la grandezza intensiva della forma data.

b. Per definizione della grandezza intensiva può essere considerata la proprietà del teor. a.

Perchè da essa con un'analoga dimostrazione si ottiene la proprietà della def. II.

c. Una forma ha una sola grandezza intensiva, mentre ad una grandezza intensiva possono corrispondere più forme.

La prima parte del teorema risulta immediatamente dalla definizione stessa (def. I, 38). Per la seconda parte basta osservare che tutte le forme identiche o composte di forme identiche hanno la stessa grandezza intensiva.

Ind. I. Per l'uguaglianza di due grandezze intensive A e B adopereremo il segno $=$, e scriveremo $A = B$ (def. IV, 9).

Def. III. Due grandezze intensive A e B tali che $A > B$ le chiameremo omogenee se

$$B\eta \geqq A \qquad \text{(def. I, II, 61)}$$

essendo η un numero qualunque determinato della classe (II) dei numeri interi finiti e infiniti (def. V, 91) [2]).

Def. IV. Una forma che serve a confrontare le grandezze intensive di due forme omogenee A e B si chiama *unità di misura delle grandezze A e B.*

d. Per le grandezze intensive (AB), $(A'B')$ *di due segmenti della forma fondamentale si ha:*

$$(AB) + (A'B') = (A'B') + (AB) \qquad (e,\ 99 \text{ o } a,\ 104).$$

e. $$(AB) = (BA)$$

---

1) Vedi *c*.

2) Non escludiamo con questa definizione che η possa appartenere ad altre classi di numeri possibili (Vedi nota, 4).

Oss. II. Il primo teorema ci dà la legge commutativa delle grandezze intensive con questo, che mentre nei teor. *e*, 99 e *a*. 104 i segmenti devono essere consecutivi, non occorre che ciò sia per le grandezze intensive (def. II). Il secondo teorema ci dice che la grandezza intensiva di un segmento della forma fondamentale è indipendente dal verso di essa.

Oss. III. Valgono pure per le grandezze intensive gli altri teor. dei numeri 99 e 103-104 e le indicazioni pei multipli e summultipli.

f. Due segmenti uguali in grandezza intensiva sono identici.

Se (AB) e (CD) sono due segmenti qualunque si ha uno dei tre casi $(AB) \gtreqless (CD)$ (*b*, 73; *b*, *c*, 61). Se $(AB) \equiv (CD)$ le grandezze intensive di (AB) e (CD) sono uguali (def. III, IV, 9 e def. II). Se $(AB) > (CD)$ vi è in (AB) un segmento $(AB_1) \equiv (CD)$ (*b'*, 69) che ha la stessa grandezza intensiva di (CD), mentre le grandezze intensive di (AB_1) e (AB) differiscono per quella di (B_1B) (oss. I).

Ora se inversamente i due segmenti (AB), (CD) hanno uguale grandezza intensiva devono essere identici, perchè se non fosse $(AB) \equiv (CD)$ per l'osservazione precedente i segmenti (AB) e (CD) non sarebbero uguali in grandezza intensiva.

g. La grandezza intensiva della forma fondamentale e delle sue parti è indipendente dalla posizione dei suoi elementi dati e distinti, ma non da quelli di un segmento indefinitamente piccolo.

Sia (AB) un segmento dato cogli estremi distinti. Si può scomporre (AB) in η parti uguali (AA'), $(A'A'')(A''A''')$... $(B'''B'')$, $(B''B')$, $(B'B)$, e ai segmenti (AA') $(A'A'')$... $(B'B)$ possiamo sostituire altri segmenti identici $(A_1A'_1)(A'_1A''_1)$... qualunque e fuori della forma data (*a*); dunque la grandezza intensiva è indipendente dalla posizione di A'', A''', ecc. B, però è dipendente da quella di A' rispetto ad A perchè deve essere $(A_1A_1') \equiv (AA')$. Crescendo η si vede che nella grandezza intensiva A è indipendente da A', mentre si ottiene un segmento (AX) sempre più piccolo, vale a dire agli elementi dati del segmento (AB) possiamo sostituire a partire da A altri elementi fuori di questo segmento. Con questo procedimento (AX) diventa indefinitamente piccolo (*d*, 99 o *e*, 103). Rimane dunque sempre l'indefinitamente piccolo da cui dipende la grandezza intensiva, ossia essa dipende dalla posizione degli elementi nell'indefinitamente piccolo, sebbene siano per noi indeterminati. O in altre parole facendo corrispondere nel modo indicato altri elementi a quelli della forma fondamentale, a due elementi indefinitamente vicini della forma fondamentale devono corrispondere due elementi indefinitamente vicini di un'altra o della stessa forma fondamentale affinchè non muti la grandezza intensiva.

Oss. IV. Sarebbe quindi un errore il dire che la grandezza intensiva di un segmento è indipendente dalla differenza di posizione di tutti i suoi elementi, nel qual caso non occorrerebbe che nella corrispondenza suddetta a due elementi indefinitamente vicini corrispondessero due elementi pure indefinitamente vicini sulla forma fondamentale, sebbene indeterminati.

g'. Se la grandezza intensiva di un sistema è omogenea con quella della forma fondamentale o di una sua parte, l'indefinitamente piccolo del sistema è un'indefinitamente piccolo della forma fondamentale.

Difatti le parti del sistema rispetto alla loro grandezza intensiva si possono sostituire da segmenti della forma fondamentale. Ma la grandezza intensiva della forma fondamentale dipende dall'indefinitamente piccolo di essa (i), e per la grandezza intensiva a due elementi indefinitamente vicini della forma fondamentale devono corrispondere due elementi indefinitamente vicini della stessa o di un'altra forma fondamentale, come risulta dalla definizione stessa della grandezza intensiva e dalla dimostrazione del teor. i; dunque i'.

Oss. V. Tale proprietà ha ogni sistema dato, che si ottiene da un numero η di segmenti di forma fondamentale non situati in una di queste forme, anche quando questi segmenti decrescono indefinitamente in senso assoluto, o relativo, rimanendo nel campo di una sola unità [1]).

---

1) Il teor. g, 121 dice che la pura grandezza numerica non è ancora la grandezza intensiva.

Le definizioni di grandezza estensiva ed intensiva di *H. Grassmann* sono in fondo analoghe alle nostre, sebbene quelle di Grassmann siano oscure. Egli dice: (Ausdeh. Leh. 1844 p. XXIV) « La grandezza intensiva è ciò che è generato dall'uguale, mentre la grandezza estensiva è generata dal diverso». È un linguaggio tanto più oscuro in quanto egli non ha ben spiegato prima i concetti dell'uguale e del diverso, ma chiarisce il suo concetto, quando dice che la linea geometrica essendo una grandezza estensiva si può riguardare come una grandezza intensiva facendo astrazione dal come sono posti i suoi elementi (punti). Ma egli per elemento (p. XXVII) intende una parte indefinitamente piccola (vedi nota 3 n. 97) non come da noi un ente che non è parte del continuo nel senso del teor. d, 105 (oss. I, 76 e oss. IV, 105) sebbene ne possa avere in sè (def. I, 57).

Secondo noi però bisogna dire che il primo carattere o contrassegno della linea come delle altre figure geometriche, è la diversità di posizione dei suoi punti e quindi la sua grandezza estensiva (def. I); ma la linea non è soltanto una grandezza estensiva perchè ha anche una grandezza intensiva. E da osservare poi che per *Grassmann* la grandezza estensiva e intensiva sono continue (Vedi nota suddetta) mentre le nostre definizioni valgono anche per le forme discrete.

CAPITOLO VIII [1])

Numeri reali, relativi e assoluti, positivi e negativi.

---

§ 1.

Verso positivo e negativo della forma fondamentale — Segmenti positivi e negativi — Criterio di confronto fra gli uni e gli altri — Convenzione dei segni + e —.

112. *Oss. I.* Dati due segmenti (AB) e $(A'B')$, indipendentemente dalla forma fondamentale in cui sono situati, se (AB) contiene una parte identica ad $(A'B')$ si ha:

$$(AB) > (A'B'),\ (A'B') < (AB) \qquad \text{(def. I, II, 61)}$$

e poichè

$$(A'B') \equiv (B'A') \qquad (g,\ 99 \text{ opp. } c,\ 104)$$

si ha pure

$$(AB) > (B'A') \qquad \text{(def. II, 61).}$$

Con questo criterio di maggiore e di minore, come con quello d' identità assoluta non si considerano le relazioni delle forme in un tutto qualunque a cui possono appartenere, ma si considerano separatamente in sè (ad es. oss. III, 58 e *a*, 61). Così se si tratta di due segmenti di forma fondamentale. Ciò non significa che il concetto di maggiore e di minore e quello di identità non dipendano dall' ordine delle parti delle forme stesse che si confrontano e quindi dei loro elementi, ma significa che riguardano soltanto il loro ordine in sè, e non in relazione ad altre forme cui appartengono. È se anche (AB) e $(A'B')$ appartengono ad una medesima forma fondamentale, se sono identici lo sono indipendentemente dal verso del sistema, in base al principio *b* del n. 60.

Ma se vogliamo che sia contrassegno dei segmenti nella forma fondamentale anche il verso della forma in cui sono percorsi, noi evidentemente facciamo una restrizione al concetto d'identità dei due segmenti considerati separatamente, e al concetto di maggiore e di minore, attribuendo ad essi un contrassegno che ad essi, considerati in sè medesimi, non spetta, cioè la posizione o l'ordine relativo ad elementi fuori di essi [2]). Bisogna vedere come può modificarsi il criterio di maggiore e di minore nel confronto di segmenti di verso opposto, senza contraddire al criterio suddetto che in tal caso deve valere per i segmenti in un verso dato della forma [3]).

Def. I. Un verso qualunque dato della forma fondamentale e nel quale vale il criterio di maggiore e di minore già stabilito (def. I, II, 61) lo chiameremo *verso positivo*, mentre chiameremo *verso negativo* il verso opposto. I segmenti

---

1) Di questo Cap. non facciamo alcun uso nei fondamenti della geometria.

2) È questo in fondo che si fa colla definizione dell' uguaglianza di due figure geometriche mediante l'idea intuitiva del movimento senza deformazione nello spazio S_3 (o S_n) (Vedi pref. e ad es. parte I, cap. I.).

3) Vedi oss. IV.

percorsi nel primo verso li chiameremo *positivi*, *negativi* quelli percorsi in verso contrario.

Def. II. Quando diremo che due segmenti sono in *valore assoluto* uguali o disuguali intenderemo di riferirci sempre al criterio già stabilito indipendentemente cioè dal verso della forma in cui sono percorsi.

Oss. II. A partire dunque da un elemento A nel verso positivo non vi è che un solo segmento (AB), e gli altri segmenti in questo verso sono a partire da A maggiori o minori di (AB) (*c*. 65, *c'*. 68; *b*, 73).

Def. III. Nel confronto di segmenti positivi e negativi teniamo fermo il criterio che se ad un segmento dato a, si sommano due segmenti b e c positivi o negativi, e che i segmenti risultanti sono positivi e l'uno maggiore dell'altro; dei due segmenti b e c è maggiore quello che dà il risultato maggiore (*f*, 73).

a. I segmenti negativi sono minori dei segmenti positivi; e di due segmenti negativi in confronto coi positivi è maggiore quello che in senso assoluto è minore.

Sia dato il segmento (AB) nel verso positivo e si aggiunga ad esso nello stesso verso un segmento (BC) qualunque; si avrà:

$$(AC) > (AB) \qquad \text{(def. I, 61)}.$$

Se invece si ha un segmento (BC') di verso opposto e in senso assoluto minore di (AB), in modo cioè che C' sia contenuto in (AB) (*b*, 36 e *c'*, 68) si avrà:

$$(AC') < (AB) \qquad \text{(def. I, 61)}.$$

e quindi pel criterio stabilito (def. III)

$$(BC') < (BC)$$

sebbene in senso assoluto (BC') possa essere maggiore di (BC).

$A_1 \quad C'' \quad A \quad C' \quad B \quad C$

Sia invece un segmento (BC'') in valore assoluto maggiore di (AB) e diretto nel verso negativo in modo dunque che A sarà contenuto nel segmento $(C''B)$ (*b*, 36; def. I, 62 e *c'*, 68). Scegliamo un segmento (A_1B) nel verso positivo che contenga C''. Se i segmenti (BC), (BC'), (BC'') si suppongono aggiunti al segmento positivo (A_1B) si ha:

$$(AC'') < (AC') < (AC).$$

Il teorema è dunque dimostrato (def. III).

Oss. III. Coi simboli $+(AB)$, $-(-(BA))$ o semplicemente (AB) s'intende lo stesso segmento (AB) percorso da A verso B (*c*, 77).

Conv. I. Conveniamo ora rispetto al verso positivo e negativo della forma che (AB) o $+(AB)$ *debba essere percorso da* A *a* B *nel verso positivo, e se* (AB) *è accompagnato dal segno* $-$ *sia percorso sempre nel verso negativo.*

Dimodochè i segmenti uguali ad (AB) e che hanno nella forma per estremo ciascuno A (*a'*, 70) si indicano, quello percorso nel verso positivo con $+(AB)$

o (AB) e l'altro col simbolo $-(AB)$. Ma se si vuole che (AB) e $-(AB)$ indichino lo stesso segmento, $-(AB)$ indica precisamente che il segmento è percorso nel verso negativo cioè da B verso A.

Oss. IV. Considerando il sistema semplicemente omogeneo in un dato verso (def. I, 68) e non il sistema identico nella posizione delle sue parti (def. I, 70) potremmo stabilire delle considerazioni analoghe rispetto ai segmenti positivi e negativi, pur essendo essi diretti nel medesimo verso. Supposta per maggiore semplicità la forma aperta, un elemento A la divide in due parti (*c*, 63). La parte ove si trovano tutti gli elementi a partire da A nel verso del sistema si chiama *positiva*, *negativa* l'altra.

Cosi a partire da un' origine A abbiamo dei segmenti positivi e negativi; ad es. se (AB) è positivo significa che B è situato dalla parte positiva rispetto ad A, o che è secondo estremo del segmento nel verso del sistema a partire da A; se è negativo significa che B è nella parte negativa o che è primo estremo del segmento nel verso dato rispetto ad A.

E se riteniamo come contrassegno dei segmenti il fatto che sono dalla stessa parte o da parte opposta rispetto ad A, i due segmenti $(B'A) \equiv (AB)$ diretti nello stesso verso del sistema ed identici ad un segmento dato (*b'*, 69), non sono più uguali, come avviene col metodo precedente per due segmenti (AB) e (AB'), tali che $(B'A) \equiv (AB)$ a partire da B nel verso del sistema.

Ma poichè le parti positive a partire da due elementi A e B hanno una parte comune, cioè tutta la parte B... a partire da B nel verso del sistema se A è primo elemento in questo verso, così possiamo parlare di parte positiva o negativa della forma senza che vi sia ambiguità intorno ai segmenti positivi e negativi rispetto ad un dato elemento come origine, qualora sia dato il verso del sistema; mentre poi i segmenti *vanno sempre in tal caso considerati nel medesimo verso.*

I due metodi si distinguono dunque per questa proprietà, poichè nel primo metodo i segmenti negativi sono diretti in verso opposto ai positivi. Questa osservazione basta a dimostrare, come meglio si vedrà in seguito, che la teoria dei numeri negativi e positivi è indipendente dalla proprietà caratteristica del sistema identico nella posizione delle sue parti; la quale però si presta meglio per enunciare le proprietà stesse dei segmenti positivi e negativi.

§ 2.

Numeri negativi e positivi — Operazioni fondamentali dei numeri positivi e negativi interi.

113. *Oss. I.* Se si considera la scala di unità (AA_1) sulla forma fondamentale in uno e nell'altro verso e le scale di unità infinite, infinitesime rispetto all'unità fondamentale (AA_1) e di origine fondamentale A (def. VII, 97) gli estremi dei segmenti consecutivi uguali all' unità in uno e nell'altro verso rappresentano i numeri della classe (II), supposto che l'unità (AA_1) rappresenti l'unità 1 del numero.

Def. I. Come abbiamo distinto nel numero precedente i segmenti della forma in positivi e negativi, e quelli percorsi nel primo verso accompagnati dal segno $+$ e quelli del verso opposto col segno $-$ (conv. I, 112), così corrispondentemente ai segmenti positivi e negativi dobbiamo distinguere i numeri che indicano i primi da quelli che indicano i secondi, chiamando i primi *numeri positivi* e i secondi *numeri negativi*, accompagnandoli coi segni $+$ e $-$, e chiudendoli quando occorra fra parentesi. Si pone cioè:

$$(+a) = +a = a$$

$$(-a) = -a$$

E siccome abbiamo distinto i numeri della classe (II) da altri possibili chiamandoli interi (def. V, 91), la serie dei numeri interi positivi è quindi

$$+1, \ +2, \ +3 \dots \ +\eta \dots$$

oppure anche

$$1 \quad 2 \quad 3 \dots \quad \eta \dots \qquad \text{(II)}$$

e quella dei numeri negativi

$$-1, \ -2, \ -3 \dots \quad -\eta, \dots \qquad \text{(II}_1\text{)}$$

Def. II. Per *valore assoluto* di un numero come di un segmento della forma fondamentale (def. II, 112) s'intende il numero stesso, indipendentemente dal segno. Quindi i numeri della classe (II) (91) si chiamano anche numeri *assoluti*, quando non si fa, come non si è fatta fin qui, alcuna distinzione fra numeri positivi e negativi.

a. Nel confronto fra i numeri positivi e negativi, i numeri negativi sono tutti minori dei numeri positivi, e di due numeri negativi è maggiore quello che in valore assoluto è minore (*a,* 112).

Si ha per es.

$$-7 < -3$$

essendo $7 > 3$

a'. Cambiando i segni + e — fra loro, il segno > si cangia nel segno <.

b. Le due classi di numeri positivi e negativi sono separate dal numero zero.

L'origine A fondamentale della scala è l'elemento di separazione delle due scale di segmenti positivi e negativi a cominciare da A, e rappresenta il segmento nullo sia in uno come nell'altro verso (oss. I e *a,* 76).

Oss. II. Dalla definizione stessa risulta che le operazioni coi segmenti positivi e negativi (def. I, 112) ci danno le operazioni coi numeri positivi e negativi.

c. Se b è un numero qualunque, si ha:

$$b = -(-b).$$

Ad es. $(BC) = -(CB)$ (*c',* 77) perchè se (BC) rappresenta il numero b, (CB) rappresenta $-b$, essendo $(CB) \equiv (BC)$ indipendentemente dal verso della forma fondamentale.

Oss. III. In relazione all'oss. IV del num. 112 se $(B'A) \equiv (AB)$ è identico all'unità, B rappresenta il numero 1 o $+1$, B' il numero -1 o (-1) rispetto ad A. In tal caso per dimostrare il teor. c non si può ricorrere al teor. $(CB) \equiv (BC)$, ma basta osservare che (CB) è lo stesso segmento (BC) riferito invece all'elemento C come origine, e che quindi rappresenta il numero $-b$.

114. *Addizione e sottrazione.*

a. L'addizione e la sottrazione dei numeri interi negativi si eseguisce come se fossero numeri assoluti dando al risultato il segno —.

L'addizione di più numeri positivi o negativi viene rappresentata dalla addizione di più segmenti consecutivi a partire dall'origine del verso positivo

o negativo (def. VII, 62 e conv. I, 91) e che contengono l'unità di misura tante volte quante sono le unità dei numeri corrispondenti.

La sottrazione di due numeri positivi ad es. 3 da 7 è rappresentata da una sottrazione di segmenti diretti nel medesimo verso, oppure da un'addizione di due segmenti diretti in verso opposto (def. I, 77). E poichè si ha:

$$7 - 3 = 4 \qquad (1)$$

il segmento risultante a partire dall'origine nel verso positivo rappresenta il numero 4 (oss. II, 80).

Se si fa la sottrazione nel verso negativo si deve avere

$$-7 + 3 = -4 \qquad (2)$$

perchè il segmento risultante è uguale in valore assoluto al primo (def. II, 112), ed è diretto nel verso opposto.

b. Si può eseguire la sottrazione di un numero positivo da un numero minore; il numero risultante è uguale alla differenza del minore dal maggiore preceduto dal segno —.

Se i numeri sono ambidue negativi il risultato va accompagnato col segno +.

Egli è possibile di togliere un segmento maggiore da un segmento minore in valore assoluto, e si ottiene un segmento che è uguale alla differenza del primo dal secondo nel verso del maggiore (def. I, def. II, 77). Se il segmento minore (AB) rappresenta il numero 3 e quello maggiore (BC) il numero 7, il segmento (AC) rappresenta a partire da A, $(AB) - (BC) \equiv (AC)$, il numero -4. Si ha dunque da

$$3 - 7 = -4 \qquad (3)$$

E se (AC) e (BC) sono diretti nel verso negativo

$$(-3) - (-7) = 4 \qquad (4)$$

od anche

$$-3 - (-7) = 4$$

c. Sottrarre da un numero positivo o negativo a un numero positivo (o negativo) b equivale a sommare al numero a il numero —b (o b).

Si ha infatti

$$(AC) - (BC) \equiv (AC) + (CB) \equiv (AC) + (-(BC)) \qquad (c'', 77)$$

$$(\pm a) - (\pm b) = (\pm a) + (\mp b) = (\pm a) + (-(\pm b))$$

e ricordando che

$$(+a) = +a = a, \quad (-a) = -a \qquad \text{(def. I)}$$

si ha:

$$\pm a - b = \pm a + (-b)$$

$$\pm a - (-b) = \pm a + b = \pm a + (-(-b))$$

d. L'addizione e la sottrazione dei numeri positivi e negativi sono soggette alla legge commutativa, cioè:

$$\pm a \pm b = \pm b \pm a$$

perchè ciò avviene anche per i segmenti della forma fondamentale che rappresentano questi numeri (*e*, 99 ed *a*, 104.) Si ha veramente:

$$-a + b = b + (-a)$$

ma $$b + (-a) = b - a \qquad (c)$$

dunque *d*.

e. Se ai membri di un'uguaglianza di numeri interi si aggiunge o si toglie lo stesso numero si ottengono numeri uguali (*a'*, 78).

f. Vi è uno ed un solo numero x tale che soddisfa l'uguaglianza

$$b \pm x = a$$

qualunque siano i numeri b e a (b, 78).

115. *Moltiplicazione.*

Def. I. L'operazione con cui si ottiene il multiplo $(AC)\eta \equiv (AD)$ di un segmento (AC) nel verso positivo secondo il numero η intero (def. I, 79 e def. I, 92). dal segmento (AC), si chiama *moltiplicazione* del segmento (AC) pel numero η; (AD) *prodotto*, (AC) *moltiplicando* e η *moltiplicatore*. Il prodotto si indica anche col segno $\times$ essendo questo il segno della moltiplicazione adoperato pei numeri della serie (I) (46 e 52) cioè:

$$(AC) \times \eta \equiv (AD) \qquad (b, 9) \qquad (1)$$

Oss. I. Si è trovato $\mu \times \eta = \eta \times \mu$ (b, 52 ed i, 93). Se μ è rappresentato dal segmento (AC) per la relazione suddetta *possiamo rappresentare il multiplo di (AC) secondo il numero η col simbolo $\eta(AC)$.*

a. Il prodotto di due numeri interi positivi è un numero positivo.

Difatti il segmento (AC) è diretto nel verso positivo, e se η è positivo, il segmento (AB) è pure diretto nel verso positivo.

Def. II. Prendere $-\eta$ volte un segmento (AC) significa considerare il multiplo di (AC) secondo il numero η nel verso opposto di (AC).

b. Il prodotto di un numero intero positivo per un numero intero negativo è negativo e il prodotto non cambia mutando i fattori.

Se si prende il segmento $(CA)\eta$ volte nel suo verso a partire da C che è negativo, si ha:

$$-(AC) \times \eta \equiv -(AD) \qquad (2)$$

ma riguardando (AC) come unità, all'estremo D corrisponde il numero $(-\eta)$ o $-\eta$ (def. I, 113), quindi possiamo dire che prendiamo $(-\eta)$ volte la parte (AC) positiva da A verso C (def. II), e perciò si ha:

$$(AC) \times (-\eta) \equiv -(AD) \qquad (3)$$

donde

$$-(AC) \times (\eta \equiv) (AC) \times (-\eta) \qquad (b, 9) \qquad (4)$$

Sostituendo ad (AC) il numero μ che rappresenta si ha:

$$\mu \times (-\eta) = -\mu \times \eta = -(\mu \times \eta) = -(\eta \times \mu), \text{ q. s. v. d.} \quad (5)$$

c. Il prodotto di due numeri negativi, è positivo ed è indipendente dall'ordine dei fattori.

Consideriamo il segmento (CA) di verso negativo da C verso A, e prendiamolo $-\eta$ volte; vuol dire che dobbiamo considerarlo η volte nel verso opposto ad esso (def. II), ossia nel verso positivo, e quindi il risultato è identico a quello che si ottiene prendendo il segmento (AC) a partire da A η volte nel verso positivo; si ha cioè:

$$(CA)\times(-\eta)\equiv-(AC)\times(-\eta)\equiv(AC)\times\eta\equiv(AD). \qquad (6)$$

Sostituendo ad (AC) il numero μ si ha: (6')

$$(-\mu)\times(-\eta)=\mu\times\eta=\eta\times\mu=(-\eta)\times(-\mu)$$

116. *Divisione.*

Def. I. L'operazione inversa della moltiplicazione colla quale dal prodotto di un segmento per un numero intero η ad es. $(AC)\times\eta\equiv(AD)$ si ottiene il numero η o il segmento (AC) si chiama *divisione*; ed il risultato nel primo caso corrisponde al *rapporto* di (AD) ad (AB) ed è la misura del rapporto $\frac{(AD)}{(AC)}$ (def. IV, 106), e nel secondo si chiama *quoziente.*

Nel secondo caso scriveremo:

$$(AC)\equiv(AD):\eta \qquad (1)$$

(AD) si chiama *dividendo*, η *divisore.*

Si ha:

$$\frac{(AD)}{\eta}\equiv(AD):\eta \qquad \text{((def. II, 79 e def. II, 92; } b\text{, 9).}$$

Sostituendo ad (AC) e (AD) se sono positivi i loro numeri corrispondenti, si ha da (1)

$$\mu=\mu\times\eta:\eta \qquad (2)$$

e quindi anche

$$\eta=\eta\times\mu:\mu \qquad (2')$$

Se (AC) e (AD) sono negativi, essi rappresentano i numeri negativi $-\mu$, $-(\mu\times\eta)$ e si ha da (1)

$$-\mu=-(\mu\times\eta):\eta;\quad -\eta=-(\eta\times\mu):\mu \qquad (3)$$

e analogamente

$$-\mu=-(\eta\times\mu):\eta;\quad -\eta=-(\mu\times\eta):\mu \qquad (3')$$

Da

$$\frac{(AD)}{(AC)}=\eta \qquad \text{((}AD\text{) e (}AC\text{) positivi)} \qquad (4)$$

si ha invece:

$$\eta=\frac{\mu\times\eta}{\mu} \qquad (5)$$

e analogamente

$$\eta=\frac{\eta\times\mu}{\eta} \qquad (5')$$

E se consideriamo (AC) e (AD) nel verso negativo, da (2) del n. 115 si ha:

$$\eta = \frac{-(\mu \times \eta)}{-\mu} \tag{6}$$

$$\eta = \frac{(\eta \times \mu)}{-\mu} \tag{6'}$$

Dalla (6) del n. 115 si ha:

$$(CA) \equiv (AD) : (-\eta) \tag{7}$$

da cui

$$-\eta = \frac{(AD)}{(CA)} \tag{7'}$$

e dalla (7), se (AC) e (AD) sono diretti nel verso positivo, si ha:

$$-\eta = (\mu \times \eta) : (-\mu) \tag{8}$$

ed anche

$$-\eta = (\eta \times \mu) : (-\mu) \tag{8'}$$

Se (AC) e (AD) sono diretti nel verso negativo si ha, scambiando μ con η:

$$\eta = -(\mu \times \eta) : (-\mu) \tag{9}$$

$$\eta = -(\eta \times \mu) : (-\mu) \tag{9'}$$

Così dalla (7') considerando (AD) e (AC) nel verso positivo

$$-\eta = \frac{\mu \times \eta}{-\mu} \tag{10}$$

$$-\eta = \frac{\eta \times \mu}{-\mu} \tag{10'}$$

Se sono diretti nel verso negativo

$$-\eta = \frac{-(\mu \times \eta)}{\mu} \tag{11}$$

$$-\eta = \frac{-(\eta \times \mu)}{\mu} \tag{11'}$$

Dalle formole (2') e (9'), (3) e (8') si ha:

a. Se nella divisione di due numeri interi si muta il segno al dividendo e al divisore il quoziente non muta di segno.

Dalle formole (2'), (9'), (3) e (8') si ha:

b. Se il dividendo e il divisore hanno lo stesso segno il quoziente è positivo; se sono di segno contrario il quoziente è negativo.

Dalle formole (2) e (5); (3) e (11'); (6') e (9); (8) e (10) si vede che pei numeri interi il segno : può esser sostituito dal segno — del rapporto, o in altre parole:

c. Il rapporto $\frac{(AC)}{(AD)}$ *corrisponde ad una divisione di due numeri se* (AC) *e* (AD) *rappresentano come qui si suppone, numeri interi e divisibili fra loro.*

§ 3.

Numeri frazionari e loro operazioni fondamentali.

117. *Oss. I.* Il simbolo $(AC)\frac{\mu}{\eta}$ significa che il segmento (AC) fu diviso in η parti uguali e si è formato il segmento (AB) che contiene μ delle η^{me} parti di (AC) (*b*, 99 opp. *d*, 103).

Def. I. Se (AC) è preso come unità, il segno $\frac{\mu}{\eta}$ indica il segmento (AB) nel verso di (AC), e siccome i numeri fin qui considerati indicano pure i segmenti della forma fondamentale a partire da A, così chiameremo i segni $\frac{\mu}{\eta}$ *numeri frazionari*, mentre gli altri delle classi (I) (II) li abbiamo chiamati numeri interi (def. V, 91).

μ si chiama *numeratore*, η *denominatore*.

E come abbiamo numeri interi positivi e negativi, così abbiamo numeri frazionari positivi e negativi secondo che i segmenti che essi rappresentano sono diretti nel verso positivo o nel verso negativo (def. I, 112).

Oss. II. Il numero $\frac{-\mu}{\eta}$ indica che si divide l'unità (AC) in η parti uguali e se ne prendono $(-\mu)$ (def. II, 115).

Il numero $\frac{\mu}{-\eta}$ significa che si divide (CA) in η parti uguali e si considerano μ di queste parti.

a. Il numero frazionario $\frac{\mu}{\eta}$ indica pure che l'unità fu presa μ volte e il risultato fu diviso in η parti uguali. (*f*, 99 opp. *b*, 104).

Oss. III. Limitandosi ad una sola unità basta considerare i soli numeri frazionari della forma $\frac{m}{n}$ ove m e n sono numeri della serie (I) (46).

b. Il numero frazionario $\frac{\mu}{\eta}$ se μ e η sono:

1°. *finiti o infiniti dello stesso ordine è finito*;

2°. *se μ è infinito di ordine μ_1 e η è finito (o d'ordine infinito o); oppure se η è infinito d'ordine η_1 $(\mu_1 < \eta_1)$ è infinito d'ordine $\mu_1 - \eta_1$*;

3°. *Se μ è finito e η infinito d'ordine η_1 oppure se μ è anche infinito d'ordine μ_1 $(\eta_1 > \mu_1)$, il numero $\frac{\mu}{\eta}$ è infinitesimo d'ordine $\eta_1 - \mu_1$* (*a*, 105).

Oss. IV. Come l'operazione del sottrarre un numero maggiore da un numero minore trova la sua *piena giustificazione* nella forma fondamentale (che è pure una forma astratta), così con l'aiuto di questa *giustifichiamo l'operazione di dividere un numero minore per un numero maggiore.*

L'uguaglianza e le leggi che regolano le operazioni fondamentali coi numeri frazionari devono derivare, se sono pienamente determinati, dalla loro definizione e non è permesso allora di stabilirle arbitrariamente.

c. Due numeri frazionari $\frac{\mu}{\eta}$, $\frac{\mu'}{\eta'}$ sono uguali se rappresentano lo stesso segmento della forma fondamentale o due segmenti identici.

Se si ha:

$$(AB) \equiv (AC)\frac{\mu}{\eta} \equiv (AC)\frac{\mu'}{\eta'} \qquad (1)$$

si ha tosto

$$\frac{\mu}{\eta} = \frac{\mu'}{\eta'} \qquad (2)$$

Difatti se $\frac{\mu}{\eta}$ e $\frac{\mu}{\eta'}$ indicassero operazioni diverse, eseguendole in forme identiche dovrebbero dar luogo a forme non identiche (a^{VII}, 60).

Pei numeri non abbiamo bisogno di considerare altra uguaglianza (oss. I, 9) useremo però lo stesso segno = adoperato pei numeri interi e scriveremo:

$$\frac{\mu}{\eta} = \frac{\mu'}{\eta'} \qquad (2')$$

d. Due numeri frazionari $\frac{\mu}{\eta}$ e $\frac{\mu'}{\eta'}$ *sono uguali se* $\mu\eta' = \mu'\eta$.

Difatti dalla (1) si ha:

$$\frac{(AC)}{\eta}\mu\eta' \equiv (AC)\mu' \qquad (b, b', d, 79 \text{ opp. } \dot{d}; d', 92)$$

e

$$(AC)\mu\eta' \equiv (AC)\mu'\eta$$

da cui

$$\mu\eta' = \mu'\eta. \qquad (c)$$ [1]

---

1) Stabilite le proprietà dell' uguaglianza (d, e, 8) e definito pienamente il numero frazionario, la condizione dell' uguaglianza di due numeri frazionari deve risultare dalla loro definizione. Vien detto anche, dopo aver premesse le suddette proprietà:

Nel caso che il numero naturale a non sia divisibile per un altro numero b, esista uno ed un solo nuovo oggetto, che sarà indicato col simbolo $a:b$ o $\frac{a}{b}$, e soddisfa all'equazione: $b.(a:b) = (a:b).\,b = a$

Poi, come seconda definizione: Due di questi oggetti $a:b$, $a'.\,b'$ *siano* uguali quando $a, b' = a'.\,b$.

Stabilire che $\frac{a}{b}$ e $\frac{a'}{b}$ *siano* uguali senz'altra considerazione quando $a\,b' = a'\,b$, significa che possono esserlo anche in altro modo, mentre, siccome i numeri interi si possono mettere sotto forma di numeri frazionari e formano con questi la classe di numeri razionali, bisognerebbe almeno far vedere che la condizione suddetta non contraddice a quella dell'uguaglianza dei numeri interi.

Se $\frac{a}{b}$, $\frac{a'}{b}$ si considerano come simboli di uno stesso ente, allora come $\frac{a}{b}$ o $a:b$ si possono sostituire nelle formole l' uno all' altro, si può trovare la condizione affinchè indichino lo stesso ente o siano uguali (b, 9).

Ponendo $\frac{a.b}{a} = \alpha$; (1) essendo α un numero intero o frazionario si ha:

$$\frac{a}{b}b' = \frac{ab'}{b} \qquad (2)$$

Difatti sostituendo in $\frac{ab'}{b}$ al posto di a il simbolo $\left(\frac{a}{b}\right)b$, si ha da (1)

$$\frac{\left(\frac{a}{b}\right)bb'}{b} = \frac{\left(\frac{a}{ab}\right)b'b}{b} = \frac{a}{b}b'$$

Se $\frac{a}{b} = \frac{a'}{b'}$, ossia se $\frac{a}{b}$, $\frac{a'}{b'}$ indicano lo stesso ente si ha:

$$\frac{a'}{b'}.\,b = a \quad \text{e perciò da (2)} \quad \frac{ba'}{b'} = a$$

e per la (1)

$$\frac{ba'}{b'}b' = ba' = ab'$$

dunque *se i due numeri* $\frac{a}{b}$, $\frac{a'}{b'}$ *indicano lo stesso ente*, ossia se *sono uguali si ha*: $b'a = ba'$ (3)

E inversamente se ha luogo la (3) i due nuovi numeri $\frac{a}{b}$, $\frac{a'}{b'}$ sono uguali. Difatti si ha da (3)

d'. Qualunque siano μ e η positivi o negativi si ha:

$$\frac{\mu}{\eta} = \frac{\mu\mu'}{\eta\mu'}$$

Difatti è verificato il teor. *e* (*b*, 52).

d''. I numeri $\frac{\mu}{\eta}$, $\frac{-\mu}{-\eta}$ *sono uguali.* (*b*, 115; *d*)

d'''. I numeri $\frac{-\mu}{\eta}$, $\frac{\mu}{-\eta}$ *sono uguali.* (*c*, 115; *d*)

Ind. I. I numeri $\frac{-\mu}{\eta}$, $\frac{\mu}{-\eta}$ li indicheremo anche col simbolo $-\frac{\mu}{\eta}$.

118. *Addizione e sottrazione.*

Oss. I. All'addizione o sottrazione di due parti di un segmento della forma fondamentale (72, 74) corrisponde l'addizione o la sottrazione dei due numeri frazionari che servono ad indicarli rispetto al segmento dato come unità. O in altre parole:

Def. I. Per addizione di due numeri frazionari intendiamo quell'operazione colla quale si deduce il numero che rappresenta la somma o la differenza dei segmenti dei due primi numeri.

Ind. I. La somma $(AD)\frac{\mu}{\eta} + (AD)\frac{\mu'}{\eta'}$ la indicheremo anche col simbolo $(AD)\left(\frac{\mu}{\eta} + \frac{\mu'}{\eta'}\right)$.

a. $(AD)\frac{\mu}{\eta} + (AD)\frac{\mu'}{\eta'} \equiv (AD)\left(\frac{\mu}{\eta} + \frac{\mu'}{\eta'}\right)$ (*b*, 9)

e $$\frac{\mu}{\eta} + \frac{\mu'}{\eta'} = \left(\frac{\mu}{\eta} + \frac{\mu'}{\eta'}\right) \quad (c,\ 117)$$

b. Per sommare o sottrarre due numeri frazionari collo stesso denominatore basta sommare o sottrarre i numeratori e dare al risultato per denominatore il denominatore comune.

$$b'a = \frac{ba'}{b'}b' \text{ ossia anche } ab' = \frac{ba'}{b'}b' \text{ cioè } a = \frac{ba'}{b'}$$

ovvero da (2) $$a = \frac{a'}{b'}b$$

o ancora $$\frac{a}{b} = \frac{a'}{b'}$$

Se invece $\frac{a}{b}$ indica un oggetto, ed è questo oggetto che si chiama numero frazionario, mentre $\frac{a}{b}$ é un segno di questo oggetto, allora si può definire questo oggetto coll'equazione $\frac{a}{b} \cdot c = \frac{ac}{b}$ (4)

L'operazione c è a senso unico e si eseguisce in un solo modo (4) e quindi se $\frac{a}{b}$, $\frac{a'}{b'}$ sono oggeti diversi ma uguali è come se $\frac{a'}{b'}$ fosse $\frac{a}{b}$ (oss III. 9), e l'operazione c applicata all'oggetto $\frac{a'}{b'}$ in questo caso dà un risultato uguale al primo (a''', 60), vale a dire $\frac{a}{b} \cdot c = \frac{a'}{b'}c$. E se $\frac{a}{b}$ $\frac{a'}{b}$ non sono uguali, $\frac{a}{b}c$, $\frac{a'}{b'}c$ non sono uguali (a IV, 60).

La stessa proprietà ha l'operazione inversa, e quindi da $\frac{a}{b}c = \frac{a'}{b'}c$ si ha: $\frac{a}{b} = \frac{a'}{b'}$ (5). Perciò come precedentemente si dimostra che se $\frac{a}{b}, = \frac{a'}{b'}$ si ha $ab' = a'b$, e inversamente.

Le proprietà (3) e (5) valgono anche pei segmenti (d, d', 79) senza per questo che essi possano sostituirsi sempre uno all'altro quando sono uguali.

Supponiamo ad es. di avere i due segmenti (AB) e (BC) dello stesso verso tali che:

$$(AB) \equiv (AD)\ \frac{\mu}{\eta} \qquad (BC) \equiv (AD)\ \frac{\mu'}{\eta}$$

In tal caso $(AB)+(BC) \equiv (AC)$ contiene $\mu+\mu'$ parti η^{me} del segmento (AD), quindi

$$(AD)\ \frac{\mu}{\eta} + (AD)\ \frac{\mu'}{\eta} \equiv (AC) \equiv (AD) \frac{\mu+\mu'}{\eta}$$

Dunque:

$$\frac{\mu}{\eta} + \frac{\mu'}{\eta} = \frac{\mu+\mu'}{\eta} \qquad (c,\ 117) \qquad (1)$$

Se invece (BC) è di verso opposto ad (AB) si ha per la stessa ragione (def. II, 77).

$$\frac{\mu}{\eta} - \frac{\mu'}{\eta} = \frac{\mu}{\eta} + \left(-\frac{\mu'}{\eta}\right) = \frac{\mu-\mu'}{\eta} \qquad (2)$$

Oss. II. Per sommare o sottrarre due numeri frazionari con differente denominatore basta moltiplicare numeratore e denominatore di ciascuno di essi pel denominatore dell'altro, senza alterare i numeri stessi *(d*. 117), e applicare la regola suddetta.

c. Per l'addizione e la sottrazione dei numeri frazionari vale la legge commutativa e associativa.

Difatti si ha sempre qualunque sia il verso di (AB) e di (AC),

$$(AB)+(BC) \equiv (BC)+(AB) \qquad (e,\ 99 \text{ o } a,\ 104).$$

Come pure vale la legge associativa qualunque sia il verso in cui vengono percorsi i segmenti (*d*, 77).

119. *Moltiplicazione.*

Def. I. Se si ha il segmento $(AB)\frac{\mu}{\eta} \equiv (AD)$ diremo che (AD) è il risultato della *moltiplicazione* di (AB) pel numero frazionario $\frac{\mu}{\eta}$.

E per *moltiplicazione* di un numero intero o frazionario per un numero intero o frazionario intendiamo l'operazione colla quale si deduce il numero corrispondente al prodotto del segmento, rappresentante il primo numero, per il secondo.

a. Per moltiplicare un numero frazionario per un numero intero, o viceversa, si moltiplica il numeratore per il numero intero, e si dà al risultato per denominatore quello del numero frazionario. Vale in tal caso la regola dei segni che vale per la moltiplicazione dei numeri interi.

Se il segmento positivo (AB) viene ripetuto μ' volte nel suo medesimo verso si ha:

$$(AB) \times \mu' \equiv (AD) \qquad \text{(def. I, 79 o 92 e def. I, 115).}$$

e se (AB) contiene μ parti η^{me} dell'unità (AC) si ha:

$$(AB) \equiv (AC)\ \frac{\mu}{\eta} \equiv \frac{(AC)\mu}{\eta} \qquad (f,\ 99 \text{ o } b,\ 104)$$

e quindi

$$(AD) \equiv \frac{(AC)\mu}{\eta}\ \mu' \equiv \frac{(AC)\mu\mu'}{\eta} \qquad (f,\ 99 \text{ o } b,\ 104).$$

dunque il segmento (AD) contiene $\mu\mu'$ di queste parti, e si ha perciò:

$$\frac{\mu}{\eta} \times \mu' = \frac{\mu\mu'}{\eta} \qquad (c, 117) \qquad (1)$$

Trattando della moltiplicazione di un segmento per un numero intero abbiamo già spiegato il significato delle relazioni

$$-(AB) \times \mu' \equiv -(AD)$$
$$(AB) \times -\mu' \equiv -(AD) \qquad ((2), (3), (6), 115) \quad (2)$$
$$-(AB) \times -\mu' \equiv (AD)$$

quindi si ha:

$$-\frac{\mu}{\eta} \times \mu' = -\frac{\mu\mu'}{\eta} \qquad (3)$$
$$\frac{\mu}{\eta} \times -\mu' = -\frac{\mu\mu'}{\eta} \qquad (4)$$
$$-\frac{\mu}{\eta} \times -\mu' = \frac{\mu\mu'}{\eta} \qquad (5)$$

Da

$$(AB)\frac{\mu}{\eta} \equiv \frac{(AB)\mu}{\eta}$$

se (AB) contiene μ' unità, si ha:

$$\mu' \frac{\mu}{\eta} = \frac{\mu'\mu}{\eta} \qquad (6)$$

e quindi

$$\mu' \frac{\mu}{\eta} = \frac{\mu}{\eta} \mu' \qquad (7)$$

b. Il prodotto di un numero frazionario per un altro numero frazionario è un numero frazionario il cui numeratore è il prodotto dei due numeratori e il denominatore è il prodotto dei due denominatori.

Supponiamo che (AB) contenga μ' parti η'^{me} dell'unità (AC), ossia che sia rappresentato dal numero $\frac{\mu'}{\eta'}$ (def. I, 117). Se si ripete questo segmento μ volte si ha un segmento (AD) che contiene $\mu\mu'$ parti η'^{me} dell'unità, e che rappresenta il numero $\frac{\mu\mu'}{\eta'}$ (a). Se dividiamo tutto il segmento (AD) in η parti uguali, ciascuna di queste contiene $\mu\mu'$ parti $\eta\eta'^{me}$ dell'unità.

Difatti $(AD) \equiv \frac{(AC)\mu'\mu}{\eta'}$ essendo (AC) l'unità (a) e quindi

$$\frac{(AD)}{\eta} \equiv \frac{(AC)\mu'\mu}{\eta'} \frac{1}{\eta} \equiv \frac{(AC)\mu'\mu}{\eta'\eta} \qquad (a, 79 \text{ o } c, 92).$$

Ma si ha

$$(AD) \equiv (AB) \times \mu, \quad \frac{(AD)}{\eta} \equiv (AB) \times \frac{\mu}{\eta} \qquad (f, 99 \text{ o } b, 104):$$

dunque

$$\frac{\mu'}{\eta'} \times \frac{\mu}{\eta} = \frac{\mu'\mu}{\eta'\eta} = \frac{\mu\mu'}{\eta\eta'} = \frac{\mu}{\eta} \times \frac{\mu'}{\eta'} = \frac{\mu'}{\eta'\eta} \times \mu = \frac{\mu}{\eta\eta'} \times \mu' \quad (c, 117) \quad (8)$$

Le regole dei segni date da (3), (4), (5) si estendono anche a questi casi, e si ha:

c. Il prodotto di due numeri frazionari è positivo o negativo secondo che i due numeri sono dello stesso segno o di segno contrario.

d. Per la moltiplicazione di un numero intero con un numero frazionario o di due numeri frazionari vale la legge commutativa.

Ciò risulta dalle formole (7) e (8) stesse.

e. Per la moltiplicazione dei numeri frazionari vale la legge associativa.

Si ha infatti:

$$\left((AB)\frac{\mu'}{\eta'}\right)\frac{\mu''}{\eta''}\equiv\frac{(AB)\mu'}{\eta'}\times\frac{\mu''}{\eta''}\equiv\frac{(AB)\mu'\mu''}{\eta'\eta''}\equiv(AB)\frac{\mu'\mu''}{\eta'\eta''}$$

$$\equiv(AB)\left(\frac{\mu'}{\eta'}\times\frac{\mu''}{\eta''}\right)\qquad (f, 99 \text{ e } a, 79 \text{ o } b, 104 \text{ e } c, 92).$$

f. Per la moltiplicazione dei numeri frazionari vale la legge distributiva.

Cioè

$$[(AB)+(BC)]\frac{\mu}{\eta}\equiv(AB)\frac{\mu}{\eta}+(BC)\frac{\mu}{\eta}$$

Si ha $(AB)+(BC)\equiv(AC)$. Se dividiamo (AB) e (BC) in η parti uguali e se portiamo dopo la prima parte di (AB) la prima di (BC), il che si può fare per la legge commutativa della somma di più segmenti (*e*, 99 o *a*, 104) si ottengono così le η parti uguali di (AC), e si ha dunque:

$$\frac{(AB)}{\eta}+\frac{(BC)}{\eta}\equiv\frac{(AC)}{\eta}\qquad(9)$$

Ma

$$[(AB)+(BC)]\mu\equiv(AC)\mu\equiv(AB)\mu+(BC)\mu\qquad(e, 99 \text{ o } a, 104)$$

dunque ponendo

$$(AB)\mu\equiv(AB_1),\quad (BC)\mu\equiv(B_1C_1),\quad (AC_1)\equiv(AC)\mu$$

si ha:

$$(AB_1)+(B_1C_1)\equiv(AC_1)$$

da cui per la (9)

$$\frac{(AB_1)}{\eta}+\frac{(B_1C_1)}{\eta}\equiv\frac{(AC_1)}{\eta}$$

e poichè

$$\frac{(AB)\mu}{\eta}\equiv(AB)\frac{\mu}{\eta}\qquad(f, 99 \text{ o } b, 104)$$

sostituendo nella precedente uguaglianza abbiamo:

$$(AB)\frac{\mu}{\eta}+(BC)\frac{\mu}{\eta}\equiv(AC)\frac{\mu}{\eta}\equiv[(AB)+(BC)]\frac{\mu}{\eta}.$$

Se (AB) e (BC) rappresentano rispetto all'unità i numeri $\frac{\mu'}{\eta'}$, $\frac{\mu''}{\eta''}$ si ha:

$$\left(\frac{\mu'}{\eta'}+\frac{\mu''}{\eta''}\right)\frac{\mu}{\eta}=\frac{\mu'\mu}{\eta'\eta}+\frac{\mu''\mu}{\eta''\eta}\qquad(c, 117)$$

120. *Divisione.*

Def. I. La divisione di un segmento per un numero frazionario è l'operazione colla quale dal prodotto $(AB)\frac{\mu}{\eta} \equiv (AD)$ (def. I, 119), dato (AD) si determina (AB). E si scrive $(AB) \equiv (AD) : \frac{\mu}{\eta}$.

La divisione di un numero intero o frazionario per un numero intero o frazionario è l'operazione colla quale si ha il numero corrispondente al segmento che si ottiene dal segmento che rappresenta il primo numero diviso per il secondo.

a. Se $(AB)\frac{\mu}{\eta} \equiv (AD)$ *qualunque siano* (AD) *e* $\frac{\mu}{\eta}$, *si ha:* $(AB) \equiv (AD)\frac{\eta}{\mu}$

Difatti

$$(AB)\frac{\mu}{\eta} \equiv \frac{(AB)\mu}{\eta} \qquad (f, 99 \text{ opp. } b, 104)$$

$$(AB)\frac{\mu}{\eta}\eta \equiv \frac{(AB)\mu}{\eta}\eta \equiv (AB)\mu\frac{\eta}{\eta} \equiv (AB)\mu \qquad (b \text{ e } b' \text{ 79 opp. } d \text{ e } d' \text{ 92})$$

e quindi

$$(AB)\frac{\mu}{\eta}\,\frac{\eta}{\mu} \equiv (AB) \qquad (b', 79 \text{ o } d', 92)$$

dunque

$$(AB) \equiv (AD)\frac{\eta}{\mu}.$$

b. Per dividere un numero intero per un numero frazionario, o un numero frazionario per un numero intero, si moltiplica il numero intero pel denominatore del numero frazionario, dando al risultato per denominatore il numeratore della frazione; oppure si forma un nuovo numero frazionario il cui numeratore è quello del numero frazionario dato, e il cui denominatore è il prodotto del denominatore del numero frazionario dato pel numero intero.

Si ha infatti:

$$(AB) \equiv (AD) : \frac{\mu}{\eta} \equiv \frac{(AD)\eta}{\mu} \qquad (a) \qquad (1)$$

Se (AB) rappresenta μ' unità si ha:

$$\mu' : \frac{\mu}{\eta} = \frac{\mu'\eta}{\mu}.$$

Se è

$$(AB)\mu \equiv (AD)$$

si ha:

$$(AB) \equiv \frac{(AD)}{\mu} \equiv (AD) : \mu. \qquad (\text{def. I, } 116) \qquad (2)$$

e se

$$(AD) \equiv (AC)\frac{\mu'}{\eta'}$$

si ha:

$$(AB) \equiv (AC)\frac{\mu'}{\eta'} \cdot \frac{1}{\mu} \qquad (a, 79 \text{ o } c, 92)$$

$$\equiv \frac{(AC)\mu'}{\eta'\mu} \qquad (c, 79 \text{ e } f, 99; \text{ opp. } e, 92 \text{ e } b, 104)$$

e se (AC) è l'unità si ha da (2)

$$\frac{\mu'}{\eta'} : \mu = \frac{\mu'}{\eta'\mu} \qquad (c. 117)$$

c. Per dividere un numero frazionario per un altro si moltiplica il numeratore del primo pel denominatore del secondo e al risultato si dà per denominatore il prodotto del denominatore del primo pel numeratore del secondo.

Difatti se in (1) (AD) rappresenta il numero $\frac{\mu'}{\eta'}$, si ha:

$$\frac{\mu'}{\eta'} : \frac{\mu}{\eta} = \frac{\mu'}{\eta'} \cdot \frac{\eta}{\mu} = \frac{\mu'\eta}{\eta'\mu} \qquad (c,\ 117 \text{ e } b,\ 119).$$

Inoltre, per le relazioni:

$$(AB) : -\mu = -(AD)$$
$$-(AB) : \mu = -(AD)$$
$$-(AB) : -\mu = (AD) \quad ((2),\ (3),\ (6) \text{ n. } 115 \text{ e def. I, } 116)$$

le quali si estendono anche al caso in cui μ è un numero frazionario, si ha:

d. Il quoziente della divisione di un numero intero per un numero frazionario o viceversa; o di un numero frazionario per un altro frazionario è positivo o negativo secondo che il dividendo e il divisore hanno lo stesso segno o sono di segno contrario.

§ 4.

Numeri reali, razionali e irrazionali, assoluti e relativi.

121. *a. Due segmenti commensurabili di 1ª specie fra loro sono esprimibili per mezzo di un numero frazionario.*

Difatti uno di essi è multiplo dell'altro o di un summultiplo dell'altro (def. I, 105).

Oss. I. I numeri razionali assoluti di 2ª specie esprimono fra loro i segmenti commensurabili di 2ª specie, e quelli che esprimono i segmenti incommensurabili sono irrazionali assoluti (def II, 105).

Riferendosi ad una sola unità relatica mancano i numeri razionali di 2ª specie (oss. II, 105).

Def. I. Tutti i numeri *razionali* e *irrazionali* si chiamano *reali, assoluti* se si considerano in senso assoluto, *relativi* se si considerano nel campo di una sola unità.

b. Secondo che si considera la forma fondamentale come continuo relativo ad un'unità o assoluto, si hanno numeri di natura diversa. Nel primo caso tutti i numeri reali sono finiti, nel secondo invece ve ne sono anche d'infiniti e infinitesimi e di un ordine qualunque dato rispetto ad uno qualunque di essi come unità [1]).

1) Siccome abbiamo considerato la sola classe (II) dei nostri numeri interi infiniti che è della seconda potenza (nota 4, 93) potremo quindi ripetere rispetto alla forma fondamentale così ottenuta le ipotesi III, IV ecc. (oss. IV, 92). Verremmo così a costruire delle nuove forme fondamentali che conterrebbero le antecedenti e delle nuove classi di numeri reali. E proseguendo così indefinitamente avremo una forma fondamentale veramente assoluta. Sia perchè nei fondamenti della geometria facciamo uso soltanto dei principii sui segmenti infiniti e infinitesimi, sia per non introdurre nuove difficoltà in concetti per sè stessi semplici ma comunemente fraintesi (vedi pref.), ci siamo limitati alla classe (II) di numeri infiniti, come potevamo limitarci al gruppo di segmenti finiti, infiniti e infinitesimi di ordine finito (vedi nota 1, 105).

Ciò risulta immediatamente dalle definizioni e dalle proprietà dei segmenti che rappresentano i numeri stessi (def. II, 82).

Def. II. Diremo che i numeri reali in senso assoluto o relativo compresi fra due numeri α e β costituiscono l'*intervallo di numeri* $(\alpha..\beta)$.

c. I numeri reali assoluti o relativi compresi nell' intervallo (o.. 1) si possono far corrispondere univocamente e nello stesso ordine agli elementi di un segmento qualunque (AB) in senso assoluto o relativo.

Perchè per unità di misura si può considerare nel primo caso un segmento finito assoluto (def. V, 92) e nel secondo ogni segmento finito relativo. (def. (II, 82). Ciò deriva pure dalla corrispondenza di proporzionalità (def. I e *d*, 106).

c'. I numeri reali compresi nell' intervallo $(\alpha... \beta)$ *si possono far corrispondere univocamente e nello stesso ordine ai numeri reali dell' intervallo* (*o* ..... 1) (*c*; *f*, 42).

c''. Tutti i numeri reali si possono far corrispondere univocamente e nel medesimo ordine a tutti gli elementi del continuo a partire da un dato elemento come origine fondamentale.

Ciò deriva dalla def. stessa dei numeri reali (def. I e def. II, 105 e def. III, 42).

Def. III. In conformità a *c''* diremo perciò che tutti i numeri reali, ordinati in modo che ogni numero minore precede ogni altro numero maggiore di esso, costituiscono il *continuo numerico assoluto o relativo.*

Oss. II. L' uguaglianza e disuguaglianza dei numeri razionali di 2ª specie o irrazionali è data dall' uguaglianza dei segmenti che rappresentano rispetto ad un dato segmento come unità, siccome essi servono a rappresentare questi segmenti, e perciò nelle relazioni numeriche che rappresentano relazioni fra segmenti possono sostituirsi uno all' altro.

Anche qui dunque l' uguaglianza è data dalla natura stessa degli enti che i numeri razionali di 2ª specie e irrazionali, come gli altri numeri interi e frazionari, rappresentano; e non ha nulla di arbitrario, come non ne deve avere se i numeri sono in sè pienamente determinati [1].

---

1) Vedi la nota n. 9 e le note: 2, 48; 1, 106 e 117. Quanto abbiamo detto pei numeri frazionari va detto pei numeri irrazionali sia relativi che assoluti.

Ad es. la serie (a_n) di *Cantor* (Acta Math. Vol. 2 ecc.) determina un nuovo ente, che viene indicato da questa serie. Si dice che $(a_n) = (a'_n)$ quando

$$\lim_{n=\infty} (a_n - a'_n) = o$$

Il si *dice* indica sempre una certa arbitrarietà, invece i due numeri *sono* uguali quando ha luogo la suddetta relazione in senso relativo pel teor. d', 97, che vale anche nel caso che la serie di segmenti (a_n) non sia sempre crescente o decrescente (oss. II).

E poichè in questa definizione del numero (a_n) (come in quelle di *Weierstrass* e di *Dedekind*) i numeri della serie sono razionali finiti, la definizione dell' uguaglianza di due numeri esclude il numero infinitesimo. Vedi più avanti.

La definizione poi che una serie siffatta (a_n), o *Schnitt* $(A_1 A_2)$ secondo Dedekind (Stetigkeit und. Irr. Zahlen pag. 21), determina un numero, poichè questo evidentemente non è un numero della serie stessa, equivale all' ipotesi del limite della serie quando n cresce indefinitamente (oss. V, 99).

Il prof. *Pincherle* (l. c.) fa appunto vedere come gli ordini d'infinito di due funzioni, ossia secondo il Du Bois Reymond dei loro modi di andare all' infinito, possano essere uguali rispetto ad una definizione, disuguali rispetto ad un' altra. Ad ogni modo nella definizione di uguaglianza, la quale serve in tal caso a completare la definizione stessa dei nuovi enti che si considerano, bisogna dimostrare che sono soddisfatte le relazioni che da $A = B$ segue $B = A$, da $A = B$, $B = C$ segue $A = C$; e per la disuguaglianza

$$
\begin{array}{llcl}
A = B & B < C & \text{segue} & A < C \\
A = B & B < C & \text{»} & A < C \\
A < B & B > C & \text{»} & A > C \\
A < B & B < C & \text{»} & A < C
\end{array}
$$

Siccome si è visto (h', 99 opp. e', 104) che parecchi simboli numerici o numeri possono rappresentare lo stesso segmento rispetto all' unità di misura ossia lo stesso elemento a partire da una data origine, così tutti questi numeri *sono* uguali (b, 9).

Se disponiamo i numeri reali positivi e negativi in serie, a partire da o considerando un solo numero fra tutti quelli che sono uguali ad esso come ad es. è avvenuto nella serie (I) dei numeri naturali (I) (46 e 47) o anche della serie (II) (91) dei nostri numeri finiti o infiniti, e se consideriamo due numeri uguali ad uno dei numeri della serie suddetta, essi rappresentano lo stesso numero (b, 47).

Tutti i simboli che a partire da un dato elemento A della forma fondamentale rappresentano un elemento B rispetto ad un'unità (AA_1) rappresentano anche il rapporto $\frac{(AB)}{(AA_1)}$ (def. IV e V, 106); come i numeri (cifre) di (I) (47) rappresentano i numeri dei gruppi naturali (def. II, 45 e def. II. 46).

Def. IV. In conformità all'oss. II chiameremo *numero* anche il rapporto.

Vedi anche *Stolz*, l. c. Vol 1 pag. 2 e 3 e ad es. Abschnitt VI e la fine del IX. Ma data in questo caso una definizione di uguaglianza bisognerebbe dimostrare che se ne possono dare delle altre, perchè altrimenti la proprietà espressa in questa definizione deve derivare dalla definizione dell' ente stesso.

Ma anche così questo metodo è sempre indiretto, ed è sempre preferibile logicamente di stabilire le condizioni di uguaglianza di nuovi enti dopo di averli pienamente definiti.

A complemento delle note 3,90 e 3,97 osserviamo quanto segue rispetto all'ass. V d' *Archimede* (nota I, 81).

Dati i numeri razionali ad es. positivi soltanto, che come si sa soddisfano all'assioma suddetto, facendoli corrispondere ai segmenti di un sistema omogeneo a partire da un dato elemento come origine in un dato verso del sistema e rispetto ad un' unità (AA_1) (def. I, 80); data la definizione di di segmenti finiti, infinitesimi e infiniti (def. II 82 opp. mediante le condizioni dei teor. b e c, 81), si dimostra che ogni segmento finito più piccolo di ogni segmento razionale dato soddisfa rispetto a questo alla condizione del teor. c', 81. (Vedi la nota citata dell'*A.* Il continuo rettilineo ecc. teor. m, pag. 13). Si dimostra poi che vi è sempre un segmento razionale più piccolo di ogni segmento finito dato ricorrendo alla dimostrazione del teor. d, 99 (o nella nota citata e, pag. 11) la quale è indipendente dall'ipotesi VI (opp. nella nota citata dal princ. IV), ammettendo pei segmenti razionali la divisibilità in un numero intero n qualunque dato di parti uguali. E poi con una dimostrazione analoga a quella del teor. b, 97 si vede che se uno *Schnitt* (A_1A_2) ai numeri (segmenti) razionali tale che se A_1 non ha un numero razionale massimo, nè A_2 un numero razionale minimo, la differenza di due numeri a_1 e a_2 di A_1 e A_2 non può essere sempre maggiore di un numero (segmento) finito dato. Che quindi se (A_1A_2) fosse determinato da due numeri α e α' la differenza di α, α' (o il segmento dato dai secondi estremi dei segmenti α e α') dovrebbe essere infinitesimo. E inversamente si vede che se nel sistema omogeneo vi è un segmento (numero) infinitesimo ε, e se α è un segmento compreso fra quelli di A_1 e di A_2, tale proprietà ha pure il segmento $\alpha + \varepsilon$ (b', 69). Dunque se si stabilisce, come fa Dedekind (l. c. pag. 21), che lo *Schnitt* (A_1A_2) nelle condizioni suddette sia determinato da uno ed un solo numero α irrazionale, si esclude il numero o il segmento infinitesimo, vale a dire si ammette l' ass. V d'Archimede fra tutti i numeri reali.

Se invece si considera il postulato di Dedekind nella forma da lui data a pag. 18 del suo opuscolo citato, secondo la quale quando i punti di un segmento rettilineo (AB) si separano in due gruppi (X) e (X') tali che per ciascuna coppia di elementi X e X' si ha $(AX) < (AX')$, vi è uno ed un solo punto Y di due segmenti (AY) e (YB) tali che (AY) contiene tutti i punti X e (YB) tutti i punti X', e che perciò Y appartiene all' uno o all'altro dei gruppi (X) e (X'); il postulato esclude anche in questo caso direttamente l'infinitesimo e l'infinito (def. I, 68 e def. II, 82). Basta veramente che vi sia un punto Y perchè ve ne sia uno solo. (Vedi anche De Paolis — Teoria dei gruppi ecc. pag. 12).

Difatti se esiste un segmento infinitesimo (AA'), il che si può ammettere senza bisogno del postulato suddetto nel sistema omogeneo, e (AB) è un segmento finito, si ha sempre $(AB) > (AA')\, n$, qualunque sia il numero intero n della serie (I) (47 e c, 81). Ora, si vede facilmente che se si separano gli elementi compresi nel segmento (AB) in due gruppi tali che ogni elemento del primo gruppo sia compreso nei segmenti dati da $(AA')\, n$ (vale a dire nel campo della scala di unità (AA')) e ogni altro elemento di (AB) appartenga al secondo gruppo, si vede che il secondo gruppo non ha un primo elemento (b', 69), come non ha un ultimo elemento il primo gruppo, e che perciò non vi può essere nessun elemento assogettato alla def. I, 68 determinato dai due gruppi. Dunque col postulato suddetto si esclude, se esiste (AA'), il segmento (AB), e viceversa; ossia nel primo caso si esclude il segmento infinito limitato i cui estremi soddisfano alla def. I, 68 e nel secondo caso si esclude l'infinitesimo. — Vale a dire si ammette in ogni caso la condizione del teor. b, 81, ossia l'assioma d'Archimede.

Possiamo dunque dire che tutti i simboli che rappresentano lo stesso elemento rappresentano anche lo *stesso numero*, senza che per questo il numero sia l'elemento dato della forma fondamentale (oss. II).

Oss. III. Fra il rapporto come numero e il simbolo (numero) che lo rappresenta vi è dunque la stessa distinzione che vi è fra il numero del gruppo (def. II, 45) e il segno che lo indica. Il numero, anche razionale o irrazionale assoluto, è reso così indipendente dalla forma del simbolo che lo rappresenta. Ed abbiamo quindi:

d. Ogni numero reale positivo può essere rappresentato col simbolo:

$$Z=\left(\frac{\alpha_1^{(0)}}{p}+\frac{\alpha_2^{(0)}}{p}+\dots\frac{\alpha_n^{(0)}}{p^n}\right)\pm\frac{m}{\infty_1}\left(\frac{\alpha_1^{(1)}}{p}++\dots\dots+\frac{\alpha_{n_1}^{(1)}}{p^{n_1}}-\right)+\dots$$

$$\pm\frac{m_r}{\infty_1^r}\left(\frac{\alpha_1^{(r)}}{p}+\dots+\frac{\alpha_{nr}^{(r)}}{p^{n_r}}+\right)\pm\dots\pm\frac{m_{\infty_1-r_1}}{\infty_1^{\infty_1-r_1}}\left(\frac{\alpha_1^{(\infty_1-r_1)}}{\infty_1^{\infty_1-r_1}}+\dots+\frac{\alpha_{n_{\infty_1-r_1}}^{(\infty_1-r_1)}}{p^{n_{\infty_1-r_1}}}\right)$$

$$\dots\pm\quad\frac{m_\mu}{\infty_1^\mu}\left(\frac{\alpha_1^{(\mu)}}{p}+\dots\dots+\frac{\alpha_{n_\mu}^{(\mu)}}{p^{n_\mu}}\right)$$

ove p è un numero finito intero positivo qualunque, le α sono uguali a o, 1, 2... $p-1$; *le n e le r ecc. sono numeri interi positivi finiti dati, oppure infiniti ($n = \infty$), e μ è dato o infinito in senso assoluto ($\mu=\Omega$). Ovvero col simbolo:*

$$Z=\left(\frac{\alpha_1^{(0)}}{\eta}+\frac{\alpha_2^{(0)}}{\eta^2}+\dots+\frac{\alpha_n^{(0)}}{\eta^n}+\dots\dots\right)$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

$$\pm\frac{m_1}{\infty_1^{\sigma\infty_1-r_1}}\left(\frac{\alpha_1^{(1)}}{\eta}+\dots\dots+\frac{\alpha_{n_1}^{(1)}}{\eta^{n_1}}+\dots\right)$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

$$\pm\frac{m_2}{\infty_1^{\sigma 2\infty_1-r_2}}\left(\frac{\alpha_1^{(2)}}{\eta}+\dots\dots+\frac{\alpha_{n_2}^{(2)}}{\eta^{n_2}}+\dots\right)$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

$$\pm\frac{m_s}{\infty_1^{\sigma s\infty_1-r_s}}\left(\frac{\alpha_1^{(s)}}{\eta}+\dots\dots+\frac{\alpha_{n_s}}{\eta^{n_s}}+\dots\right)$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

$$\pm\frac{m_\mu}{\infty_1^{\sigma\infty_1\mu-r(\mu)}}\cdot\left(\frac{\alpha_1^{(\mu)}}{\eta}+\dots\dots+\frac{\alpha_{n_\mu}}{\eta^{n_\mu}}+\dots\right)$$

ove η è dell'ordine σ, le α possono essere numeri interi da o a η e tutti i numeri ottenuti colla divisione ad es. per metà di ∞_1^σ, $\infty_1^{\sigma-1}$ ecc., le n e s sono numeri positivi interi finiti dati o infiniti ($n=\infty$) e le r sono numeri finiti e μ è un numero dato, nel qual caso il numero è razionale di 2ª specie, oppure μ è un numero infinito in senso assoluto ($\mu=\Omega$) (*d*, 104).

d'. Se si tratta dei numeri reali relativi si ha soltanto il simbolo:

$$Z' = \left(\frac{\alpha_1^{(0)}}{p} + \frac{\alpha_2^{(0)}}{p} + \dots + \frac{\alpha_n^{(0)}}{p^n}\right)$$

e se si tratta dei numeri reali finiti e infiniti e infinitesimi di ordine finito, si ha:

$$Z'' = \left(\frac{\alpha_1^{(0)}}{p} + \frac{\alpha_2^{(0)}}{p} + \dots + \frac{\alpha_n^{(0)}}{p^n}\right) \pm \frac{m_1}{\infty_1}\left(\frac{\alpha_1^{(1)}}{p} + \dots + \frac{\alpha_n^{(1)}}{p^{n_1}}\right) \pm \dots$$

$$\dots \pm \frac{m_r}{\infty_1^r}\left(\frac{\alpha_1^{(r)}}{p} + \dots + \frac{\alpha_{n_r}^{(r)}}{p^{n_r}}\right)$$

ove r è finito o infinito ($r = \infty$).

Opp.

$$Z''_1 = \left(\frac{\alpha_1^{0}}{\eta} + \frac{\alpha_2^{(0)}}{\eta^2} + \dots + \frac{\alpha_n^{(0)}}{\eta^n}\right)$$

ove η è un numero infinito d'ordine finito, n è finito dato o infinito ($n = \infty$).

Es. Se consideriamo l'infinitesimo $\frac{1}{\infty_1 - m}$ esso è finito rispetto all'infinitesimo $\frac{1}{\infty_1}$ perchè ∞_1 e $\infty_1 - m$ sono infiniti di 1° ordine (def. II, 88). Una serie che dà luogo a questo numero mediante le unità $\frac{1}{\infty_1}, \frac{1}{\infty_1^2}, \dots, \frac{1}{\infty_1^\mu}$ è la seguente:

$$\left(\frac{1}{\infty_1} + \frac{m}{\infty_1^2} + \dots + \frac{m^n}{\infty_1^{n+1}} + \dots\right) + \left(\frac{m^{n-1}}{\infty_1^{\infty_1 - n}} + \frac{m^n}{\infty_1^{\infty_1 - n + 1}} + \dots + \frac{m^{2n+1}}{\infty_1^{\infty_1}} + \dots\right) +$$

$$\dots + \left(\frac{m^{n-1}}{\infty_1^{\mu - n}} + \frac{m^n}{\infty_1^{\mu - n + 1}} + \dots + \frac{m^{n + m_1 + 1}}{\infty_1^{\mu - n + m_1}} + \dots + \right)$$

$$\mu = \Omega$$

Se ci arrestiamo ad es. al termine $\frac{m^{2n+1}}{\infty_1^\mu}$ si ha:

$$\left[\left(\frac{1}{\infty_1} + \frac{m}{\infty_1^2} + \dots + \frac{m^n}{\infty_1^{n+1}} + \dots\right) + \left(\frac{m^{n-1}}{\infty_1^{\infty_1 - n}} + \frac{m^n}{\infty_1^{\infty_1 - n + 1}} + \dots + \frac{m^{2n+1}}{\infty_1^{\infty_1}} + \dots\right)\right.$$

$$\left. + \left(\frac{m^{n-1}}{\infty_1^{\mu - n}} + \dots + \frac{m^{2n+1}}{\infty_1^\mu}\right)\right](\infty_1 - m) = 1 - \frac{m^{2n+2}}{\infty_1^\mu} < 1$$

Mentre si ha:

$$\left[\left(\frac{1}{\infty_1} + \frac{m}{\infty_1^2} + \dots + \frac{m^n}{\infty_1^{n+1}} + \dots\right) + \left(\frac{m^{n-1}}{\infty_1^{\infty_1 - n}} + \frac{m^n}{\infty_1^{\infty_1 - n + 1}} + \dots + \frac{m^{2n-1}}{\infty_1^{\infty_1}} + \dots\right)\right.$$

$$\cdots+\left(\frac{m^{n-1}}{\infty_1^{\mu-n}}+,\ldots+\frac{m^{2n+1}}{\infty_1^{\mu}}+\frac{1}{2^n\infty_1^{\mu}}\right)\Big](\infty_1-m)=$$

$$=1+\frac{1}{2^n\infty_1^{\mu-1}}-\frac{m}{\infty_1^{\mu}}\left(m^{2n+1}+\frac{1}{2^n}\right)$$

La differenza fra i due numeri è $\frac{1}{2^n\infty_1^{\mu-1}}\left(1-\frac{m^{2n+2}}{\infty_1}\right)$ che diventa indef. piccola in senso assoluto col crescere di μ oltre ogni numero dato della classe (II).

Oss. IV. Definite come abbiamo fatto pei numeri frazionari le operazioni fondamentali e determinate le regole fra i numeri razionali e irrazionali, si dimostra poi analogamente al teor. *m*, 93 che:

e. I numeri reali finiti, infiniti e infinitesimi fino all' ordine μ compresi tutti quelli i cui ordini sono finiti col numero μ formano un gruppo che si trasforma in sè medesimo mediante le operazioni fondamentali applicate a due numeri qualunque del gruppo.

f. Il numero (grandezza numerica), senza il concetto di unità di misura non può servire a determinare la grandezza intensiva di un sistema omogeneo continuo ad una dimensione.

Affinchè due segmenti a e a' siano uguali non solo occorre che siano rappresentati dallo stesso numero, ma eziandio che l'unità di misura a cui si riferiscono sia la medesima, altrimenti se l'unità non è la stessa e sono rappresentati dallo stesso numero non si ha l'uguaglianza di a e a' (*c*). E ciò avviene non solo per due segmenti a e a' ma eziandio per le loro grandezze intensive, poichè l'uguaglianza di queste trae seco l'uguaglianza di quelli (*g*, 111).

Oss. V. Ad un segmento variabile qualunque della forma fondamentale corrisponde un numero variabile in senso assoluto e relativo. Pei numeri variabili finiti valgono i teor. analoghi a quelli dei n. 95-99 e pei numeri assoluti i teor. analoghi a quelli dei n. 100-105.

Da quanto abbiamo detto risulta che i numeri reali hanno la proprietà comune di rappresentare gli elementi di un gruppo, che nel caso dei numeri frazionari il gruppo deve essere tale, se vogliamo spiegare le loro operazioni, da ammettere la divisione in η (o n) gruppi uguali la quale deriva dal continuo stesso (*a*, 103 o *d*, 99); e pei numeri irrazionali il gruppo deve essere continuo. Soltanto che non occorre tener conto delle relazioni di posizione degli elementi del gruppo all'infuori dell'ordine di essi.

Da qui risulta chiaramente che il continuo non dipende da quello numerico, ma che questo rientra in quello più generale del gruppo omogeneo continuo di elementi.

Appoggiandoci alle nostre ipotesi sul continuo (relativo e assoluto) noi non alteriamo il carattere della geometria, sostituendo alla forma fondamentale la retta, come non si altera il carattere dell'analisi facendo dipendere la teoria dei numeri reali da quella dei gruppi di elementi seguendo così un metodo meno artificioso di quello dei simboli. Ma poichè queste teorie non c'interessano per i fondamenti della geometria, così non ci inoltriamo più oltre, e abbiamo del resto come pei numeri interi, detto abbastanza intorno ai loro principî.

CAPITOLO IX.

Ultime considerazioni sulla forma fondamentale.

---

§ 1.

Ipotesi riassuntiva della forma fondamentale — Sua determinazione Forme fondamentali possibili.

122. *Oss. I.* La forma fondamentale fu assoggettata alle ipotesi I-VIII di cui la IV contiene la III, la VIII contiene la VI (oss. II, 85 e *b*, 101) Le proprietà fin qui svolte della forma fondamentale valgono per tutti i sistemi identici nella posizione delle loro parti (oss. IV, 71). Quando sono dati gli elementi di una forma, la forma stessa è data o determinata (def. IV, 57), in modo che essi non sono tutti gli elementi di due forme diverse generate colla stessa legge (def. II, III, 58).

Def. I. Una forma *determinata* da più elementi significa che non vi è altra forma determinata colla stessa legge che abbia gli stessi elementi dati in comune senza coincidere colla prima (def. V, 57 e def. II e oss. III, 58).

Oss. II. Finora la forma fondamentale è stata trattata come un sistema identico ad una dimensione nella posizione delle sue parti (ip. I). Per distinguerla quindi dagli altri sistemi ad una dimensione identica nella posizione delle loro parti, stabiliamo la seguente ipotesi, che riassume anche le precedenti.

Ip. IX. **La forma fondamentale è il sistema continuo ad una dimensione identico nella posizione delle sue parti determinato dal minor numero di elementi.**

Oss. III. In questo caso quando sono dati m punti che determinano la forma fondamentale significa che sono dati con essi senz' altra condizione tutti gli elementi della forma.

Le altre forme invece sono determinate o costruite per mezzo della forma fondamentale (oss. III, 71).

Oss. IV. Che la forma fondamentale debba essere determinata da due elementi anzichè da m elementi non risulta punto dalle cose fin qui dette, perchè valgono tanto nell' uno come nell' altro caso. L' ipotesi più semplice è dunque quella che sia determinata da due elementi distinti. Non è dunque esclusa l' ipotesi che il primo sistema identico nella posizione delle sue parti sia determinato invece da m elementi ($m > 2$), anche se questa ipotesi non fosse così feconda quanto la prima, e non corrisponda, come vedremo, alla forma fondamentale della geometria, che è la retta. E qui possiamo dire:

Il campo delle forme matematiche astratte da noi definite (38) *si compone di tutti gli elementi che possiamo immaginare in base ai principî stabiliti e a tutte le altre ipotesi matematicamente possibili sulla forma fondamentale e sulle relazioni fra più forme fondamentali.*

Otteniamo una prima classificazione di sistemi di forme astratte secondo il numero degli elementi che determinano la forma fondamentale.

Def. II. La scienza che studia queste forme (def. I, 38) si chiama *matematica pura* o *matematica* [1]).

§ 2.

Considerazioni sulla scelta della forma fondamentale.

123. Supposto che un sistema identico nella posizione delle sue parti determinato da m elementi, anche se m è il minor numero sotto questo aspetto, si può dire che tutti i sistemi identici nella posizione delle loro parti determinati da m elementi siano identici?

Supposto che non si conoscano altre proprietà del campo degli elementi fondamentali all'infuori di quella di essere un insieme di elementi, è possibile immaginare che ciò non sia, per es. che i gruppi di m elementi in uno dei suddetti sistemi non siano identici ai gruppi di m elementi dell'altro sistema, perchè se due soli fossero identici, necessariamente per il principio d'identità (a, 60) sarebbero identici anche i due sistemi [2]).

Due forme uguali rispetto alla loro grandezza estensiva determinate ciascuna da m elementi, ma non identiche, differiscono per la loro grandezza intensiva, perchè sono uguali rispetto alle altre condizioni di determinazione (def. I, 38 e def. I, 11; def. I, II, 111). Si può stabilire la loro differenza supponendo che le loro grandezze intensive siano esprimibili numericamente mediante una di esse o una parte di una di esse presa come unità di misura. E in tal caso è chiaro che bisognerebbe appoggiarsi al continuo numerico (def. III, 121) che come si sa è indipendente dalla differenza di posizione delle forme (def. V, f, 121).

Due segmenti espressi numericamente nello stesso modo per mezzo dell'unità di misura non sarebbero in generale identici. La uguaglianza cioè delle grandezze intensive di essi non darebbe la loro identità in posizione e nella costruzione delle forme identiche non si potrebbero sostituire uno all'altro, non tenendo conto s'intende della diversità di posizione dei due segmenti (oss. III, 9 e oss. III, 58). Dopo ciò è chiaro che se il sistema identico nella posizione delle sue parti è determinato dal minor numero di elementi ed è anche tale che tutti i sistemi così determinati sono uguali, non occorrerà ricorrere al continuo numerico per stabilire la loro differenza essendo già uguali, e dati due segmenti uguali di due tali sistemi, tenuto conto dell'osservazione precedente, potremo sostituirli l'uno all'altro nella costruzione delle forme identiche. Un tale sistema sarà da preferirsi come forma fondamentale [3]).

Da quanto precede è pure chiaro che la forma fondamentale senza errore di principio non può essere una grandezza intensiva (o quantità) [4]) (a, 111) se

1) Vedi nota 2, 38.

2) Ciò avviene ad es. per le circonferenze nella geometria; tre punti non situati in linea retta determinano in modo unico una circonferenza, ma non tutte le circonferenze sono identiche.

3) Ciò succede appunto nelle geometria per la retta. (Vedi parte 1, libro I, cap. I).

4) Ciò succede infatti nella geometria.

si tien conto nelle forme matematiche astratte della differenza di posizione nelle loro relazioni.

Questo concetto della grandezza intensiva determinata, poniamo da due elementi differenti di posizione e dati, è giustificato soltanto quando i due elementi determinano uno o più sistemi identici i cui elementi sono diversi di posizione e la grandezza intensiva determinata da questi due elementi è quella determinata in questo o in questi sistemi (def. II, oss. 111). Ma v'ha di più. Abbiamo visto testè che è possibile immaginare che non tutti i sistemi determinati ad es. da due elementi siano identici, anche se sono identici nella posizione delle loro parti, e quindi bisogna supporre che le loro grandezze intensive siano riferibili fra loro mediante una grandezza intensiva presa come unità. In tal caso non si può dire che due coppie di elementi sono identiche quando determinano la stessa grandezza intensiva, senza supporre che tutti i sistemi determinati dalle coppie suddette di elementi siano identici, cioè che vi sia anche l'uguaglianza di posizione (*a* e *f*, 111, def. III e IV, n. 9).

Supporre che due coppie di elementi che determinano la stessa grandezza intensiva siano identiche (o che le forme i cui elementi determinano la stessa grandezza intensiva siano identiche) è ammettere già implicitamente che i sistemi determinati in posizione da due elementi siano rispettivamente identici; ed è per questo che se si parte dalla grandezza intensiva pure commettendo un errore di principio, questo errore non ha conseguenza per la teoria delle forme, ammettendo però la proprietà suddetta [1]).

Si potrebbe considerare anche come forma fondamentale la coppia di elementi, non intendendo già la grandezza intensiva da essi determinata, ma l'insieme di tutti i segmenti delle forme ad una dimensione che hanno per estremi gli elementi dati. In tal caso si può parlare di coppie identiche in base alla sola def. VI, 8 [2]).

Ma ammettendo che tutte le coppie non siano identiche, abbiamo bisogno di determinare in qualche modo la loro differenza: ad es. si può stabilire che la loro differenza sia di tal natura che tutte le coppie si esprimano numericamente mediante una di esse come unità. E anche qui bisogna riferirsi alle proprietà del continuo omogeneo ad una dimensione e alla proprietà $(AB) \equiv (BA)$, se non la si include in qualche altro assioma, perchè qui mancherebbe la proprietà del sistema identico nella posizione delle sue parti (def. I, 70 e oss. II, 81) che serve a dimostrare quella proprietà sia in senso relativo che assoluto (*g*, 99 o *c*, 104).

Certo è che non si può dire che una coppia è maggiore o minore di un'altra, secondo le def. I, II del n. 61, ossia se questa sia o no parte della prima, perchè questo concetto di parte indipendentemente dal concetto di gruppo qui non l'abbiamo. Ricorrendo ad es. al continuo numerico diciamo la

---

1) E non ne ha nella geometria partendo dal concetto di distanza, che è la grandezza intensiva del segmento rettilineo determinato da due punti e che non è neppure la coppia di punti (vedi avanti) perchè la distanza definita comunemente sia analiticamente come geometricamente è precisamente la grandezza intensiva del segmento o della coppia di punti (def. II, 111). Vedi pref. ed appendice.

2) Ciò in un campo concreto, ad es. nella geometria, includerebbe la necessità di un assioma, vale a dire l'esistenza di coppie identiche.

coppia A è maggiore della coppia B quando il numero che rappresenta A è maggiore di quello che rappresenta B.

Questo metodo eviterebbe l'errore di principio del primo, ma oltre che non si ha una forma fondamentale unica, come è la nostra, vi è tanto in questo come nell'altro metodo il difetto che si appoggia sul continuo numerico e almeno sulle proprietà fondamentali delle funzioni continue, che con questi metodi si lavora nella geometria in una forma particolare di date dimensioni [1]), di cui pure bisogna dare la definizione; mentre il campo nostro non ha altre proprietà da principio all'infuori di quella che è un insieme di elementi e che in esso dato un insieme particolare di elementi fuori di esso vi è sempre un altro elemento (def. VI, 13; oss. IV, 122).

La nostra forma fondamentale invece (ip. IX) è indipendente da tutto il campo rimanente ed è con essa che costruiamo le altre forme ad una o più dimensioni [2]).

Volendo proseguire astrattamente bisognerebbe stabilire ora le ipotesi relative a una o più forme fondamentali. Il sistema astratto che noi vogliamo studiare è quello corrispondente alla geometria, e quindi passiamo senz'altro alla trattazione di questo sistema, tenendo presenti le condizioni alle quali devono soddisfare gli assiomi e le ipotesi astratte geometriche e il metodo puramente geometrico [3]).

---

1) Nelle ricerche sui fondamenti della geometria da alcuno si fa uso della coppia di elementi (o intervallo) sebbene non si dica che cosa sia ma si confonda anzi comunemente con la distanza. Ma a questo si rimedia facilmente, come abbiamo visto. Non è però intuitivo in nessun modo che gli intervalli si possano confrontare l'un l'altro senza il concetto della linea retta. Dire che gli intervalli si possono esprimere numericamente mediante un altro, e che si possono far corrispondere ai numeri del continuo numerico, è un'ipotesi possibile tanto più che è confermata dalle ricerche *già note* sulla retta, ma è un'ipotesi che non ha base sull'intuizione geometrica senza la retta. Di più bisogna dare in precedenza una definizione dello spazio a tre (o a n dimensioni) di cui si vuole studiare la geometria altrimenti manca la base per la costruzione del piano e della retta mediante la sfera, come si fa partendo dalla coppia di punti. (Vedi pref. ed app.).

2) Vedi anche pref.

3) Vedi pref.

PARTE PRIMA

LA RETTA, IL PIANO E LO SPAZIO A TRE DIMENSIONI NELLO SPAZIO GENERALE.

LIBRO I.

LA RETTA E LE FIGURE RETTILINEE IN GENERALE.

CAPITOLO I.

La retta e le figure rettilinee in generale. Assiomi e ipotesi.

---

§ 1.

Punto — Assioma I — Figura — Spazio generale — Geometria. Sistemi di punti ad una dimensione.

1. *Oss. emp.* [1]) Alla presenza dei corpi fuori di noi, che ci appariscono per mezzo dei sensi, specialmente per mezzo della vista e del tatto, è collegata l'idea di ciò che li contiene, e, si chiama *ambiente esterno* o *spazio intuitivo*, nel quale i corpi occupano ciascuno un determinato *posto* o *luogo*. Se osserviamo un corpo, esso occupa un determinato luogo; ma spostandosi il corpo, e fissando colla mente il luogo da esso occupatò nel primo momento intuiamo che questo luogo esiste da sè indipendentemente dal corpo. Anche se un corpo non si muove, ad es. il libro che ho sul tavolo, io posso fare astrazione da esso, e pensare al posto che occupa.

Apparentemente questo luogo riempito prima dal corpo in movimento, o dal corpo in quiete ma del quale facciamo astrazione, è evidentemente *vuoto*, vale a dire non lo vediamo, o non lo immaginiamo, occupato da altri corpi. Da ciò non consegue punto che esista effettivamente il *vuoto assoluto*, vale a dire un ambiente che non sia riempito da alcun corpo; ma se noi pensiamo che un grave muovendosi (e per questo possiamo pensare anche ad un punto materiale (corpuscolo)), il luogo in cui giace in un dato momento non venga riempito dalla materia circostante, noi abbiamo la nozione astratta del vuoto assoluto. Ed essendo il vuoto ciò che astrattamente era o può essere occupato da un corpo *non è il nulla*. È coll'idea del vuoto abbiamo anche l'idea dell'*immobilità* del vuoto stesso o dello spazio intuitivo.

Il concetto (int. 4) dell'elemento fondamentale della scienza di cui vogliamo ora dare i principî (int. def. I, 57), col quale cioè riteniamo determinate le forme (oggetti) dei nostri studî (int. def. IV, 57), ci viene fornito da oggetti effettivamente esi-

---

1) Delle considerazioni empiriche che ci servono per stabilire gli assiomi non teniamo alcun conto nell'enunciato delle proprietà e nelle dimostrazioni geometriche, facendo uso soltanto dei risultati che indipendentemente da esse stabiliamo negli assiomi.

stenti fuori di noi nel mondo esterno, ad es. dall'estremità di un filo o da un'estremità dell'oggetto della fig. 1. Facendo astrazione dalle sue qualità fisiche, l'estremità del filo, o ciò che segna la separazione di due delle sue parti consecutive, risveglia in noi l'idea di ciò che considereremo quale elemento fondamentale, ossia del punto [1]).

Altri oggetti, come il segno tracciato sul foglio dalla punta finissima di una matita risvegliano o producono in noi lo stesso concetto, la qual cosa dimostra che il punto è indipendente dalla materia dell'oggetto che ce lo fornisce, imperocchè l'intuizione del punto non si riferisce tanto all'oggetto quanto al posto che esso occupa nell'ambiente che ci circonda.

Def. I. L'elemento fondamentale (int. def. I, 57) del quale si compongono le forme (int. def. IV, 57) è dato dalla rappresentazione particolare summentovata, e si chiama *punto* [2]) I).

Oss. emp. II. L'identità dei punti è manifesta per l'intuizione del punto (int. def. VI, 8), e quindi dobbiamo stabilire il seguente assioma:

Ass. I. **Esistono punti distinti — Tutti i punti sono identici** (int. def. III e oss. III, 9; def. II, III e oss. II, 57) [3]).

Oss. I. Indipendentemente dall'intuizione o in senso puramente astratto questo assioma significa che tutti gli elementi fondamentali a cui si dà il nome di punto sono identici; esso ci dà dunque una proprietà astratta indipendente dall'intuizione del punto.

2. *Oss. I.* Ripeteremo qui alcune definizioni già stabilite nell'introduzione per i sistemi di elementi, considerando come elemento il punto, senza occuparci momentaneamente della loro esistenza, la quale deve essere data o dedotta dagli assiomi che stabiliremo in appresso.

---

1) Vedi anche int. 55. Adoperando il verbo risvegliare non intendo dire che risieda in noi *a priori* l'idea del punto, chè di tale questione il matematico non si occupa (vedi pref.), ma intendo dire che questa idea è una di quelle che si formano o si svolgono in noi gradatamente senza che ce ne accorgiamo, e che quando cominciamo a studiare geometria questa idea, come quella della retta e di altre semplici figure, l'abbiamo già in noi bella e formata.

2) Questa è una definizione puramente nominale, non intendiamo con essa di definire le proprietà del punto ma di riferirci alla rappresentazione spiegata nell'oss. emp. I o nel n. 55 dell'introduzione.

I) Nelle note segnate con numeri romani, come abbiamo avvertito nella prefazione trattiamo della geometria nel campo di una sola unità come avviene comunemente, sia per scopo didattico come per mostrare che si possono seguire gli stessi principî indipendentemente dalle nostre ipotesi astratte sull'infinito e infinitesimo, ma nello stesso tempo per far conoscere anche l'utilità di queste ipotesi nello studio delle proprietà del campo finito stesso (vedi pref.). Non facendo uso dell'introduzione la def. di punto può essere data dunque come oggetto del quale si compongono tutti gli altri oggetti che noi consideriamo, o meglio come oggetto dato dalla rappresentazione suddetta. In un trattato elementare pei licei bisogna evitare le discussioni critiche, come ad es. l'oss. I. Ciò valga per tutte le altre note. Così bisogna supporre alcune cose conosciute, ad es. le proprietà principali dei numeri interi.

Per la def. del punto come per stabilire gli assiomi è utile ricorrere anche in un trattato elementare a considerazioni empiriche.

Osservo che in queste note intendo solo di mostrare la possibilità di seguire i miei principî in un trattato elementare; senza voler stabilire rigidamente un ordine determinato, specialmente nel principio.

3) Lasciamo da parte la questione se il punto abbia o no in sè parti, sebbene da quanto abbiamo detto al n. 55 dell'introduzione intorno all'oggetto della fig. 1 non solo il punto non è parte rispetto a questo oggetto, considerata la parte nel senso che serva a costruire il continuo secondo il teor. *d*, 105, ma non ne ha neppure considerato in sè stesso. (Vedi int. nota 4, 55). Il punto è per noi una forma costante (int. def. VII, 67).

Def. I. Ogni forma il cui elemento fondamentale è il punto (int. def. IV, 57 e def. I, 38) la chiameremo *figura* o *ente geometrico.*

Una figura *A appartiene* ad una figura *B* quando i punti di *A* sono punti di *B*, ed é *parte* di *B* quando nel caso suddetto, vi sono punti di *B* che non appartengono ad *A*, ossia sono *fuori* di *A* (int. 13 e 26).

Oss. II. (*) Qualunqne siano le proprietà della figura che corrisponde allo spazio intuitivo, astrattamente data o costruita una forma qualunque *a* possiamo immaginare fuori di *a* un altro elemento, cioè un elemento che non appartenga ad *a* senza che ciò contraddica alle proprietà della forma *a* stessa, nè conduca a contraddizioni (int. *a*, 37).

Def. II. (*) Lo *spazio generale* è dato da un sistema di punti tale che, data o costruita una figura qualunque vi è almeno un altro punto fuori di essa (oss. II); le cui proprietà non dimostrabili derivano in parte dall' osservazione esterna e in parte da principî astratti che non contraddicono alle prime; e le figure, finchè il punto conserva il suo primitivo significato (def. I, 1) sono sempre accompagnate dall'intuizione spaziale [1]).

Oss. III. Questa definizione e l'oss. II si potrebbero ommettere senza portare alcuna alterazione allo svolgimento delle nostre considerazioni [2]) ; ed è perciò che le abbiamo segnate con un asterisco.

Def. III. La scienza dello spazio generale (e quindi delle figure in esso contenute) si chiama *geometria.*

Oss. IV. La geometria come scienza particolare del pensiero è scopo a sè stessa, ma ha pure per scopo principale lo studio e la costruzione delle figure concrete nel campo della nostra osservazione esterna (def. II, 38) [3]), II).

3. *Def. I.* Un sistema di elementi ad una dimensione il cui elemento è il punto (def. I, 1 e int. def. I. 62) è un sistema di punti che chiameremo *figura ad una dimensione.*

---

1) Ciò non impedisce che col nome di punto non si possa distinguere qualche altro ente che abbia delle analogie col punto che corrisponde alla def. I, come è ad es. il punto *immaginario*, ma di questi punti non avremo ad occuparci nel nostro libro.

2) I nostri assiomi stabiliscono soltanto l'esistenza delle figure a due dimensioni senza escludere quella delle figure a più di due dimensioni; ma le altre proprietà in questo capitolo valgono tanto per le due dimensioni come per lo spazio generale che ha un numero indeterminato di dimensioni e per gli spazî a tre e a più di tre dimensioni.

Per ora la def. di spazio generale non ci fa conoscere che questo: che noi abbiamo un sistema, di punti determinato dall' ass. I, e che fuori di ogni figurà data o costruita in esso vi è almeno un punto. Per questo ultimo principio non occorre alcun assioma, perchè ha ragione nella libertà del nostro pensiero (int. *a*, 37); occorrerà invece un'assioma per stabilire qual'è la forma astratta corrispondente allo spazio intuitivo, ma questo assioma è necessario soltanto, come vedremo, per le pratiche applicazioni.

3) Qui si potrebbe dare la def. di grandezza estensiva ed intensiva di una figura (int. 111), ma non lo facciamo per evitare fin da ora tutti i principî generali non necessari. La distinzione delle due grandezze dimostra che la geometria non è la scienza dell'estensione, perchè la scienza che ha per scopo la grandezza estensiva delle forme astratte è la scienza dell'estensione astratta; nè è la scienza dell'estensione concreta corrispondente a quella dello spazio intuitivo perchè la geometria si occupa anche della grandezza intensiva delle figure, nè si occupa della sola misura dell'estensione, come spesso viene definito.

II) Per la def. di figura, non facendo uso dell'introduzione, si può dare qui la def. IV del num. 57 dell'introduzione stessa, dando quindi la def. III e tralasciando ogni definizione di spazio non necessaria per lo svolgimento della geometria; basta supporre soltanto in conformità all'ass. I che si ha un sistema di punti le cui proprietà vengono stabilite e dedotte dagli altri assiomi.

Oss. I. Come ogni sistema ad una dimensione ha due versi opposti a cominciare da uno qualunque dei suoi elementi (int. 62 e 63), così è di ogni sistema di punti ad una dimensione.

Gli elementi di un sistema ad una dimensione si possono considerare come posizioni diverse di un elemento del sistema (int. 67), e quindi possiamo dire senza introdurre nuovi principî, che i punti di un sistema ad una dimensione sono *posizioni diverse* di un punto che si muove sul sistema. Per la stessa ragione, se consideriamo i punti consecutivi $AA^{(1)}$ $A^{(2)}$ .... del sistema si può dire che i segmenti $(AA^{(1)})$, $(A^{(1)}A^{(2)})$ ecc. sono posizioni diverse di un medesimo segmento che si *muove* o *scorre* sul sistema, senza che da ciò derivi l'identità di quei segmenti e la continuità del sistema stesso e senza che queste espressioni dipendano dal movimento reale dei corpi (int. 67). [1]).

Un sistema di punti ad una dimensione è *semplicemente chiuso*, se un punto che si muove nel sistema percorre l'intero sistema in un dato verso ritornando nella posizione di prima. Un sistema ad una dimensione è *semplicemente aperto* se il punto che lo percorre in un verso o nel verso opposto non ripassa per un punto del sistema e se non ritorna al punto di partenza (int. 63 e 67).

fig. 2

Oss. emp. Un sistema ad una dimensione lo rappresenteremo spesso con un gruppo di segni tracciati sul foglio colla punta di una matita che si seguono in un dato verso indicato di una o l'altra freccia, anche se tutte le proprietà dell'oggetto non sono proprietà del sistema, e inversamente (fig 2).

Ogni disegno rappresentante una figura lo chiameremo anche figura. Esso è però una figura concreta (def. I, 2 e int. def. II, 38) e non è da confondere con la figura astratta corrispondente, della quale è un'immagine o una rappresentazione [2]) III).

Le proprietà svolte in questo libro colla scorta delle note segnate con numeri romani valgono non solo per il piano ma anche per lo spazio generale e per gli spazi a tre e a più di tre dimensioni.

In un trattato di geom. elementare bisogna limitarsi allo spazio intuitivo, ma non occorre dare di esso alcuna definizione, come non occorre darla per lo spazio generale. Al più per darne un'idea si potrebbe dire così: « Lo spazio intuitivo è determinato da un sistema di punti le cui proprietà fondamentali non dimostrabili derivano in parte dall'osservazione esterna diretta e in parte da principî astratti che non contraddicono alle prime; e le figure, fintantochè il punto conserva il suo primitivo significato (def. I, 1), hanno o possono avere una rappresentazione reale completa rispetto alla nostra intuizione spaziale.

Quale differenza vi sia fra l'intuizione di una figura dello spazio intuitivo e di una figura qualunque dello spazio generale vedremo specialmente nella parte seconda.

La proprietà che fuori di ogni piano esiste un punto può esser data come assioma quando si costruisce lo spazio a tre dimensioni (libro III, parte I), stabilendo poi l'assioma che lo spazio intuitivo (oss. emp. 1) ha tre dimensioni, assioma non necessario per lo svolgimento della geometria a tre dimensioni, ma necessario per le pratiche applicazioni di essa nel campo delle nostre osservazioni esterne.

1) Vedi § 26.

2) L'uso delle figure tracciate sul foglio del disegno aiuta moltissimo la mente nelle indagini geometriche (vedi pref.), e i disegni od oggetti simili sono necessari per stabilire gli assiomi. Ma la deduzione delle proprietà fondamentali, specialmente quando non sono stabiliti ancora tutti gli assiomi bisogna che sia indipendente dalla osservazione o dall'intuizione della figura affine di non introdurre fin da principio concetti non ancora definiti, oppure affine di non ritenere dimostrata una proprietà che sia derivata invece dall'osservazione della figura. E non volendo abbandonare i grandi vantaggi che offre l'intuizione bisogna aver riguardo a questi inconvenienti cui essa può dar luogo.

III). Non volendo ricorrere all'introduzione (vedi nota I) la considerazione di serie di cose e di ordine, come la proprietà di esse si possono premettere brevemente nelle nozioni comuni in un trattato elementare. Così si può dare la def. I, la parte dell'oss. I relativa al linguaggio del movimento, dando altresì l'oss. emp. e la def. II,

Def. II. Se due sistemi di punti hanno un punto comune A (int. def. VII, 13) diremo anche che si *incontrano* nel punto A, e che A è punto *d'incontro* o *d'intersezione* di essi.

§ 2.

Assioma II. — Prime proprietà della retta.

4. *Oss. emp. I.* Abbiamo date le definizioni precedenti (3) sotto condizione che esistano gli enti a cui si riferiscono, ma non abbiamo ancora ammesso alcun principio dal quale sia data o si deduca la loro esistenza. Noi sappiamo soltanto di avere un sistema di punti (ass. I, int. def. I, 13), e perciò non sappiamo se vi siano figure continue, e se vi sono qual'è quella che viene determinata dal minor numero di punti e qual'è questo numero. E perciò non possiamo decidere se due punti determinino necessariamente una figura, fra quelle che li contengono, e se sì di quale natura sia (int. 122). Dobbiamo dunque vedere se vi è qualche oggetto esteriore il quale ci fornisca il concetto di una figura determinata da due punti.

Se osserviamo l'oggetto della fig. 1,a e facciamo astrazione dalle sue qualità fisiche, esso ci fornisce appunto il concetto (int. 4) di un sistema di punti ad una dimenzione limitato da due punti. Questa figura si chiama *segmento rettilineo* o semplicemente *segmento*, quando non vi sarà luogo a confusione con segmenti di altri sistemi. L'intuizione del segmento rettilineo viene pure risvegliata [1]) in noi da un filo teso alle sue estremità (teso s'intende in senso empirico), dallo spigolo di un dado, da un raggio solare che per un forellino entra in una camera oscura, ecc. ecc. Il segmento rettilineo dunque, come il punto (oss. emp., 1) piuttosto che corrispondere al filo teso e allo spigolo di un dado o ad altri oggetti simili, corrisponde al luogo occupato da questi oggetti nello spazio intuitivo (oss. emp., 1).

Abbiamo veduto al n. 55 dell'introduzione che l'esperienza ripetuta ci conduce ad ammettere che il segmento rettilineo sia parte di un altro segmento rettilineo (int. def. II, 27 e def. III, 62), e quindi che sia parte di un sistema di punti ad una dimensione illimitato in uno e nell'altro verso (int. 32). Ma anche se nell'ambiente esterno non fosse così, l'ipotesi astratta suddetta non solo non contraddice, ma giova anzi allo studio delle proprietà del campo limitato dell'osservazione [2]).

Il sistema rettilineo è identico nella posizione delle sue parti (int. 55, def. I, 70; oss. II, 81); di più le parti dell'oggetto rettilineo della fig. 1,a sensibili all'osservazione sono finite rispetto ad una qualunque di esse (def. II, 82), vale a dire se si hanno due parti (AB), (CD) e $(AB) < (CD)$, vi è un numero m intero naturale tale che $(AB)\ m > (CD)$ (c', 81).

L'unità alla quale si riferiscono queste parti la chiameremo *unità rettilinea sensibile all'osservazione* o semplicemente *unità sensibile.*

Di più, l'oggetto rettilineo ci ha servito di guida per stabilire l'ip. VI del continuo relativo (int. 55 e 96), quindi l'oggetto rettilineo è continuo relativamente all'unità sensibile. Questo oggetto (fig. 1) guardato al microscopio potrebbe non essere continuo, ma lo è il luogo da esso occupato rispetto alla nostra intuizione spaziale (int. 55).

Da quanti dei suoi punti è determinato in posizione questo sistema? Astrattamente, dalla proprietà che esso è una figura ad una dimensione identico nella posizione delle sue parti e continuo non risulta il numero dei punti dai quali è determinato (int. 122); dobbiamo quindi ricorrere all'esperienza. E ricorrendo all'espe-

---

1) Vedi nota, I.

2) Qui si ha appunto un'ipotesi astratta di cui abbiamo parlato nella def. dello spazio intuitivo alla nota II).

rienza noi vediamo che il luogo occupato dall'oggetto rettilineo è determinato dalle sue estremità, e siccome il segmento determina l'intero sistema, così questo è determinato da due dei suoi punti. Noi vediamo che due punti qualunque distinti che corrispondono alle estremità di un oggetto rettilineo nel campo della nostra osservazione determinano sempre un segmento rettilineo, ma ci basterà ammettere che lo sia da due dei suoi punti soltanto. Se si desse questa proprietà per tutte le coppie di punti si ammetterebbero tanti assiomi quante sono le altre coppie (vedi nota IV).

D'altronde se il sistema è determinato dalle coppie di punti che corrispondono alle estremità di oggetti rettilinei situati nel campo della nostra osservazione, ciò non significa che esso lo sia da due qualunque dei suoi punti, perchè anche intuitivamente o coll'osservazione non si può dire che tale proprietà abbia luogo per le coppie di punti del sistema di cui uno almeno corrisponde ad un oggetto non compreso nel campo della nostra osservazione, essendo questo campo sull'oggetto rettilineo una parte finita presentemente data rispetto all'unità sensibile, e quindi immaginando l'oggetto prolungato oltre questo campo, come abbiamo detto precedentemente, non possiamo più dire che pei suoi estremi non passi un altro oggetto rettilineo.

Del resto tale questione risorgerà sotto altri aspetti, e vedremo che anche intuitivamente non possiamo deciderla. Astrattamente dunque dobbiamo fin da principio ammettere la possibilità che due punti non determinino la retta. Riassumendo diamo perciò il seguente assioma:

Ass. II. a. **Esiste un sistema di punti ad una dimensione identico nella posizione delle sue parti determinato da due dei suoi punti distinti e continuo.**

Def. I. Questo sistema si chiama *linea retta o retta.*

Oss. I. Determinata da due punti significa che due rette non hanno questi punti comuni (int. def. VII, 13) senza coincidere (int. def. V, 57 e 122).

Oss. II. Questo assioma è pure indipendente dall'intuizione, perchè facendo astrazione da essa ci dice che esiste un sistema ad una dimensione di elementi identico nella posizione delle sue parti e continuo che viene determinato da due dei suoi elementi.

Che cosa sia un tale sistema abbiamo già stabilito astrattamente nell'introduzione, cioè senza l'uso necessario dell'intuizione (int. 62, 68, 70, 96 e oss. II, 81 e 99).

Oss. III. L'assioma I ci assicura soltanto che è dato un sistema di punti, ma non ci dà di questo sistema alcuna proprietà all'infuori di quella che tutti i punti sono uguali. Se esiste un sistema particolare di punti non significa perciò che questo debba essere ad una dimensione, e se è tale, che sia anche identico nella posizione delle sue parti, sia continuo e sia poi determinato da due dei suoi punti. Le parti adunque in cui abbiamo scomposto nell'introduzione la parte *a*) dell'assioma II non si possono dedurre dalle precedenti (int. oss. II 81; nota 8. 99 e oss. 122),

L'osservazione stessa e lo svolgimento della geometria ci dimostrano come esistono dei sistemi ad una dimensione identici nella posizione della loro parti e continui che non sono determinati da due punti.

Oss. IV. Tacitamente diamo gli assiomi rispetto ad un'unità corrispondente all'unità sensibile (oss. emp.), senza però che ad essi contraddicano la definizione dello spazio generale (def. II, 2) e le ipotesi astratte che stabiliremo in seguito; e vedremo che essi, colle ipotesi astratte suddette o coll'ipotesi delle parallele date nella nota XV, bastano per svolgere la geometria a più specie di unità rettilinee o nel solo campo finito di un unità, e in qualunque spazio da noi costruito,

Oss. V. Come si faccia a costruire praticamente un segmento uguale ad un segmento dato non occorre sapere per la teoria. Ci basta l'esistenza di segmenti uguali sulla retta [1]).

1) Vedi § 26.

Oss. VI. **Alla retta come sistema identico nella posizione delle sue parti continue si estendono tutte le proprietà di questo sistema, come quelle che derivano dalla sua continuità. Riferiremo qui le principali, deducendone però altre coll' aiuto dell'ass. II.*a*.**

Teor. I. La retta è semplicemente chiusa o semplicemente aperta (int. c', 68).

Teor. II. Scelto un punto X della retta, vi sono su di essa due soli segmenti uguali ad un' altro segmento qualunque (AB), che hanno per estremo comune l'elemento X e sono dello stesso verso (int. b', 69).

Teor. III. La retta a partire da un suo punto in un dato verso, è uguale alla retta considerata da un altro punto qualunque di essa nel verso dato o nel verso opposto (int. a, 70 e conv. I, 69).

Coroll. I. Scelto un punto X qualunque della retta, in uno e nell'altro verso esiste un solo segmento identico ad un altro segmento (AB) di essa (int. a', 70).

Coroll. II. Se la retta è aperta ogni suo punto la divide in due parti uguali (int. a'', 70).

Def. II. Se la retta viene determinata da due punti A e B si dice anche che *congiunge* o *unisce* i punti A e B. Se una retta contiene un punto A si dice anche che *passa* pel punto A.

Ind. I. Indicheremo ordinariamente le rette con lettere italiche minuscole o col simbolo AB, mentre i punti li indicheremo in generale con lettere italiche majuscole.

Teor. IV. Dato un punto qualunque sulla retta vi sono almeno due punti che con esso determinano la retta, e a partire da un punto, in uno e nell'altro verso, vi sono infiniti segmenti uguali consecutivi i cui due estremi determinano la retta.

Secondo l'ass. II, a vi devono essere due punti A e B della retta che la determinano e quindi su di essa determinano almeno un solo segmento che ha per estremi i punti dati (teor. I, int. b e c. 64). Sia (AB) questo segmento e sia X un altro punto qualunque della retta. Sulla retta in uno e nell'altro verso vi è un segmento (XY) identico al segmento (AB) (coroll. I, teor. III), e perciò i punti X e Y determinano il segmento (XY) (int. def. III, 9; b, 60), vale a dire una retta, la quale deve coincidere colla retta data, altrimenti vi sarebbero due rette passanti per i due punti X e Y contro l'ass. II, a (oss. I).

Teor. V. La retta non può essere determinata da un solo punto.

Bisogna supporre che mentre occorrono i due punti A e B per determinarla (ass. II, a) vi sia un punto C almeno che la determina da solo. In tal caso A non avrebbe la stessa proprietà del punto C. Ma vi è in essa un segmento $(CD) \equiv (AB)$ (coroll. I, teor. III), e quindi se A non determina da solo il segmento (AB), C non determina da solo il segmento (CD), e perciò neppure la retta, perchè essendo (AB) e (CD) identici (int. def. III, e oss. III, 9) hanno le stesse proprietà, cioè anche quelle dei punti corrispondenti rispetto agli stessi segmenti (int. dim. di b, 60).

Oss. em. II. **Abbiamo già detto che due punti qualunque del campo della nostra osservazione determinano un solo segmento rettilineo, e quindi anche una sola retta; ma poichè come abbiamo detto nell'oss. emp. I non possiamo pronunciarci ancora se**

sulla retta vi siano o no coppie di punti che non la determinano, completiamo l'ass. II colla seguente proprietà:

Ass. II. b, **Esistono punti fuori della retta. Ogni punto che non appartiene alla retta determina con ogni punto di essa un'altra retta** [1]).

Oss. VII. È chiaro che facendo astrazione dall'intuizione questo assioma contiene una proprietà astrattamente ben determinata.

L'ass. II, *a* riguarda la sola retta in sè stessa, non dice quindi nulla da solo sull'esistenza di punti fuori della retta. L'ass. I è soddisfatto anche dai soli punti di una retta.

Si vede dunque che ogni punto situato fuori della retta è indipendente dalla retta o che non è in nessun modo dato da essa. Se data la retta mediante l'ass. II, *a* risultasse che tutti i punti fuori di essa godono o non godono la proprietà dell'ass. II, *b* ciò vorrebbe dire che ogni punto sarebbe in qualche guisa dipendente da essa, o dalla coppia di punti che la determina; o in altre parole la proprietà di questa coppia che finora nell'ass. II, *a* è speciale sulla retta, si estenderebbe senz'altre considerazioni ad una coppia di punti indipendenti.

La proprietà II, *b* si può dunque ritenere indipendente da *a,* e quindi non contraddicente a II, *a.* L'osservazione stessa ci assicura poi d'altra parte che l'ass. II, *b* non contraddice all'ass. II, *a.* IV) [2]).

---

1) Indichiamo questo assioma con II_b perchè riguarda le coppie di punti che determinano la retta.

IV) Come ho detto (nota I e int. oss. II e nota 1, 81) in un trattato per uso dei licei, bisogna rimanere nel campo di una sola unità almeno nella planimetria, il che si ottiene coll'ass. V. d'Archimede. Per il continuo rettilineo si possono seguire i principî dell'introduzione colle opportune modificazioni e riduzioni, indicate nell'oss. II, 81 e nota 8, 99. Vedi anche la nota citata dell'*A.* «Il continuo rettilineo e l'assioma V d'Archimede». Anche se alcune proprietà dimostrabili, come quella del teor. *a* del n, 99 dell'introduzione per ragioni didattiche si credesse di ammetterle come evidenti, ciò non nuocerebbe gran fatto al metodo generale, perchè l'insegnante saprebbe già che queste proprietà sono invece dimostrabili mediante gli assiomi premessi. Ed è per ragioni didattiche che è preferibile, come si vedrà in seguito, di sostituire l'assioma II col seguente:

Ass. II'. Due punti distinti qualunque determinano un sistema identico nella posizione delle sue parti e continuo, che li contiene, e si chiama retta.

Esistono punti fuori della retta.

È però evidente che sotto questa forma l'assioma contiene un maggior numero di proprietà che nella forma primitiva, perchè col nostro assioma II non ammettiamo che la retta sia determinata da una coppia qualunque dei suoi punti, riservandoci di dedurre poi se e quando due punti qualunque non determinano la retta, per non escludere il sistema di geometria così detto *sferico.* Scientificamente dunque è da preferire l'ass. II.

È per questo che le modificazioni da introdurre nel testo, rimanendo nel solo campo finito, le indicheremo nelle note seguenti sia per l'ass. II come per l'ass. II', finchè sarà inutile tener conto della loro distinzione, come avviene ad un dato punto svolgendo, come noi ci proponiamo in queste note, il sistema Euclideo. Coll'ass. II si segue lo stesso ordine del testo — fintantochè non introdurremo il concetto del continuo assoluto — sia coll'oss. II, 2 sia senza questa osservazione, come sarà indicato nel testo stesso, o nelle note.

2) Vedi pref.

Oss. VIII. Avremmo potuto tralasciare la prima parte dell'ass. II, *b* basandoci sull'oss. II, 2, se non ci fosse utile sia per le note segnate coi numeri romani nelle quali non facciamo uso di questa osservazione (nota II) sia per meglio stabilire le nostre ipotesi astratte.

Teor. VI. Se due punti non determinano la retta, [1] *ogni retta che contiene l'uno contiene anche l'altro.*

Siano X e Y i due punti, e sia r una retta passante per Y, il che è possibile perchè per l'assioma II, a esiste una retta, e quindi se Y non è in questa retta determina una retta con ogni punto di essa (ass. II, b), la quale passa per Y (def. II, ass. II, a). Se X non appartiene alla retta r, X determina con Y una retta (ass. II, b), ciò che è contro il dato.

Coroll. I. Se tre punti non sono in una retta determinano due a due tre rette.

Difatti se due di essi non determinassero una retta, ogni retta passante per uno di essi passerebbe anche per l'altro, e quindi sarebbero situati tutti e tre in linea retta.

Coroll. II. I punti che con un punto dato non determinano la retta non la determinano fra loro.

Difatti siano B e C due punti che con un punto A non determinano la retta; ciò vuol dire che ogni retta che contiene A contiene anche B e C, e così ogni retta passante per B o per C passa anche per A (def. II, teor. VI); dunque ogni retta passante per B passando per A contiene C, e quindi B e C non determinano la retta (ass. II, a e oss. I).

Teor. VII. Se un punto non determina la retta con un altro punto di essa, ogni punto della retta ha la stessa proprietà, e a partire da un punto in uno e nell'altro verso vi sono infiniti segmenti uguali consecutivi i cui estremi non determinano la retta.

La dimostrazione della prima parte di questo teorema è analoga a quella del teor. V. Ogni retta passante per uno degli estremi di un segmento della serie passa anche per tutti gli altri estremi (coroll. II, teor. VI).

Teor. VIII. Ogni segmento rettilineo (AB) è parte di una sola retta.

Oppure:

Due rette che hanno un segmento comune coincidono.

Siano r e r_1, le rette che hanno il segmento comune (AB). Le coppie di punti di questo segmento non possono determinare la retta (ass. II, a, oss. I), quindi ogni retta passante per uno di essi, ad es. B, contiene anche tutti gli altri punti del segmento, e perciò anche il segmento (AB). Immaginiamo ora sulla retta r un segmento $(BC) \equiv (AB)$ e dello stesso verso (teor. II). Il segmento (BC) ha le stesse proprietà del segmento (AB) (int. def. III, 9), e ogni altra retta che contiene B contiene anche tutti gli altri punti del segmento (BC) (teor. VII). Dunque il campo della scala di unità (AB) in r (int. def. III 80; def. I, II, 107) è comune alla retta r_1; o in altre parole siccome ogni punto di r e di r_1 è contenuto in questo campo (oss. IV e int. oss. II, 81), le rette r e r_1 coincidono (int. def. V, 57).

Dunque ogni retta passante per A coinciderebbe colla retta r, e quindi

1) Anzichè dire una sola retta diciamo anche la retta.

o A determinerebbe la retta, ciò che è assurdo (teor. IV); ovvero non vi sarebbero punti fuori della retta, il che è pure assurdo (ass. II, b, opp. oss. II, 2).

Coroll. I. Un segmento rettilineo (AB) *qualunque determina una sola retta.*

Difatti siccome appartiene ad una sola retta, questa è determinata dal segmento dato.

Coroll. II. Un punto non può determinare un segmento rettilineo.

Difatti determinerebbe la retta determinata dal segmento stesso, il che è assurdo (teor. IV).

Coroll. III. In ogni segmento (AB) *vi sono punti che con uno qualunque degli estremi o con altri punti dello stesso segmento determinano la retta.*

Difatti se in (AB) non vi è alcun punto che con A determina la retta, quindi nemmeno B, il segmento (AB) è situato in ogni retta passante per A, il che è assurdo. Se X è un punto di (AB) che con A determina la retta, dividendo per metà (AX) nel punto M (oss. IV; int. b, 99), M determina con A la retta, perchè essendo $(AM) \equiv (MX)$, se M non determinasse la retta con A non la determinerebbe neppure con X, e perciò non la determinerebbero neppure A e X (teor. VII) contro l'ipotesi. Così dicasi per tutti i punti M che dividono (AX) in n parti uguali (int. b, 99). Per dimostrare che nel segmento (AB) vi sono punti che con un punto dato X determinano la retta basta considerare il segmenro (AX) o il segmento (XB).

Teor. IX. Ogni punto è situato in più rette distinte.

Per l'ass. II, a esiste una retta r. Considerando un punto B fuori della retta r, il che è possibile (ass. II, b opp. oss. II, 2), esso determina una retta r' con un punto A di r, la quale non coincide con r (int. def. V, 57), non solo perchè r e r' non hanno il punto B comune, ma perchè r' non può contenere tutti i punti di un segmento qualunque di r, ed r non può contenere tutti i punti di un segmento di r' (teor. VIII). Scelto un altro punto qualunque C di r, si ha la retta BC che non può coincidere con r', altrimenti r e r' avrebbero i punti di un segmento comune contro il teor. VIII; e la retta BC, per la stessa ragione di r', non coincide con r. Scelto un altro punto D qualunque di r, esso determina una retta con B che non coincide, per tutti i punti D differenti da A e C, con BA o con BC. In ogni segmento (XY) della retta r nel quale non cadono punti di rette già costruite, come BA, BC, BD ecc. vi è almeno un punto Z che con B determina una retta distinta da r e da ogni altra retta già costruita, altrimenti questa e la retta r, o la retta BZ e la retta r, avrebbero il segmento (XY) comune, il che è assurdo (teor. VIII).

Scelto un punto B_1 fuori delle rette costruite nel modo suddetto, il che è permesso (oss. II, 2), B_1 determina con B un'altra retta (ass. II, b), e così via [1].

Coroll. Se due punti non determinano la retta, essi sono situati in più rette distinte (teor. VI).

Teor. X. Tutte le rette passanti per un punto determinano lo spazio generale.

Difatti sia A il punto e f una figura qualunque; i punti di f sono situati in rette passanti per A, anche se non determinano con A la retta (teor.

1) Il teor. IX si può dimostrare anche prima del teor. VII facendo uso del teor. V e dell'assioma II.

VI e IX). Fuori di f vi è sempre un punto B (def. II, 2), il quale è pure situato in una retta che contiene A, quindi il teorema è dimostrato (def. II, 2).

Oss, IX. Questo teorema non è necessario come non lo è la definizione di spazio generale, sebbene noi intendiamo di operare sempre in questo spazio — [1]) (V).

§ 3.

Lunghezza di un segmento rettilineo o distanza di due punti in un segmento rettilineo — Segmento e distanza di due punti sopra la retta aperta o chiusa — Punti opposti della retta chiusa — Raggi della retta VI).

5. *Def. I. Lunghezza* di un segmento (AB) si dice il segmento considerato come sostituibile ad un altro segmento identico, in ogni unione (int. 29) con altri segmenti.

Per *distanza* degli estremi A e B di un segmento (AB) s' intende la lunghezza del segmento medesimo.

Ad es. dati i due segmenti $(AB) \equiv (A'B')$, $(A_1B_1) \equiv (A'_1B'_1)$, situati o no sulla medesima retta, in generale la coppia (AB), (A_1B_1) può non essere identica alla coppia $(A'B')$, $(A'_1B'_1)$ (int. oss. III, 58), ma considerando la sola lunghezza dei segmenti si ha che le due coppie di lunghezze sono uguali.

Oss. I. L'unione di due segmenti dati in posizione dipende dalla posizione reciproca dei due segmenti [2]), mentre ciò non è per la somma delle loro lunghezze, vale a dire in tal caso non si tien conto della posizione reciproca dei due segmenti, e si ottiene lo stesso risultato per le distanze come se essi fossero consecutivi in un dato verso sulla medesima retta. La somma delle due lunghezze $(A'B')$, $(A'_1B'_1)$ è uguale dunque alla somma delle due lunghezze (AB) e (CD) di due segmenti consecutivi (fig. 3). Così se consideriamo un segmento (AB) e lo scomponiamo in un numero qualunque di parti, e supposti tanti segmenti non situati in linea retta o sulla stessa retta ma non consecutivi e

A B A₁ B₁ C D A' B' A'₁ B'₁

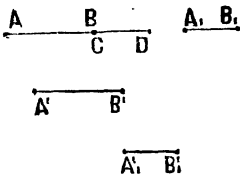



fig. 3

1) Per la proprietà che ha la retta di essere un sistema ad una dimensione identico nella posizione della sue parti, possiamo considerare a cominciare da un punto qualunque di essa in uno o nell'altro verso una serie di segmenti uguali. Ebbene questo fatto, e non altro, potremmo esprimerlo anche dicendo che i diversi segmenti uguali della serie suddetta sono posizioni diverse di un medesimo segmento che si muove o scorre sulla retta mantenendosi uguale a sè stesso (oss. I, 3 e int. 67). Ma non lo faremo qui per non far credere che con questo linguaggio introduciamo il principio del movimento senza deformazione del quale tratteremo al § 26.

V) Questi teoremi vanno dati ugualmente coll' ass. II (nota IV), soltanto si tralascia l'ultima parte della dimostrazione del teor. IX, nel caso che non si voglia far uso dell' oss. II, 2. Coll'ass. II' basta considerare i teor. I, II, il teor. III coi suoi corollari, i quali devono essere svolti colle considerazioni dell'oss. II, 81 dell'introduzione, e si tralasciano i teor. IV e X. Gli altri teoremi o sono corollari dell'ass. II', oppure non occorrono quando riguardano il caso di due punti che non determinano la retta.

VI) Questo paragrafo può essere dato tale e quale. L' ass. II' non stabilisce che la retta sia aperta, questa proprietà può essere dimostrata come vedremo col postulato Euclideo delle parallele che daremo in seguito. Anche qui se non si volesse tener conto di questa distinzione, del resto semplicissima e che basta accennare qualche volta come vedremo, bisognerebbe chiedere il postulato della retta aperta subito dopo l' ass. II' stesso. Il teor. I si limiterebbe a constatare che la retta è una linea semplice.

2) Così per es. nello spazio due coppie di segmenti uguali non determinano due figure identiche.

rispettivamente uguali alle parti del segmento dato, la somma delle loro lunghezze è la distanza dei due punti A e B nel segmento dato, ma il loro insieme non è una figura identica al segmento (AB) stesso [1]).

Teor. I. Se le lunghezze di due segmenti della medesima retta sono uguali, i due segmenti sono uguali.

Oppure:

Se le distanze degli estremi di due segmenti sulla medesima retta sono uguali i due segmenti sono uguali.

Vale la stessa dimostrazione del teor. *f*, 111.

6. *Def. I.* Per *segmento di due punti sulla retta aperta* (teor. I, 4) intenderemo il segmento che i due punti determinano sulla retta (int. *b*, 64), e per *distanza* dei due punti la lunghezza di questo segmento (def. I, 5).

Def. II. Per *segmento di due punti A e B sulla retta chiusa* intenderemo il minore dei due segmenti (AB) e (BA) del medesimo verso determinati da A e B sulla retta (int. *c*, 64); e per *distanza* da A e B la lunghezza di questo segmento.

Oss. I. Se si ha $(AB) \equiv (BA)$, o in altre parole se A e B dividono la retta per metà, essi determinano due segmenti uguali sulla retta, e perciò non si può più applicare in tal caso la def. precedente, mentre determinano una sola distanza sulla retta, perchè i segmenti hanno la stessa lunghezza, non considerandosi per la distanza la differenza di posizione dei due segmenti.

Possiamo dunque dire che due punti sulla retta chiusa determinano una sola distanza, la quale si riferisce al segmento minore determinato dai due punti, o all'uno o all'altro dei segmenti quando i due punti dimezzano la retta (oss. IV, 4, int. *b*, 99).

Def. III. Due punti che dividono la retta chiusa per metà si chiamano *punti opposti.*

7. *Def. I.* La retta ha due versi o direzioni (ass. II, *a*; int. def. II, 62). La retta percorsa in un verso la chiameremo anche *raggio*, e quindi una retta ha due raggi, i cui punti coincidono. I raggi che appartengono ad una retta si chiamano *raggi opposti,* come i versi in cui sono percorsi.

Def. II. Quando diremo che *due raggi coincidono* intenderemo che non solo sono situati sulla stessa retta ma che sono diretti nel medesimo verso della retta (int. def. III, 67). Quando diremo invece che *due raggi giacciono in una retta* intenderemo che possono essere diretti in un medesimo verso o in versi opposti della retta.

§ 4.

Ass. III — Identità di due rette — Figure rettilinee. Triangolo VII).

8. *Oss. I.* Ora si presenta per noi la domanda: due rette qualunque sono o non sono identiche?

---

1) La lunghezza non è che la grandezza intensiva del segmento (int. def. II. e *a*, 111). Le figure (AB), (CD); $(A'B')$, $(A'_1B'_1)$ non sono in generale identiche ma equivalenti (int. def. IV, 9).

La distanza di due punti nel senso della def. I non è il segmento rettilineo di essi, come l'area di una figura piana e il volume di una figura solida non sono le figure stesse. (Vedi nota, 11).

VII) Questo paragrafo può rimanere tale e quale.

Le considerazioni astratte che possono derivare dagli ass. I e II non ci permettono di decidere la questione, imperocchè l'ass. II, *a* riguarda la retta in sè, e l'ass. I coll'ass. II, e se si vuole insieme anche colla definizione di spazio generale, serve a stabilire l'esistenza di più rette distinte (teor. IX, 4). Ma non possiamo ricavare le relazioni di uguaglianza o di disuguaglianza fra due rette considerate in sè (int. def. III e oss. III, 9), sebbene determinate da due coppie di punti, perchè per dedurne l'identità in base ai principî dell'introduzione (int. 8 e 60) bisognerebbe che le due coppie di punti fossero identiche, o che in esse vi fossero coppie di punti che le determinano, identiche fra loro; il che non è detto negli assiomi precedenti, nè risulta da essi [1].

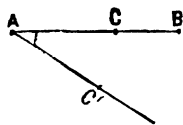



fig. 4.

Oss. emp. Esaminando due oggetti rettilinei (AB), (AD) (fig. 4) noi riceviamo l'impressione che anche se non sono uguali, ad una parte (AC) dell'uno vi è nel secondo una parte (AC') uguale alla prima. Diamo dunque il seguente assioma:

Ass. III. **Se due rette qualunque hanno un punto comune A, ad un segmento (AB) dell'una è identico un segmento (AB') dell'altra.**

Oss. II. Questo assioma in senso puramente astratto indipendentemente cioè dall'intuizione ci dà una proprietà pienamente determinata; esso significa cioè che due sistemi qualunque di elementi determinati dagli assiomi precedenti e che hanno un elemento comune A, soddisfano alla condizione $(AB) \equiv (AB')$, essendo B e B' due altri elementi che appartengono rispettivamente ad essi.

Teor. I. Due rette qualunque sono identiche.

Ciò è chiaro se esse hanno un punto comune A (ass. III, teor. IX, 4) perchè costruite le scale coi segmenti (AB) e (AB') uguali, ad ogni segmento dell'una è uguale un segmento dell'altra, e i campi delle due scale, ossia le due rette, sono uguali (oss. IV, 4; int. *a*, 81).

Se è data un'altra retta qualunque EF che non passa pel punto A, la retta AE (ass. II, *b*) per la dimostrazione precedente è identica alla retta AB, e alla retta EF, dunque le rette AB ed EF sono identiche (int. *e*, 8) (fig. 4).

Oss. III. In tal caso si potrebbe ricorrere per la dimostrazione anche al principio *a* del n. 60 dell'introduzione. Però a questi principî noi ricorriamo soltanto in casi in cui non v'è dubbio alcuno sulla loro applicabilità e nei quali non possiamo dare altre dimostrazioni.

9. *Def. I.* Per *figura rettilinea* di un sistema o di più sistemi distinti di punti intenderemo quella individuata dai segmenti che hanno per estremi i punti dati, e dai segmenti determinati dai punti dei segmenti suddetti, e così via.

Def. II. La figura rettilinea determinata da tre punti ABC non situati in una retta si chiama triangolo; i tre punti A, B, C *vertici* e i tre segmenti (AB), (BC), (CA) (def. I e II, 6) *lati* del triangolo.

Quando non vi sarà luogo a confusione chiameremo *lati* anche le rette determinate dai tre punti due a due (coroll. I, teor. VI, 4).

I vertici A, B, C si chiamano rispettivamente *opposti* ai lati (BC), (CA), (AB), e inversamente.

Def. III. Se due lati ad es. (AB) e (BC) del triangolo sono uguali esso dicesi *isoscele*, il terzo lato (AC) si chiama *base* del triangolo.

Def. IV. Se tutti i tre lati sono uguali il triangolo dicesi *equilatero*.

---

1) Due circonferenze soddisfano all'ass. II, soltanto che sono determinate da tre punti non in linea retta anzichè da due, eppure non sono in generale identiche.

§ 5.

Punto limite di un gruppo di punti in generale. Proprietà delle distanze di un punto dai punti di una retta.

10. *Def. I.* Per intorno di un punto dato A intendiamo il campo determinato da tutti i segmenti rettilinei uscenti da A (teor. IX, 4) uguali ad un segmento dato qualunque ε piccolo quanto si vuole (oss. IV, 4). La distanza 2ε si chiama *ampiezza* dell'intorno di A.

Oss. I. È chiaro che ogni punto di questo intorno ha da A una distanza uguale o minore di ε, perchè esso è un estremo di (o un punto interno ad) uno dei segmenti suddetti.

Def. II. Un punto L dicesi punto *limite* di un gruppo di punti (X) o di una serie di punti (X_n) quando in ogni intorno di L dato, di ampiezza arbitrariamente piccola, vi è un punto del gruppo. Nel caso della serie diremo anche che un punto X della serie si *accosta indefinitamente* al punto L o *tende* al punto L.

Teor. I. In un gruppo qualunque (X) che ha un punto limite L vi è una serie (X_n) di punti che ha per punto limite L.

Basta scegliere un intorno corrispondente a un segmento ε sufficientemente piccolo in modo cioè che in esso cada almeno un punto X del gruppo. Scelto poi un segmento ε_1 minore del più piccolo dei segmenti determinati da L con X sulle rette passanti per L e X, nel caso che L e X non determinino la retta, si può scegliere ε_1 sufficientemente piccolo in modo che nell'intorno di ampiezza $2\varepsilon_1$ cada un punto X_1 del gruppo (def. I e II). Così seguitando (int. *a*, 96) si ottiene la serie di punti $XX_1 \,....\, X_n \,....$ che ha per limite L.

Def. III. L'espressione: un triangolo *variabile* o coi *lati variabili* equivale all'altra: una serie di triangoli ABC, $A'B'C'$ ecc.

Oss. II. Come risulta dalle definizioni II e III, è chiaro che il linguaggio del movimento (oss. I, 3 opp. int. 67) è usato qui per maggior comodità, ma che se ne potrebbe anche far senza, ogni qualvolta lo si usi in questo senso, adottato nella introduzione per le forme puramente astratte.

Oss. III. A noi interessa ora di sapere come si comporta il lato di un triangolo ABC (def. II, 9) quando uno dei suoi lati ad es. (AC) diminuisce indefinitamente (oss. IV, 4, int. def. I, 95). Se i tre punti ABC sono in linea retta allora se C si accosta indefinitamente ad A il segmento (BC) si accosta indefinitamente ad (AC) (int. def. IV, 95 e ass. II, *a*). Ma nel caso che ABC non siano in linea retta, come supponiamo, allora non possiamo dedurre questa proprietà dalle precedenti. La differenza dei segmenti (AB) e (AC) potrebbe rimanere superiore ad un segmento dato quando C si accosta ad A [1]). Ricorriamo dunque all'osservazione (fig. 5):

fig. 5.

Oss. emp. La osservazione ci dice appunto che quando (AC) è sufficientemente piccolo possiamo ritenere $(AB) \equiv (BC)$. Diamo dunque il seguente assioma:

---

1) È noto infatti dalla teoria delle funzioni di una o più variabili continue reali (Vedi ad es.: Dini. — Fondamenti per la teoria delle funzioni ad una variabile reale — Pisa 1878) che esse possono essere continue o discontinue. Ora ogni punto C della retta AC dà una retta e quindi un segmento con B, e perciò (BC) è funzione della posizione di C sulla retta AC. Ma l'essere funzione semplicemente anche se C descrive un continuo non significa che la funzione sia continua.

Ass. IV. **Se un lato di un triangolo qualunque diventa indefinitamente piccolo, la differenza degli altri due lati diventa pure indefinitamente piccola.**

Coroll. Se due lati di un triangolo diventano indefinitamente piccoli, anche il terzo lato decresce indefinitamente.

Se il terzo lato si mantenesse superiore a un segmento dato ε, la differenza di questo lato con uno degli altri due non diventerebbe indefinitamente piccola col decrescere indefinito degli altri lato, contro l'ass. IV (int. def. IV, 95).

Teor. II. Se due punti A e B hanno per punto limite un punto C, il loro segmento su ogni retta passante per essi tende a zero.

Se A e B determinano la retta e sono in linea retta con C il teorema riassume i teor. *f*, *h* e *i* del n. 95 dell'introduzione (ass. II, *a* e oss. IV, 4). Se invece non sono in linea retta con C, essi determinano con C un triangolo, sempre nel caso suddetto (coroll. I, teor. VI, 4 e def. II, 9), ed il teorema non è che il coroll. dell'ass. IV stesso (int. *d*, 95). Se A e B non determinano la retta, possiamo supporre che la determinino con C, perchè il caso contrario l'abbiamo già considerato (teor. VI, 4). Vi è però una retta, e per ipotesi, una sola, che passa pei tre punti ABC (coroll. teor. IX ass. II, *a* e oss. I, 4), e per essa vale la dimostrazione del primo caso. Sia α il segmento determinato da A e B sopra un'altra retta r_1 che non passa per C (def. I e II, 6), e scegliamo in questo segmento un punto D, quanto si vuole vicino ad A, in modo che $(BD) > \alpha - \varepsilon$, essendo $(AD) < \varepsilon$ (oss. IV, 4 e int. *b*, 95). Il punto D determina sempre una retta con C, perchè C è fuori della retta ABD (ass. II, *b*), e quando A e B si avvicinano indefinitamente a C, e D si accosta indefinitamente ad A, D si accosta pure indefinitamente a C, (coroll. ass. IV); e quindi nel triangolo BCD, B si accosta indefinitamente a D (coroll. ass. IV). Dunque quando A e B si accostano indefinitamente a C, $(AD) + (DB)$ ossia α si accosta indefinitamente a zero (int. *h*, 95 e oss. IV, 4).

Teor. III. Se una serie di punti (X_n) ha un punto limite L, il segmento $(X_n X_{n+r})$, essendo r costante, coll' aumentare indefinito di n decresce indefinitamente.

Difatti in ogni intorno di ampiezza 2ε di L vi è almeno un punto X (def. II). Per n sufficientemente grande X_n deve cadere nell'intorno suddetto, altrimenti non vi sarebbe alcun punto X in questo intorno, contro il dato (def. II).

Gli estremi dei segmenti $(X_n X_{n+r})$ sono contenuti nell'intorno dato, per n sufficientemente grande, ma poichè ε può essere quanto piccolo si vuole, i punti dell'intorno tendono tutti a L, e quindi anche X_n e X_{n+r}; e perciò il loro segmento su ogni retta passante per essi coll'aumentare indefinito di n tende a zero (teor. II).

Teor. IV. Il punto X_n della serie (X_n) avente un punto limite L col crescere indefinito di n non può avvicinarsi indefinitamente che al punto L.

Difatti supposto che si avvicini a due punti distinti dati L e L', poichè $(X_n L)$ e $(X_n L')$ tendono a zero (def. II e int. *d*, 95), la somma dei segmenti $(X_n L)$ e $(X_n L')$ avrebbe per limite lo zero, e nello stesso tempo avrebbe per limite un segmento dato (LL'), ciò che è impossibile (ass. IV).

Teor. V. Se la distanza di un punto R dai punti X di una retta va diminuendo indefinitamente, il punto R appartiene alla retta.

Intanto è permesso di parlare di una sola distanza del punto R da un punto X della retta, perchè R e X determinano sempre la retta, se R è fuori di essa (ass. II, *b*; opp. oss. II, 2); e su di essa determinano sempre una sola distanza (def. I e II, e oss. I, 6). Essendo R un punto limite di una serie (X_n) di punti della retta, il segmento $(X_n X_{n+r})$ va diminuendo indefinitamente (teor. III), e quindi i due punti X_n e X_{n+r} tendono a R (def. II). Nel caso che i punti di (X_n) determinano due a due la retta essi hanno un punto limite (int. *b*, 98), che deve coincidere con R (teor. IV). Se invece non determinano la retta (è un' ipotesi ancora non esclusa), poichè X_n e X_{n+r} tendono a R, il loro segmento in ogni retta passante per essi deve tendere a zero (teor. II); dunque la serie (X_n) ha anche un punto limite sulla retta data, il quale deve coincidere col punto R (teor. IV) VIII).

§ 7.

Gruppi di punti che due a due possono non determinare la retta.

11. *Teor. I. Se è dato un gruppo (A) di punti della retta tale:*

1.° che scelto un segmento qualunque i cui estremi siano punti del gruppo, gli estremi dei segmenti consecutivi uguali al dato in un dato verso, da ogni punto del gruppo come origine, appartengano al gruppo stesso;

2.° che un punto A di (A) non abbia un primo punto consecutivo del gruppo nel verso dato;

in ogni segmento piccolo quanto si vuole della retta (oss. IV, 4) *vi è sempre un punto del gruppo.*

a) È chiaro che ogni punto del gruppo (A) ha la 2ª proprietà del teorema. Diffatti se il punto A_m qualunque del gruppo ordinato nel verso dato ha un primo elemento consecutivo A_{m+1}, si prenda nel gruppo (A) nel verso dato il segmento $(AA_1) \equiv (A_m A_{m+1})$; A_1 è pure un punto del gruppo (1°). Ma A_1 non è il primo punto che segue A (2°), dunque nel segmento (AA_1) vi deve essere un punto del gruppo, e quindi anche in $(A_m A_{m+1})$ (1°).

b) Dimostriamo che in ogni segmento (AX) di (AA_1) per quanto piccolo vi è un punto del gruppo (A), essendo A e A_1 punti qualunque del gruppo. Se X fosse un punto del gruppo, in (AX) vi sarebbe un punto del gruppo (*a*). *Supponiamo invece che ciò non sia.* Vi deve essere un numero m tale che:

$$(AX)m < (AA_1) < (AX)(m+1) \quad \text{(oss. IV, 4 e int. } c', 81).$$

Immaginiamo, nel verso di (AX), m segmenti consecutivi uguali ad (AX), che indicheremo con $(XX_1), (X_1X_2), \dots (X_{m-1}X_m)$. Di (AA_1) rimane il segmento $(X_m A_1) < (AX)$. In (AA_1) vi deve essere un punto A'_1 del gruppo (A) (*a*), il quale do-

VIII) Coll' assioma II' si ha pure bisogno dell' ass. IV; le dimostrazioni dei teoremi si semplificano non avendo bisogno di tener conto della possibilità non ancora esclusa che due punti non determinano la retta; l'assioma IV si può dare però quando se ne presenta la necessità.

vrà quindi appartenere ad uno dei segmenti in cui (AA_1) fu diviso, eccettuato per ipotesi (AX). Ma A'_1 non può cadere in $(X_m A_1)$, perchè essendo in tal caso $(A'_1 A_1) < (AX)$, in (AX) vi sarebbe un segmento uguale ad $(A'_1 A_1)$ avente per primo estremo A (teor. II, 4) e il cui secondo estremo sarebbe un punto di (A) (1°).

Il punto A'_1 dovrà dunque appartenere ad uno dei segmenti $(X_r X_{r+1})$, ad es. nell'ultimo $(X_{m-1} X_m)$. In questo segmento non può cadere alcun altro punto A'_2 di (A), perchè se no A'_2 determinerebbe con A'_1 un segmento minore di $(X_{m-1} X_m)$, e quindi anche di (AX), e perciò vi sarebbe in (AX) un altro punto di (A) (1°), contro l'ipotesi. Non può essere del resto $(A'_1 A'_2) \equiv (X_{m-1} X_m)$, perchè i due punti A'_1 e A'_2 dovrebbero cadere nei due punti X_{m-1}, X_m e quindi X sarebbe esso pure un punto di (A) (1°), contro l'ipotesi. Ma fra A e A'_1 vi deve essere un altro punto A''_1 del gruppo (A), che cadrà in uno dei rimanenti segmenti $(X_r X_{r+1})$, ad es. nel segmento $(X_{m-2} X_{m-1})$. Non vi possono essere due punti di (A) in uno di questi segmenti perchè, per ciò che si è detto testè pel segmento $(X_{m-1} X_m)$, ve ne sarebbe uno anche in (AX), contro l'ipotesi; dunque il numero dei punti di (A) nel segmento (AA_1) sarebbe al più m, e quindi A coll'ipotesi suddetta avrebbe un primo punto consecutivo nel verso dato (int. def. II, 46 e *b*, 35), il che è contro *a*). Dunque in (AX) vi deve essere almeno un punto del gruppo (A), e perciò infiniti (oss. IV, 4 e int. *b*, 95).

c) Ora consideriamo invece un punto qualunque Y dato della retta e che non sia un punto di (A). Lo si può sempre ritenere compreso fra due punti di (A), perchè dato un segmento (AA_1) del gruppo e minore di (AY) vi è sempre un numero n tale che $(AA_1)n > (AY)$ (oss. IV, 4 e int. *d*, 80); possiamo dunque ritenere senza alcuna restrizione che Y appartenga al segmento (AA_1), come possiamo ritenere che (AY) sia diretto nel verso del gruppo (1.°).

Dimostriamo che in qualunque segmento (YZ) vi è sempre un punto del gruppo (A). Supponiamo dapprima che (YZ) sia diretto nel verso di (AA_1), e consideriamo un segmento $(AY') \equiv (YZ)$. Siccome (YZ) è piccolo quanto si vuole possiamo supporre

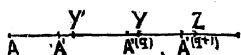



fig. 6.

$$(AY') < (AY) \quad \text{(int. } b\text{, 95)} \qquad (1)$$

Nel segmento (AY') cade sempre un punto del gruppo (b), ad es. A' che potrebbe essere anche il punto Y' stesso, e quindi si ha:

$$(AA') \leqq (AY') \qquad (2)$$

e perciò anche

$$(AA') \leqq (YZ) \quad \text{(int. } d'\text{, def. II, 61).} \qquad (3)$$

e per la (1)

$$(AA') < (AY) \quad \text{(int. } d \text{ o def. II, 61)} \qquad (4)$$

Ora si deve avere un numero q tale che

$$(AA')q < (AY) < (AA')(q+1) \quad \text{(oss. IV, 4 e int. } c'\text{, 81).}$$

Indichiamo con A'^{q}, $A'^{(q+1)}$ i secondi estremi dei segmenti $(AA')q$, $(AA')(q+1)$; il primo non cade nel segmento (YZ) ma bensì nel segmento (AY), e si ha:

$$(A'^{(q)}Z) > (YZ) \qquad (5)$$

Y è compreso invece fra $A'^{(q)}$ e $A'^{(q+1)}$, e perciò

$$(A'^{(q)}Y) < (A'^{(q)} A'^{(q+1)}). \qquad (6)$$

D'altra parte per la (3) si ha:

$$(A'^{(q)} A'^{(q+1)}) \leqq (YZ) \qquad (7)$$

e poichè Y appartiene al segmento $(A'^{(q)}A'^{(q+1)})$, il punto Z per la (7) non può cadere nel medesimo segmento (int. def. I, 61 o d, 73); dunque $A'^{(q+1)}$ deve cadere nel segmento (YZ), come si voleva dimostrare.

È chiaro che se (YZ) è diretto nel verso di (A_1A), basta considerare il segmento (ZY) e applicare ad esso il ragionamento precedente.

Coroll. Ogni punto della retta che non è punto di (A) *è punto limite del gruppo* (A).

Difatti scelto un punto qualunque X della retta in un segmento (XY) per quanto piccolo vi è un punto del gruppo.

Teor. II. Ogni gruppo (X) *di punti che due a due non determinano la retta contiene i suoi eventuali punti limiti.*

Una retta r qualunque che passa per un punto X del gruppo deve contenere tutti i punti del gruppo (teor. VI, 4). Se L è un punto limite di questo gruppo e quindi di una serie (X_n) del gruppo (teor. I, 10), esso deve essere pure contenuto nella retta r (teor. V, 10).

Teor. III. I punti di un segmento (AB) *che con un estremo di esso, ad es.* A, *non determinano la retta non possono essere in numero infinito.*

a) Se in (AB) vi è un numero infinito (∞) di punti $A_1A_2 \dots A_m A_{m+1} \dots$ che con A non determinano la retta, il gruppo di questi punti ha almeno un punto limite L (oss. IV, 4 e int. b, 98), vale a dire vi è una serie (X_n) del gruppo che ha per punto limite L (teor. I, 10), e quindi $(X_m X_{m+1})$ diventa indefinitamente piccolo (int. c, 97, opp. teor. III, 10). Ma dato un segmento $(X_m X_{m+1}) < \varepsilon$, vi è un punto A' tale che $(AA') \equiv (X_m X_{m+1})$ (teor. II, 4) e che appartiene allo stesso gruppo (teor. VII, 4), il che ha luogo per qualunque punto A del gruppo; dunque vuol dire che ogni punto del gruppo non ha un primo elemento consecutivo determinato nel gruppo ordinato nel verso di (AB). In tal caso dunque il gruppo (A) di punti che con A non determinano la retta ha le proprietà del gruppo del teor. I. Ma ogni punto Y della retta che non è un punto del gruppo (A) è limite di questo gruppo (coroll. teor. I) ed è pure punto della retta (teor. II).

Vuol dire dunque che non vi sarebbe alcun punto sulla retta che la determinerebbe con A, il che è assurdo (teor. V, 4), e ciò anche perchè tutte le rette passanti per A coinciderebbero, contro il teor. IX, 4.

Teor. IV. a) I segmenti consecutivi della serie di punti che con un punto dato non determinano la retta sono uguali fra loro in qualunque retta che contiene la serie data;

b) e i segmenti determinati da due punti qualunque della serie in due rette passanti per essi sono uguali.

a) Se i segmenti consecutivi ad es. $(A_m A_{m+1})$, $(A_{m+1} A_{m+2})$ della serie suddetta (A) non fossero uguali e fosse ad es. $(A_{m+1} A_{m+2}) < (A_m A_{m+1})$, nel primo vi sarebbe un segmento $(A_m A'_{m+1})$ uguale al secondo (teor. II, 4) e

tale che A'_{m+1} non determinerebbe con A_m la retta (teor. VII, 4), quindi A_{m+1} non sarebbe il punto consecutivo di A_m nella serie (A), mentre A ha un primo elemento consecutivo in questa serie (teor. III).

b) Siano r e r_1 due rette passanti pei punti del gruppo (A). Supponiamo che i punti A_m e A_s di (A) determinino segmenti disuguali $(A_mA_s)_r$, $(A_mA_s)_{r_1}$ in r e r_1. Scegliamo due segmenti (YA_s), (ZA_s) nei segmenti suddetti in modo che ogni punto di essi, tranne A_s, determini con A_s la retta (teor. III), e quindi anche con A_m (teor. VI, 4). Due punti qualunque Y' e Z' distinti da A_s dei segmenti (YA_s), (ZA_s) determinano una retta diversa da r e r', perchè Y' è fuori di r' (oss. I, 4); dunque essi determinano con A_s e con A_m un triangolo (def. II, 9). Ma quando Y' e Z' si accostano indefinitamente ad A_m, $(Y'Z')$ decresce indefinitamente (coroll. ass. IV), dunque anche la differenza (A_mY') e (A_mZ') in r e r_1 (ass. IV). Ma se $(A_mA_s)_r$, $(A_mA_s)_{r_1}$ fossero disuguali, ad es.: $(A_mA_s)_{r_1} > (A_mA_s)_r$, la differenza di (A_mZ') da $(A_mA_s)_r$ sarebbe maggiore di $(A_mZ) - (A_mA_s)_r \equiv \varepsilon$ (teor. I, 8), dunque (A_mZ') si manterrebbe superiore di ε al segmento (A_mY') che è minore di $(A_mA_s)_r$, contro quanto precede; dunque $(A_mA_s)_r \equiv (A_mA_s)_{r_1}$.

Oss. I. Si può parlare del punto consecutivo di ogni punto A di un gruppo che non determina la retta, perchè in ogni retta passante per A, esso ha in un dato verso lo stesso punto consecutivo. Si può parlare della distanza (def. I, 5) anzichè delle distanze di due punti, perchè in ogni retta passante per essi ne determinano una soltanto (def. I e II, e oss. I, 6), e in tutte le rette che li contengono le distanze sono uguali. Non si può però parlare di un solo segmento di due punti che non determinano la retta [1]).

Teor. V. a) Due gruppi di punti, ciascuno dei quali non determina la retta, sono situati in una sola retta.

b) I segmenti che hanno per estremi due coppie di punti consecutivi, che non determinano la retta, sono uguali.

a) Difatti se (A_1A_2), (B_1B_2) sono due coppie qualunque di due gruppi (A) e (B) che non determinano la retta, i punti A_1 e B_1 determinano sempre una retta, altrimenti A_1 e B_1 apparterrebbero allo stesso gruppo (teor. VI, 4). Questa retta contiene tutti gli altri punti di (A) e (B) (teor. VI, 4).

b) Ogni punto X di una retta che contiene un gruppo (A) appartiene ad un gruppo (X) che non determina la retta, ed è identico ad (A) (teor. II e teor. VII, 4). Ma le due coppie di punti consecutivi date (oss. I) sono sempre in una retta, dunque *b)*.

Oss. II. Questi teoremi valgono subordinatamente all'esistenza di gruppi di punti che non determinano la retta, questione che non fu ancora decisa, e che perciò dobbiamo tener presente IX).

---

1) Ciò dà una chiara conferma della distinzione fra la distanza di due punti e il segmento di essi, e come non si possa sempre indifferentemente sostituire l'uno all'altra.

IX) Coll'ass. II' questo paragrafo non occorre affatto, essendo esclusa con esso l'esistenza di coppie di punti che non determinano la retta.

§ 7.

Segmento rettilineo limite di una serie di segmenti rettilinei — Linea semplice — Distanza di un punto dai punti di una linea semplice.

12. *Def. I.* Un segmento rettilineo (AB) dicesi *limite* di una serie di segmenti rettilinei dati (XY), se i punti A e B sono punti limiti dei punti X e Y (def. II, 10), supposto che i punti A e B determinino la retta.

Teor. I. Se (AB) è segmento limite di un segmento variabile (XY), i punti X e Y in intorni sufficientemente piccoli di A e B determinano la retta.

Scelto un intorno arbitrariamente piccolo di B (def. I, 10), in esso deve cadere un punto Y (def. I). Se A e Y non determinassero la retta giacerebbero in una medesima retta r con B (teor. VI, 4), ma poichè B è punto limite di Y, la differenza di (AB) e (AY) diventa indefinitamente piccola (int. def. IV, 95), e perciò in ogni segmento (BB') in AB nel verso di (AB) o di (BA) vi sarebbe sempre un punto Y. Quindi o Y coinciderebbe con B, o avrebbe per limite Y in AB; il che è escluso, perchè B determina con A la retta (teor. II, 11). Se X non determina la retta con Y, i punti A, X, Y, sono in linea retta (teor. VI, 4), e il segmento (AX) diventa in AY più piccolo di ogni segmento dato, il che, per ciò che si è detto, è assurdo.

Teor. II. La differenza fra il segmento variabile (XY) e il suo segmento limite (AB) diventa indefinitamente piccola.

Difatti così è per i segmenti (AY) e (AB), vale a dire vi è un intorno sufficientemente piccolo di B pel quale la differenza in valore assoluto (int. 112) di (AB) e (AY), che indicheremo con $[(AB)-(AY)]$, è minore di un segmento dato s. Così per un intorno sufficientemente piccolo di A la differenza $[(AY)-(XY)]$ è più piccola di un segmento s_1 quanto piccolo si vuole. Ora la differenza o la somma delle due diferenze suddette, che è $[(AB)-(XY)]$, è minore della differenza o della somma di s ed s_1, ma in qualunque caso quando s e s_1 diventano indefinitamente piccoli, $(s-s_1)$ e $(s+s_1)$ decrescono indefinitamente (int. def. I, e h, 95); dunque il teor. è dimostrato.

Oss. I. Per la distanza limite di una serie di distanze basta la def. IV del n. 95 dell'introduzione (oss. I, 11), perchè per le distanze non si tien conto della differenza di posizione dei segmenti a cui si riferiscono (def. I, 5).

Teor. III. Se un segmento $(X_n Y_n)$ si avvicina indefinitamente ad (AB), esso non può avvicinarsi indefinitamente ad un altro segmento $(A'B')$ differente da (AB).

Difatti i punti X_n, Y_n dovrebbero avvicinarsi indefinitamente e rispettivamente alle coppie di punti (una delle quali può ridursi ad un solo punto) A e A', B e B' (def. I) il che è assurdo (teor. IV, 10).

Teor. IV. Se (AB) è limite di un segmento (XY), ogni punto della retta XY può avvicinarsi indefinitamente ad un punto della retta AB.

Ciò vale intanto pei punti X e Y (def. I; def. II, 10). Supponiamo che a segmenti indefinitamente piccoli di uno stato di (XY) corrispondano segmenti indefinitamente piccoli negli stati successivi, il che si ottiene ad es. colla corrispon-

denza di proporzionalità fra i diversi segmenti (int. 106). Così possiamo supporre pel teor. I che X e Y determinino la retta. Sia dato un punto Z_n di (XY), il quale quando X si avvicina indefinitamente ad A non si avvicini indefinitamente ad alcun punto della retta AB. Nel segmento $(Z_n X)$ vi deve essere un segmento $(Z_n Z_{n-1})$ sufficientemente piccolo tale che i punti di esso hanno la stessa proprietà del punto Z_n, altrimenti potendo essere $(Z_n Z_{n-1})$ piccolo quanto si vuole, avvicinandosi un punto di questo segmento indefinitamente ad un punto della retta AB, anche il punto Z_n godrebbe la stessa proprietà (coroll. ass. IV).

Dato quindi il segmento $(Z_n Z_{n-1})$ possiamo costruirne un altro $(Z_{n-1} Z_{n-2})$ sempre nel segmento $(Z_n X)$ che goda la stessa proprietà di $(Z_n Z_{n-1})$. I punti di $(Z_n X)$ si separano dunque in due gruppi (Z) e (Z'), cioè di quelli che godono la proprietà di Z_n e di quelli che hanno la proprietà del punto X. Essi determinano a partire da Z_n e X nel segmento $(Z_n X)$ due serie sempre crescenti, e che hanno rispettivamente i punti limiti che diremo L e L' (int. *d*, 97 e oss. IV, 4). I punti L e L' godono rispettivamente la proprietà dei punti delle serie corrispondenti. Difatti in ogni segmento per quanto piccolo (LZ) in (XZ_n), e nel verso di (XZ_n), vi è un punto che gode la proprietà di Z_n, e quindi tale proprietà ha anche L per la dimostrazione precedente. Così si dimostra che L' ha la proprietà del punto X. Ma i punti L e L' coincidono (int. *d''*, 97), il che sarebbe assurdo se Z_n non avesse la proprietà di X (int. IV, 8).

La stessa dimostrazione vale pure pel segmento $(Z_n Y)$, come anche quando il punto Z_n è sulla retta XY fuori del segmento (XY).

Coroll. I. Se (AB) *è limite di un segmento costante* (AX), *ogni punto della retta* AX *può avvicinarsi indefinitamente ad un punto della retta* AB *ad ugual distanza di esso da* A.

Siccome un punto Z_n di AX può avvicinarsi indefinitamente ad un punto C di AB così la differenza di (AZ_n) e (AC) diventa indefinitamente piccola (ass. IV).

Coroll. II. Se (AB) *è limite di un segmento* (XY) *uguale ad* (AB), *ogni punto della retta* XY *può avvicinarsi indefinitamente ad un punto della retta* AB *a distanze da* A *e* B *rispettivamente uguali a quelle del punto dato da* X *e* Y.

Dim. analoga alla precedente.

43. *Def. I.* Un gruppo di punti dicesi *isolato* quando nessuno dei suoi punti è punto limite del gruppo (def. II, 10).

Oss. I. Per la definizione di segmento o punto limite di un gruppo o di una serie di segmenti o di punti in un sistema semplice ad una dimensione (def. I, 3 opp. int. def. II, 63) valgono la def. IV del n. 95 e la def. I del n. 98 dell'introduzione che sono indipendenti dall'omogeneità del sistema (int. def, I, 68).

Def. II. Un sistema di punti ad una dimensione semplice (int. def. II, 63), tale:

1.° che ogni suo punto Y è punto limite di una serie (AX) sempre crescente e di una serie (AX') sempre decrescente di segmenti considerate nel sistema in uno dei suoi versi (int. def. II, 62 e 63), o di una sola di queste serie se è estremo del sistema (int. def. IV, 62); ed è punto limite delle serie dei punti X e X' indipendentemente dal sistema (def. II, 10), e inversamente, esso appartiene al sistema;

2.° che corrisponde univocamente e nel medesimo ordine ad una retta

(o a un segmento di retta) (int. def. III, 42); salvi eventualmente i punti di un gruppo isolato (def. I) del sistema o della retta (del segmento) ai quali non corrispondono punti della retta (del segmento) o del sistema (e che noi esecluderemo dalle nostre considerazioni); il sistema si chiama *linea semplice.*

Oss. II. **In seguito considereremo soltanto la corrispondenza colla retta non avendo bisogno di considerare altri casi.**

Coroll. I. La retta è una linea semplice (ass. II, *a*, teor. I, 4, teor. V, 10, teor. I, 8 e int. *b*, 60).

Coroll. II. Se in un segmento (AB) della linea semplice vi è un sistema di punti tale che in ogni segmento della linea per quanto piccolo di (AB) vi è un punto del sistema, ogni altro punto L del segmento è punto limite del sistema.

Difatti lo è sulla linea e indipendentemente da essa (def. I).

Coroll. III. Se la distanza di un punto dai punti di una linea semplice diminuisce indefinitamente, il punto è situato sulla linea.

Difatti esso è punto limite di una serie (X_n) di punti sulla linea (def. I) e quindi appartiene alla linea (def. I).

Teor. I. Ad un segmento (AB) della retta corrisponde un segmento (A'B') della linea semplice, e inversamente.

Difatti ad ogni punto X nel segmento (AB) della retta corrisponde un punto X' compreso fra i punti A' e B' corrispondenti nel sistema (def. I), e tutti i punti compresi fra A' e B' del sistema determinano appunto un segmento della linea aventi per estremi A', B' (int, def. III, 62).

La proprietà inversa per la corrispondenza univoca e del medesimo ordine è evidente.

Teor. II. Ad una serie di segmenti sempre crescente o decrescente in un segmento (AB) sulla retta corrisponde una serie di segmenti sempre crescente o decrescente nel segmento corrispondente (A'B') della linea semplice, avente un punto limite sulla linea.

Difatti la serie corrispondente sulla linea è sempre crescente nel primo caso nel segmento corrispondente $(A'B')$ (teor. I e def. I; int. def. I, 62 e def. II, 27 e def. I, 61). Ma la serie sulla retta ha un segmento limite (AL) (oss. IV, 4 e int. *d*, 97), al quale corrisponde un punto L' sulla linea compreso fra A' e B' (def. I). Se $(A'L')$ non è segmento limite della serie suddetta, vi è però in $(A'B')$ una serie sempre crescente di segmenti avente per segmento limite $(A'L')$ (def. I), e quindi vi sarebbero punti di questa compresi fra i punti della serie precedente e L' (oss. I), ai quali corrisponderebbero punti della retta compresi fra i punti della serie corrispondente ed L, il che è assurdo (oss. IV, 4 e int. *d*, 97). Similmente succede se la serie sulla retta fosse sempre decrescente.

Teor. III. Una serie di segmenti sempre crescente o sempre decrescente in un segmento di linea semplice ha un punto limite che appartiene alla linea.

Difatti alla serie sulla linea corrisponde una serie analoga sulla retta

---

1) Vedi int. nota n. 4, nota X e def. I, 36.

(def. I) che ha un punto limite L (oss. IV, 4 e int. d, 97), al quale corrisponde un punto L' della linea, che è punto limite della serie corrispondente (teor. II).

Coroll. I. Se i punti della linea semplice di un segmento (AB) *si separano in due gruppi* (X) *e* (X') *tali che* (AX') *sia sempre maggiore di* (AX) *o al più uguale ad uno segmento* (AX), *ed ogni segmento* (AC) *maggiore di un segmento* (AX) *e minore di un segmento* (AX') *è un segmento* (AX) *o* (AX'); *i due gruppi hanno sulla linea un punto limite comune.*

Si dimostra coll'aiuto del teor. III in modo analogo al coroll. d'' del n. 97 dell'introduzione.

Teor. IV. Data una serie di punti (X_n) *in un segmento* (AB) *di linea semplice, avente un punto limite L; e se R determina una retta con ogni punto del segmento* (AB); *la serie di segmenti* (RX_n), *determinati da un punto R e dai punti della serie data, ha per segmento limite il segmento* (RL).

Se (RX_n) *è costante,* (RL) *è uguale a* (RX_n).

Difatti se X_n si avvicina indefinitamente a L la differenza di (RL) e (RX_n) diminuisce indefinitamente (ass. IV), dunque (RL) è segmento limite della serie (RX_n) (def. I, 12).

La seconda parte del teorema è in seguito alla prima evidente.

Coroll. Per le distanze ha luogo la stessa proprietà del teor. IV *anche se R non determina sempre una sola retta coi punti del segmento* (AB).

Perchè rispetto alla distanza di due punti qualunque A e B non occorre vedere se A e B determinano o no la retta (teor. IV, 11 e def. I, 5), come non occorre tener conto della differenza di posizione dei segmenti determinati da R coi punti del segmento (AB). Per le distanze è come se i segmenti (RX_n) fossero situati in una retta con un estremo comune.

Teor. V. Se le distanze α *e* β *di un punto R dagli estremi A e B di un segmento di linea semplice sono disuguali* ($\alpha < \beta$), *la distanza di R dagli altri punti del segmento non può essere costante, nè può essere sempre maggiore di* β *o sempre minore di* α.

Se X è un punto compreso fra A e B nel segmento suddetto, (RX) non può essere costante, perchè riguardando B come punto limite di una serie di punti (X_n) in (AB) (oss. I e def. II) la distanza (RX) ha per limite la distanza (RB) (coroll. teor. IV), mentre se la differenza fra (RB) e (RX) fosse costante, cioè $\beta - \alpha$, non potrebbe diventare indefinitamente piccola (def. I, 5; oss. I, 11 e int. def. IV, 95).

È chiara per la stessa ragione la rimanente parte del teorema.

Teor. VI. Se le distanze di un punto R dagli estremi X di un segmento (AB) *di linea semplice sono* α *e* β ($\alpha < \beta$) *esiste sempre in* (AB) *un segmento per i punti del quale, eccettuati gli estremi, la distanza da R non è uguale nè ad* α *nè a* β, *ed è maggiore di* α *e minore di* β.

Difatti se non esiste un segmento $(A'B')$ contenuto in (AB) pel quale sia verificata la suddetta condizione, bisogna che per un punto X di ogni segmento di (AB) arbitrariamente piccolo, (RX) sia uguale ad α o a β. Ma siccome ogni punto del segmento (AB) sarebbe un punto limite del gruppo suddetto di punti X (coroll. II, def. II), (RX) sarebbe uguale ad α o a β (coroll. teor. IV), contro il dato per B o per A.

Il segmento $(A'B')$ può essere scelto poi in modo che (RA') e (RB') siano uguali rispettivamente ad α e β. Invero se A in (AB) non è il solo punto pel quale $(RA) = \alpha$, vi sarà una serie di questi punti X tali che (AX) è crescente nel verso di (AB), ed avrà quindi un segmento limite (AA') (oss. IV, 4 e int. *d*, 97), tale che $(RA') = \alpha$ (coroll. teor. IV), mentre A' non può coincidere con B. Analogamente per B'.

Supponiamo ora vi siano in $(A'B')$ punti X' pei quali $(RX') < \alpha$, e ordiniamoli nel verso di $(A'B')$ (int. ind. I, 64). La serie (X') o sarà limitata nel verso dato da uno dei suoi punti L, o avrà un punto limite L fuori della serie (oss. IV, 4; int. *d*, 97). La distanza (RL) non può essere per la dimostrazione precedente uguale ad α, nè può essere maggiore di α, essendo per ipotesi le distanze $(RX') < \alpha$ (coroll. teor. IV). Dunque (RL) sarà esso pure minore di α, e quindi L non può coincidere con B.

Ma per ogni altro punto X'' compreso nel segmento (LB), è $(RX'') > \alpha$ per l'ipotesi fatta. Scelto un punto X'' in un segmento (LL') arbitrariamente piccolo di (LB), (RX'') può differire da (RL) di ogni distanza arbitrariamente piccola data, e perciò anche più piccola di $\alpha - (RL) = \varepsilon$ (coroll. teor. IV). Ma essendo $(RX'') > \alpha$, ad es. $(RX'') = \alpha + \varepsilon'$, la sua differenza con (RL) sarebbe sempre maggiore di ε, qualunque fosse (LL'), contro il teor. IV.

Dunque è assurdo che vi siano punti X in $(A'B')$ tali che $(RX) < \alpha$, ed essendo escluso il caso $(RX) = \alpha$, la seconda parte del teorema è dimostrata per α. Analogamente per β.

Teor. VII. Se le distanze del punto R dagli estremi A e B di un segmento della linea semplice sono α e β ($\alpha < \beta$) vi è almeno un punto X del segmento (AB) della linea pel quale (RX) è uguale ad una distanza qualunque γ compresa fra α e β.

a) Non può essere che ogni distanza (RX) di (AB) maggiore di α sia maggiore anche di γ, perchè essendo la differenza fra γ e α data e costante (oss. IV, 4 e int. *h*, 85 e def. VII, 67), la differenza di (RX) e (RA) sarebbe sempre maggiore di una distanza data, cioè $\gamma - \alpha$, contro il teor. III. Così non può essere che ogni distanza (RX) minore di β sia minore anche di γ.

b) Supponiamo che in (AB) non vi sia nessun punto X tale che (RX) sia uguale ad α o a β, il che si può supporre senza togliere nulla alla generalità del teorema (teor. VI).

Consideriamo tutti i punti X di (AB) pei quali (RX) è maggiore di α e minore di γ. Ordinando i punti X nel verso di (AB), la serie corrispondente (RX) non può avere un valore massimo (RX_1), perchè fra questo e γ vi sarebbe sempre, come fra (RA) e γ, un segmento almeno maggiore di esso e minore di γ (*a*), che apparterrebbe quindi al gruppo suddetto.

Di più possiamo supporre che sia data una serie (X_n) dei punti X nel verso di (AB) tale che se $(AX_n) > (AX_m)$ si abbia $(RX_n) > (RX_m)$.

Difatti nel segmento (X_mB) esiste un segmento (X'_mB) tale che pel solo punto X'_m si ha la distanza (RX_m) mentre per ogni altro punto X_n di (X_mB) la distanza è maggiore di (RX_m) (teor. VI). La serie (AX_n) ordinata nel verso di (AB) ha un punto limite Y (int. *d*, 97) pel quale (RY) è maggiore di ogni stato di (RX_n), altrimenti se $(RY) < (RX^{(1)}_n)$ Y non sarebbe situato contro

la costruzione suddetta nel segmento $(X^{(1)}{}_n B)$. Nè può essere $(RY) < \gamma$, perchè Y sarebbe un punto X e quindi compreso in un segmento (AX_n); nè può essere in tal caso maggiore di γ perchè la differenza fra (RY) e (RX) sarebbe sempre maggiore di $(RY) - \gamma$, il che non è (def. I, 12 e coroll. teor. IV).

Il teorema è dunque pienamente dimostrato.

Teor. VIII. Se data una serie di punti (X_n) in un segmento (AB) di una linea semplice, e un punto R che determina la retta coi punti di (AB), la serie di segmenti (RX_n) ha un segmento limite; la serie (X_n) ha sulla linea un punto limite L tale che (RL) è il segmento limite di (RX_n).

Se la serie (RX_n) ha per limite un segmento nel senso della def. I del num. 12, allora (X_n) non si compone di un numero finito naturale di punti (int. def, II, 46 e def. II, 82 e oss. II, 80), e perciò (X_n) ha un punto limite L sulla linea (teor. III), dunque (RL) è il segmento limite della serie (RX_n) (teor. IV e teor. III, 12). X)

§ 8.

Ogni coppia di punti sulla retta aperta determina la retta — Soltanto due punti opposti possono non determinare la retta chiusa. XI).

14. *Teor. I. Se la retta è aperta ogni coppia di punti determina la retta.*

Se A_1, A_2 sono due punti che non determinano la retta r possiamo sempre supporre che nel segmento (A_1A_2) non vi siano altri punti che con A_1 e A_2 non determinano la retta, perchè A_1 ha sempre un primo elemento consecutivo nel gruppo (A) dei punti che eventualmente non determinano con A_1 la retta (teor. III, 11). Così per A_2 (teor. VI, 4). Dato dunque il segmento (A_1A_2) vi è una serie di segmenti consecutivi uguali ad (A_1A_2) in uno e nell'altro verso i cui estremi appartengono al gruppo (A) (teor. VII, 4). Sia R un punto fuori della retta r. Ogni punto A di r determina con R una retta r_1 (ass. II, b) la quale deve incontrare la retta r nel gruppo di punti che con A non determinano la retta (teor. VI, 4). Il punto R sarà compreso in r_1 tra due punti consecutivi del gruppo (A), perchè vi deve essere in un dato verso a partire da R in r_1 un primo punto del gruppo (A), altrimenti R sarebbe punto limite di esso, e quindi apparterrebbe alla retta (teor. II, 11). E ciò deve succedere anche nell'altro verso, perchè dato il primo punto in un verso, ad es. A_1, considerando il segmento (A_1A_2) nel verso di (A_1R) sulla retta r_1, in questo segmento deve essere contenuto anche R, altrimenti A_1 non sarebbe il primo elemento nel verso dato.

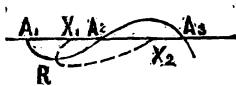



fig. 7

Possiamo supporre senza perdere nulla in generalità che R sia contenuto nel segmento (A_1A_2) di r_1 (def. I, 6), che è uguale al segmento (A_1A_2) sulla

X) Coll'ass. II occorre dare qui almeno i teoremi suddetti per la retta lasciando in disparte la def. I e i teoremi relativi alla linea semplice.

Coll'ass. II' non occorre dar qui questo paragrafo; i teoremi suddetti vanno però dimostrati almeno dopo che si è definita la circonferenza, sia per la retta come per la circonferenza allo scopo di dimostrare rigorosamente le proprietà relative ai punti di intersezione di una retta con una circonferenza e di due circonferenze fra loro.

XI) Questo paragrafo va tale e quale coll'ass. II, e va escluso coll'ass. II'.

retta r e a quello di qualunque altra retta passante per A_1 e A_2 (teor. IV. 11). Indichiamo per un momento con α la lunghezza costante del segmento determinato dai due punti A_1 e A_2 (def. I, 5). Sia inoltre A_3 il punto consecutivo di A_2 nel verso (A_1A_2) di r (int. ind. I. 64) e A_4 il punto consecutivo di A_3 ecc, del gruppo (A) (oss. I, 11). Se X_1 è un punto del segmento (A_1A_2), il segmento (RX_1) non può essere nè uguale nè maggiore di α. Difatti se fosse uguale il punto R sarebbe un punto del gruppo e apparterrebbe alla retta r (teor. VI, 4) contro l'ipotesi. Non può essere maggiore perchè (RA_1) è minore di α per essere compreso nel segmento (A_1A_2), e perciò vi sarebbe almeno un segmento (RY) uguale ad α (teor. VII, 13) ed R apparterrebbe al gruppo del punto Y, ossia alla retta r.

Il punto X_1 determina dunque con R un segmento minore di α, e quindi X_1 è in un dato verso il primo punto del gruppo (X) sulla retta (RX_1) a partire da R, qualunque sia il punto X_1 sul segmento (A_1A_2).

Altrettanto dovrebbe succedere per ogni punto X_2 del segmento (A_2A_3), tale che $(X_1X_2) \equiv (A_1A_2) \equiv (A_2A_3)$ (teor. V. 11).

Ma ciò è impossibile, perchè essendo $(RA_3) \equiv (RA_2) + (A_1A_2)$ ed essendo $(RA_2) < (A_1A_2)$, (RX_2) dovrebbe diventare almeno una volta uguale ad (A_1A_2) (teor. VII, 13), e quindi R apparterrebbe alla retta contro l'ipotesi. Occorre dunque, se esistono i punti A_1 e A_2, che A_3 coincida con A_1, il che è escluso nel caso della retta aperta (teor. I, 4 e int. def. II, 63). Oppure: Se X_2 si avvicina indefinitamente ad A_2, X_2 si avvicina indefinitamente ad A_3 (oss. IV, 4 int. a, 99), e la differenza di (RX_2) e (RA_3) deve decrescere indefinitamente (ass. IV), mentre $(RX_2) < \alpha$ e $(RA_3) = (RA_2) + \alpha$; il che è possibile solo quando A_3 cade in A_1, considerando per (RA_3) il maggiore dei segmenti dei punti R e A_3 sulla retta (oss. I, 6).

È dunque assurdo ammettere che sulla retta aperta vi siano coppie di punti che non la determinano.

Coroll. Se la retta è aperta due rette qualunque distinte non possono avere due punti comuni.

Perchè altrimenti vi sarebbe in esse una coppia di punti che non le determinerebbe (oss. I, 4).

Teor. II. Se la retta è chiusa è determinata da due qualunque dei suoi punti, salvo il caso possibile in cui essi siano punti opposti.

Difatti se nella dimostrazione precedente A_3 cade in A_1 allora A_1 e A_2 sono punti opposti della retta (def. III, 6), ma ogni altra coppia di punti della retta per la dimostrazione del teorema precedente determina la retta.

§ 9.

Corrispondenza d'identità fra due figure — Coppia di rette — Assioma V — Teoremi sulle figure rettilinee uguali XII).

15. *Teor. I. Ogni figura appartiene ad una figura rettilinea.*

XII) Questo paragrafo può rimanere tale e quale sia coll'ass. II come coll'ass. II'.
In un trattato elementare se sembrasse opportuno per ragioni didattiche di non dare i concetti dell'uguaglianza svolti nell'introduzione si potrebbe dare per definizione

Difatti ogni figura è data da un sistema di punti (def. I, 2), e i segmenti che congiungono due a due quei punti e quelli dei segmenti così ottenuti e così via determinano appunto una figura rettilinea (def. I, 9), che contiene la figura data (def. I, 2).

Oss. I. Ogni figura rettilinea è determinata oltrechè dai sistemi di punti che servono a costruirla (def. I, 9) da tutti i suoi segmenti rettilinei dati in posizione, vale a dire tutte le sue proprietà derivano dai sistemi dati e da questi segmenti (def. I, 9 e int. def. I, 11).

Oss. II. Si è visto (int. oss. I, 71) che abbiamo bisogno di riferirci almeno ad una forma fondamentale, colla quale si possano costruire tutte le altre forme, per poter decidere dalla costruzione stessa di due altre forme, se siano o no identiche (int. oss. III, 71), e per la quale bisogna ammettere l'identità delle parti senza costruzione, basandosi soltanto sulla def. VI, 8 dell'introduzione, per non cadere in una petizione di principio (int. oss, I, 71). Si è pure visto (int. 123) come sia più conveniente scegliere per forma fondamentale il sistema identico nella posizione delle sue parti determinato dal minor numero di elementi, e tanto più se due qualunque di questi sistemi sono identici.

La retta soddisfa a tutti questi caratteri e quindi si trova nelle migliori condizioni di ogni altra figura geometrica per essere presa come figura fondamentale. Dunque:

Conv. I. Noi consideriamo la retta quale *figura fondamentale* della geometria.

Oss. III. Come fra due forme astratte identiche si ha una corrispondenza d'idedentità (int. def. I, 60) si ha pure una tale corrispondenza fra due figure (def. I, 2). Si ha quindi:

Teor. II. In due figure uguali ...ABC...M...,... A'B'C'...M'... (ove i punti indicati cogli stessi segni, salvi gli apici, sono punti corrispondenti) figure determinate da gruppi di punti corrispondenti sono uguali (int. *b*, 60; def. III, 9).

Coroll. I. I segmenti rettilinei (e perciò anche le distanze) *determinati da coppie di punti corrispondenti di due figure uguali sono uguali* (teor. II e def. I, 5).

Coroll. II. Due figure determinate da due gruppi di punti ...ABCD...M..., ...A'B'C'...M'.... sono uguali, se le figure rettilinee che essi determinano sono uguali (i punti indicati dagli stessi segni, salvi gli apici, essendo punti corrispondenti delle figure rettilinee).

Perchè le due prime sono figure corrispondenti nelle seconde (teor. I e II).

Oss. IV. In seguito noi ci serviremo del teor. II pei soli segmenti rettilinei corrispondenti di due figure rettilinee identiche, appoggiandosi ad altri teoremi per dimostrare l'identità delle altre figure rettilinee corrispondenti.

Teor. III. Due figure rettilinee ...ABCD...M..., ...A'B'C'...M'... determinate da altre figure uguali sono uguali, se si può stabilire fra i loro punti una corrispondenza univoca tale che i segmenti rettilinei (e quindi anche le distanze) *dei punti corrispondenti siano ordinatamente uguali.*

---

di figure qnalunque uguali la proprietà del teor. III del n. 15 dalla quale poi si deducono il teor. II e i suoi corollari. I teor. VII e VIII possono esse omessi (vedi nota 1, 17).

Le due figure sono determinate in modo unico dai loro segmenti rettilinei (oss. I), e poichè sia i sistemi di punti che servono a costruirle (def. I, 9) che i loro segmenti sono ordinatamente uguali, le due figure sono uguali (int. *a*, 50 e def. III, 9).

Es. **La figura rettilinea determinata da due punti A, B distinti è data dal segmento rettilineo che passa pei due punti dati (def. II, 4), se determinano la retta; e la uguaglianza delle figure rettilinee determinate dalle coppie di punti A, B; A' e B' è data dall'uguaglianza dei segmenti rettilinei (AB), $(A'B')$.**

Se A e B non determinano la retta, i segmenti rettilinei che hanno per estremi A e B sono uguali (teor. IV, 11 e teor. II, 14); e la figura rettilinea determinata dai due punti è data da tutti i segmenti, rettilinei che hanno per estremi i punti dati e due punti qualunque di questi segmenti, e così via. La figura è data quando sono dati tutti questi segmenti, e se mediante una corrispondenza univoca e nel medesimo ordine fra i punti, i segmenti corrispondenti sono uguali, le due figure sono uguali.

Oss. V. **È da osservare che contrassegno delle due figure rettilinee determinate ad es. da due altre figure uguali (def. I, 9) sono queste stesse figure che servono a determinarle, e quindi può darsi che due figure rettilinee non identiche lo siano se si considerano determinate dal sistema di punti delle due figure determinatrici indipendentemente da queste figure (vedi es. dell'oss. II, 16).**

Conv. II. Se una figura è parte dell'altra (def. I, 2) ed hà luogo la proprietà del teor. II, allora non sono più uguali in senso assoluto (int. oss. IV, 60 e def. III, 9), ma anche in questo caso quando non occorra rilevare questa differenza le chiameremo uguali o identiche come abbiamo fatto colla conv. I, del n. 69 dell'introduzione.

Oss. IV. **Il teor. III ci dà il principio sul quale ci appoggieremo in seguito per decidere se due figure ottenute per costruzione siano o no identiche. Ma come vedremo fra poco questo principio da solo non ci basta per le proprietà ulteriori.**

Teor. IV. Due figure uguali ad una terza sono uguali fra loro.

È un'altra forma del teor. *e*, 8 dell'introduzione. Ammetendo però questo teorema soltanto pei segmenti rettilinei (int. oss. I, 71) si può dare un'altra dimostrazione, come abbiamo fatto pei numeri naturali (int. oss. V, 47 e *h*, 48). Siano (X) e (Y) le due figure uguali ad una terza (Z). Le figure (X) e (Z), (Y) e (Z) si corrispondono univocamente e nel medesimo ordine (int. dim. *b*, 60) e quindi anche (X) e (Y) (f. 42). Ora al segmento (X_1X_2) che ha per estremi due punti X_1 e X_2 di (X) corrisponde in (Z) un segmento ad esso uguale (Z_1Z_2), e a questo corrisponde in (Y) un segmento uguale (Y_1Y_2), e quindi $(X_1X_2)\equiv(Y_1Y_2)$ (int. *e*, 8); dunque le figure rettilinee (X) e (Y) soddisfacendo al teor. III sono uguali, e perciò anche le due figure date (coroll. II, teor. II).

Def. I. Diremo che m punti sono *indipendenti* fra loro quando nessuno di essi appartiene alle figure determinate dagli altri $m-1$.

Teor. V. Se in una figura m punti sono indipendenti, lo devono essere anche gli m punti corrispondenti di una figura uguale alla prima.

Siano infatti $A_1A_2 .... A_m$ gli m punti indipendenti, e supponiamo invece che i punti corrispondenti $A'_1A'_2 .... A'_m$ della seconda figura siano tali, che uno di essi, ad es. A'_1, sia situato nella figura determinata dagli altri $m-1$ (def. I), mentre A_1 non è situato fuori della figura corrispondente (def. I, 2).

Ciò significa che A'_1 coincide con un punto S' di questa figura (int. def. III, 57) e determina con esso un segmento nullo (int. def. I, 76). Ma il punto S

corrispondente di S' nella prima figura non può dare con A alcun segmento nullo, perchè A è fuori di questa figura e quindi le due figure non potrebbero essere identiche (coroll. teor. II).

Coroll. Se tre punti di una figura non sono situati in linea retta, tre punti corrispondenti in una figura uguale non possono essere situati in linea retta.

Teor. VI. Date due rette si può stabilire la loro corrispondenza d'identità a cominciare da due qualunque dei loro punti come punti corrispondenti, in uno e nell'altro verso, e in ogni corrispondenza d'identità ad un raggio dell'una corrisponde un raggio determinato dell'altra, e al raggio opposto del primo il raggio opposto del secondo.

Intanto sulla retta stessa si possono stabilire infinite corrispondenze d'identità in uno e nell'altro verso, poichè riguardando due dei suoi punti dati come punti corrispondenti, la retta è identica tanto se la si considera da ciascuno dei due punti nel medesimo verso, quanto anche nel verso opposto (teor. III, 4 e int. conv. I, 69). E perciò, se nelle due rette, che sono identiche (teor. I, 8), ad un punto A dell'una corrisponde un punto A' dell'altra, siccome la prima retta a cominciare da un altro suo punto B in un dato verso è uguale alla retta a cominciare da A nello stesso verso o nel verso opposto, ne consegue che sulle due rette date si potrà stabilire un'altra corrispondenza d'identità in modo che al punto B della prima corrisponda il punto A' della seconda, e ad un determinato raggio della prima un determinato raggio della seconda (def. I, 7). Così se A e B, A' e B' sono due coppie di punti corrispondenti delle due rette, supposto per un momento che A e B e così anche A' e B' non siano punti opposti nel caso della retta chiusa (def. III, 6), al segmento determinato da A e B sulla retta $A\ B$ (def. II, 6) corrisponde il segmento $(A'B')$ sulla seconda retta, e quindi ad un punto X dell'uno il punto X' dell'altro in modo che $(AX) \equiv (A'X')$ (teor. II, coroll. II. teor. III, 4), e perciò anche nel verso o raggio determinato dal segmento (AB) a partire da A sulla prima retta (def. I, 6 e int. f'', 63), corrisponde il raggio determinato sulla seconda retta dal segmento $(A'B')$ a partire da A'.

Ma scegliendo sulla seconda retta il punto B'_1 tale che $(A'B') \equiv (A'B'_1)$ (coroll. II, teor. III, 4) e facendo corrispondere ai punti A e B della prima retta i punti A' e B'_1 della seconda, al raggio determinato da (AB) sulla retta AB corrisponde in tal caso sulla seconda retta il raggio opposto a quello determinato da $(A'B')$, ossia quello determinato dal segmento $(A'B'_1)$ a partire da A' (def. I, 6 e int. f'', 63).

Se i punti A e B fossero opposti nel caso della retta chiusa (def. III, 6) lo sarebbero anche i punti A' e B', ed allora per stabilire la corrispondenza fra le due rette, scelto un punto X della prima retta occorre stabilire in quale delle due parti della seconda retta determinata da A' e B' deve giacere il punto X'.

16. *Def. I.* La figura rettilinea determinata da due rette (def. I, 9) la chiameremo *coppia di rette.*

Se le due rette hanno un punto comune, chiameremo questo punto *vertice* della coppia.

Se consideriamo le rette in un determinato verso, chiameremo la coppia di rette *coppia di raggi*, quando sarà necessario tener conto di questa distinzione.

Oss. I. Se due rette hanno un punto comune, nel caso della retta chiusa è ancora possibile l'ipotesi che abbiano un altro punto comune (teor. II, 14), che sarà pure un vertice della coppia. Ma per noi basta in tal caso limitarci per ora alla considerazione della coppia intorno ad uno solo dei suoi vertici.

Ind. I. Se a e b sono le rette o i raggi della coppia, la indicheremo col simbolo (ab).

Se i raggi della coppia sono determinati da due segmenti (AB), (AC) a partire dal loro estremo comune A, la indicheremo anche col simbolo $B\dot{A}C$ oppure $C\dot{A}B$.

Teor. I. Se due coppie di rette di vertici A e A_1 sono uguali, nella loro corrispondenza d'identità 1.° *al vertice dell'una deve corrispondere il vertice dell'altra ;* 2.° *ad un raggio o verso delle rette di una coppia corrisponde un determinato raggio delle rette della seconda coppia;* 3.° *due coppie di punti corrispondenti determinano segmenti uguali.*

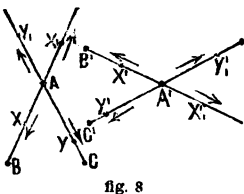
Siano AB, AC; $A'B'$, $A'C'$ le due coppie. Ad A deve corrispondere A' nella corrispondenza d'identità delle due coppie, perchè se al vertice A della prima corrispondesse per es. un punto A'_1 situato sulla retta $A'B'$ e non situato sulla retta $A'C'$, al punto A come appartenente alla retta AC non potrebbe corrispondere lo stesso punto A'_1, perchè situato fuori della retta $A'C'$, (coroll. e teor. V, 15), e siccome la corrispondenza d'identità è univoca (int. def. I, 60 e def. II, 42) A'_1 deve coincidere con A'. Nella corrispondenza d'identità, ad un verso di (AB) deve corrispondere un verso di $(A'B')$, e ad un verso di (AC) un verso di $(A'C')$ (teor. VI, 15 e def. I, 7).

Inoltre date due coppie di punti corrispondenti (BC) e $(B'C')$ delle due coppie di rette, si ha: $(BC) \equiv (B'C')$ (coroll. teor. II, 15).

Def. II. Data una coppia di raggi di vertice A, i raggi opposti (def. I, 7) determinano un'altra coppia di raggi (def. I). Le due coppie di raggi si chiamano *opposte al vertice.*

Teor. II. Se due coppie di raggi sono uguali, le coppie opposte al vertice sono pure uguali.

fig. 8

Siano AXB, AYC; $A'X'B'$, $A'Y'C'$ le due coppie di raggi uguali, e consideriamo nei raggi opposti della prima coppia a partire da A i punti X_1 e Y_1 ad es. ad ugual distanza da A dei punti X e Y. Considerando X_1 e Y_1 come appartenenti ai due raggi della prima coppia, nella seconda coppia corrispondono ad essi due punti X'_1 e Y'_1 che devono essere ad ugual distanza da A' dei punti X' e Y' corrispondenti ai punti X e Y; e perciò devono essere situati a partire da A' nella coppia opposta alla seconda (def. II). Ma si ha $(X_1 Y_1) \equiv (X'_1 Y'_1)$ considerando X_1, Y_1 : X'_1 Y'_1 come appartenenti alle coppie date (teor. I). Dunque se questi punti si riguardano invece come appartenenti alle coppie opposte si ha che i raggi dell'una corrispondono ai raggi dell'altra (teor. VI, 15), e il segmento dei due punti qualunque X_1 e Y_1

dell'una è uguale al segmento dei punti corrispondenti. Dunque due coppie qualunque di punti corrispondenti delle due prime coppie di raggi sono anche corrispondenti nelle coppie di raggi opposti, e poichè i segmenti di punti corrispondenti delle due prime coppie, sono per dato uguali, le due coppie di raggi opposti sono uguali (teor. III, 15).

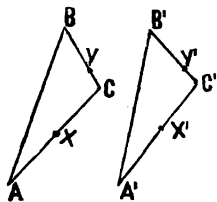



fig. 9.

Teor. III. Due triangoli ABC, $A'B'C'$ sono uguali se due lati e la coppia determinata da essi sono rispettivamente uguali.

Sia $(AB) \equiv (A'B')$, $(AC) \equiv (A'C')$, $B\dot{C}A \equiv B'\dot{C}'A'$. La corrispondenza d'identità fra le due coppie $B\dot{C}A$, $B'\dot{C}'A'$ è pienamente stabilita essendo A e A', B e B'; C e C' punti corrispondenti (teor. I). Si deve avere perciò $(BC) \equiv (B'C')$ (teor. I).

Scelti due punti X e Y, ad es. sui lati (AC) e (BC), essi sono punti della coppia AB, AC; e quindi nella coppia identica $A'B'$, $A'C'$ corrispondono ad X e Y due punti X' e Y' tali che per l'identità delle due coppie è $(AX) \equiv (A'X')$, $(XC) \equiv (X'C')$, $(BY) \equiv (B'Y')$, $(YC) \equiv (Y'C')$, e perciò:

$$(XY) \equiv (X'Y') \qquad \text{(teor. I).}$$

Si vede che ogni segmento del triangolo ABC (def. II, 9) è un segmento della coppia AB, AC, e perciò le due figure ABC, $A'B'C'$ sono identiche (teor. III, 15).

Coroll. I. Le altre coppie di rette corrispondenti e i rimanenti lati dei due triangoli ABC, $A'B'C'$, cioè $A\dot{B}C$, $A'\dot{B}'C'$; $A\dot{C}B$, $A'\dot{C}'B'$ sono uguali.

Difatti sono figure corrispondenti dei due triangoli (teor, II, 15). Usando il teor. II, 15 soltanto pei segmenti rettilinei (oss. IV, 15) si può dire: siccome i segmenti del triangolo sono anche segmenti delle sue coppie di rette, e sicle rette sono identiche (teor. I, 8), le coppie di rette corrispondenti dei due triangoli sono uguali (teor. III, 15).

O finalmente si può basarsi sull'ass. V. (vedi corroll. teor, III, 17).

Oss. II. Nella dimostrazione precedente abbiamo visto che ogni segmento rettilineo della coppia $A\dot{B}C$ è pure un segmento rettilineo del triangolo; ma il triangolo per questo non è identico alla coppia, perchè mentre la prima è data dalle due rette AB e BC, il triangolo è dato invece dai tre punti A, B, C; di questa diversità si deve tener conto appunto nel confronto delle figure rettilinee (def. I, 9 e oss. I, 15) [1].

---

1) Per dare la definizione di figure uguali si ammette comunemente il principio del movimento delle figure *senza deformazione*, del quale abbiamo già parlato nella prefazione. Bisogna distinguere il principio intuitivo del movimento stesso da quello del movimento senza deformazione. Ogni punto di una figura che si muove nello spazio si trasporta in un altro punto dello spazio. La corrispondenza fra la prima e la seconda figura è univoca, ma essa può non essere reciproca (int. def. II, 42). *Senza deformazione* significa che le mutue relazioni fra i punti della figura (poichè la figura si ritiene determinata da punti) non cambiano, ma non già quelle rispetto ad altre figure, chè altrimenti la figura non potrebbe muoversi. Volendo spiegare ulteriormente che cosa significa ciò, se non si vuol dire che due posizioni qualunque della figura sono uguali (nel qual caso si ammetterebbe già il concetto di uguaglianza fra due figure), si può dire che giunta la figura A dalla posizione A_1 nella posizione A_2, le relazioni fra i punti di A sono in A_2 come se non si fosse mossa o come se fos-

17. *Oss. I.* Abbiamo dati i teoremi precedenti nella tacita ipotesi che le figure identiche esistano; ma non sappiamo ancora se oltre alle rette vi sono altre figure identiche (teor. I, 8 e teor. IX. 4).

Affinchè sia utile il teor. III del n. 15 per la costruzione delle figure identiche è necessario che dati alcuni segmenti di una figura .... $ABCD$ .... M .... essa sia da essi pienamente determinata, in modo cioè che data un'altra figura .... $A'B'C'D'$ .... M' .... facendo corrispondere nello stesso ordine i punti che hanno le stesse lettere, se i segmenti che uniscono alcuni punti corrispondenti delle due figure sono uguali, da ciò risulti che le due figure sono necessariamente uguali.

Per es. siano date due coppie di rette AB, AC; $A'B'$, $A'C'$. Noi sappiamo che se sono identiche da $(AB) \equiv (A'B')$, $(AC) \equiv (A'C')$ si ha $(BC) \equiv (B'C')$ (teor. I, 16).

Ma inversamente quando si ha $(BC) \equiv (B'C')$ si può dire che le due coppie sono identiche? Non potrebbe egli darsi che anche essendo $(BC) \equiv (B'C')$ e costruite due coppie di punti corrispondenti qualunque (XY), $(X'Y')$ sulle rette corrispondenti delle coppie non si abbia l'identità di queste due coppie?

I principî precedenti non ci aiutano, pare, a risolvere la questione, poiche essi suppongono che o le figure siano identiche, o che perchè siano identiche siano dati tutti i segmenti determinati dai loro punti due a due, e quindi questi segmenti siano ordinatamente uguali nelle due figure date (teor. IV, 15).

Oss. emp. Ricorriamo dunque all'osservazione. E l'osservazione ci induce a ritenere per vera la proprietà che nel caso delle due coppie suddette, se $(BC) \equiv (B'C')$, le due coppie di rette siano identiche. Dunque stabiliamo il seguente assioma:

Ass. V. **Se in due coppie di raggi qualunque** AB, AC; $A'B'$, $A'C'$ **scelte due coppie di punti** B **e** C, B' **e** C' **tali che:**

$$(AB) \equiv (A'B'); \quad (AC) \equiv (A'C')$$

il segmento (BC) **sia identico a** $(B'C')$, **le due coppie di rette sono identiche.** [1])

Oss. II. Questo assioma considerato in senso puramente astratto ci dà una relazione fra due forme fondamentali (int. 71 e conv. I, 15) aventi un punto comune e in un dato verso. Esso non si appoggia adunque necessariamente sopra alcun elemento empirico.

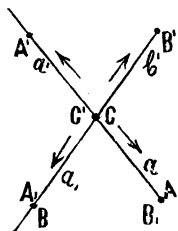



fig. 10

Teor. I. La coppia di raggi (ab) *di vertice* C *è uguale alla coppia* (ba).

Scegliamo nei due raggi a e b due punti A e B alla medesima distanza da C. Indichiamo con a_1 e b_1 gli stessi raggi b e a e con B_1 e A_1 i punti A e B. Le due coppie (ab), (a_1b_1) sono identiche essendo: $(CB) \equiv (CB_1)$, $(CA) \equiv (CA_1)$ e $(AB) \equiv (A_1B_1)$ (int. g, 99 e ass. V).

---

se ancora in A_1, e quindi, poichè A e A_1, A e A_2 coincidono, si ha $A \equiv A_1$ $A \equiv A_2$, da cui $A_1 \equiv A_2$ (int. e 8 o c, 60).

Ma se vogliamo ancora spiegare perché noi diciamo che la figura quando da A_1 passa in A_2 è come se non si fosse mossa, bisogna dire, che giudicando la figura (o il corpo astrazion fatta dalle sue qualità fisiche), dalle impressioni che produce in noi nel suo movimento, le impressioni prodotte in noi in due posizioni diverse (che sono perciò distinte nel tempo) *sono uguali*, e quindi $A_1 \equiv A_2$, cioè si fa uso del concetto di uguaglianza fra due figure distinte (vedi pref.)

In ogni caso deriva dalla definizione di figure uguali mediante il suddetto principio (che come dissimo nella pref. restringe il concetto di uguaglianza) che le due figure si corrispondono univocamente in modo che figure corrispondenti sono pure fra loro uguali. Ora nel caso del teor. III non occorre dunque trasportare la coppia ABC fino a coincidere colla coppia $A'B'C'$ ma basta dire che essendo uguali le due coppie ed essendo in queste due figure A, B, C rispettivamente corrispondenti ai punti $A'B'C'$, si ha $(BC) \equiv (B'C')$.

1) Vedi la nota seguente.

Ma (a_1b_1) è (ba), dunque il teorema è dimostrato (fig. 10).

Teor. II. Due coppie di raggi opposte al vertice sono uguali.

Indichiamo nella figura precedente con a' e b' i raggi opposti ad a e b, e consideriamo sul raggio b il punto B e sul raggio a il punto A' da C nel verso opposto di (CA) ad ugual distanza di A da C. Nella coppia (ab) ai punti A' e B, corrispondono i punti B' e A della coppia (ba), e perciò $(AB') \equiv (B'A) \equiv (BA')$ (teor. I, int. g, 99); dunque le coppie (ba'), $(b'a)$ opposte al vertice sono uguali (ass. V). Analogamente si dimostra l'identità delle due coppie opposte al vertice (ab) e $(a'b')$.

Coroll. Se sulle rette di una coppia di vertice C si considerano due coppie di punti A, A'; B, B' rispettivamente equidistanti da C; i segmenti (AB), $(A'B')$; (AB'), $(A'B)$ sono uguali.

Difatti CA, CB; CA', CB' sono due coppie di raggi opposte; dunque si ha:

$(AB) \equiv (A'B')$; $(AB') \equiv (A'B)$ (teor. II, 15), (fig. 10).

Teor. III. Due triangoli sono uguali se i loro lati sono due a due rispettivamente uguali.

Difatti siano ABC, $A'B'C'$ i triangoli, e si abbia $(AB) \equiv (A'B')$, $(AC) \equiv (A'C')$, $(BC) \equiv (B'C')$; le coppie di rette AB, AC; $A'B'$, $A'C'$ sono uguali (ass. V), e quindi anche i due triangoli (teor. III, 16).

Coroll. Le coppie rettilinee corrispondenti dei due triangoli sono uguali (ass. V).

Teor. IV. Se la somma delle distanze di un punto da due punti è uguale alla distanza di questi due punti, i tre punti sono in linea retta.

Difatti siano ABC i tre punti, e sia $(AB) + (BC) = (AC)$. Scegliamo sopra una retta tre punti $A'B'C'$ tali che $(AB) = (A'B')$, $(BC) = (B'C')$ e quindi $(AC) = (A'C')$ (int. c, 68; teor. I, 5), e perciò le due figure rettilinee ABC, $A'B'C'$ sono identiche (ass. V); dunque anche ABC sono in linea retta (coroll. teor. V. 15).

Teor. V. Se i triangoli ABC, ABD, ACD sono rispettivamente uguali ai triangoli $A'B'C'$, $A'B'D'$, $A'C'D'$ e i punti BCD sono in linea retta, i punti $B'C'D'$ sono pure in linea retta.

Difatti dall'identità dei triangoli suddetti si ha:

$$(BC) \equiv (B'C'),\ (BD) \equiv (B'D'),\ (CD) \equiv (C'D')$$

fig. 11

Se C appartiene al segmento (BD) si ha:

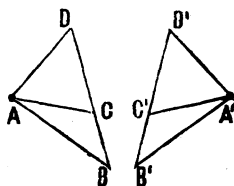
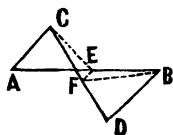
$$(BC) + (CD) \equiv (BD)$$

e quindi anche: $(B'C') + (C'D') \equiv (B'D')$ vale a dire i tre punti $B'C'D'$ sono in linea retta (teor. IV). Ma uno dei punti B, C, D deve essere compreso nel segmento degli altri due (teor. I, 4; int. def. I, 62 e b, 36), dunque il teor. é dimostrato (fig. 11).

Teor. VI. a). Se due segmenti uguali (AC), (BD) formano coppie uguali col segmento (AB), le coppie formate dai detti segmenti col segmento (CD) sono uguali.

b). La retta che unisce i punti di mezzo E, F dei segmenti (AB) e (CD), se sono distinti, forma coppie uguali colle rette (AB) e (CB).

fig. 12

Difatti i triangoli ABC, ABD sono uguali per avere

(AB) comune, $(AC) \equiv (BD)$, $B\dot{A}C \equiv A\dot{B}D$ per dato, dunque $(BC) \equiv (AD)$ (coroll. teor. III, 16).

I due triangoli ACD, BDC sono uguali per avere il lato comune (CD) e gli altri due lati rispettivamente uguali, cioè $(AC) \equiv (BD)$, $(AD) \equiv (BC)$, dunque le coppie $A\dot{C}D$, $B\dot{D}C$ corrispondenti sono uguali (coroll. teor. III) (fig. 12).

I triangoli ACF, BDF sono uguali per avere i lati (CF), (DF); (AC), (BD) uguali e le coppie da essi comprese uguali (*a*), e perciò $(AF) \equiv (BF)$ (coroll. teor. III, 16).

Per la stessa ragione sono uguali i triangoli ACE, BDE, dunque $(CE) \equiv (DE)$.

I triangoli CFE, DFE sono uguali per avere i tre lati rispettivamente uguali (teor. III), dunque le coppie $C\dot{F}E$, $D\dot{F}E$ sono uguali (coroll. teor. III). Per la stessa ragione sono uguali i triangoli AEF, BEF e quindi anche le coppie $A\dot{E}F$, $B\dot{E}F$, ed il teor. è dimostrato (fig 12).

Def. I. La figura formata da quattro punti $ABCD$ non situati in linea retta e dai quattro segmenti rettilinei che li uniscono due a due si chiama *quadrangolo semplice o quadrangolo.*

I punti dati sono i *vertici*, i loro segmenti i *lati* del quadrangolo. Per lati intenderemo anche le rette sui quali sono situati i segmenti anzidetti.

Teor. VII. Le figure rettilinee determinate da due gruppi di m punti ABCD .... M, A'B'C' .... M' sono uguali, se i segmenti rettilinei che hanno per estremi gli m punti dati sono ordinatamente uguali.

Siano dati ad es. due gruppi di quattro punti $ABCD$, $A'B'C'D'$ che supponiamo non siano in linea retta. Se non sono in linea retta quelli di un gruppo, non possono esserlo neppure quelli dell'altro. (teor. IV). La figura rettilinea del gruppo $ABCD$ si ottiene congiungendo i quattro punti fra loro mediante dei segmenti, e poi considerando i segmenti determinati dai punti dei primi, e così via (def. I, 9). Dico che in tal caso la corrispondenza d'identità è pienamente determinata dai dati del teor. stesso.

fig. 13

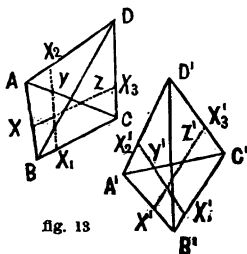
Intanto i triangoli corrispondenti che hanno per vertici tre punti dati delle due figure sono uguali per avere i tre lati uguali (teor. III).

1°. Scelti due punti X e Y in uno dei segmenti dei quattro punti $ABCD$, ad es. in (AB), o nel suo prolungamento, i punti corrispondenti X' e Y' in $(A'B')$ sono estremi di un segmento uguale, e i segmenti che essi formano con A' e B' sono uguali a quelli determinati dai punti X e Y sulla retta AB con A e B (teor. VI, 15).

2°. Scelti invece due punti X e X_1 nei segmenti (AB) e (BC), o nei loro prolungamenti, e costruiti i due punti corrispondenti X' e X_1'', siccome i due triangoli ABC, $A'B'C'$ sono uguali, si ha che le coppie di raggi AB, BC; $A'B'$, $B'C'$ sono uguali, e poichè $(BX) \equiv (B'X')$; $(BX_1) \equiv (B'X'_1)$ si ha:

$$(XX_1) \equiv (X'X'_1) \text{ (coroll. teor. III, 16, opp. teor. II, 15).}$$

Così per l'identità dei triangoli ADB, $A'D'B'$; BDC, $B'D'C'$ si ha per la stessa ragione:

$$(DX) \equiv (DX'), \quad (DX_1) \equiv (DX_1')$$

I due triangoli XDX_1, $X'D'X'_1$ sono uguali per avere i tre lati uguali (teor. III), dunque:

$$X\hat{D}X_1 \equiv X'\hat{D}'X'_1 \quad \text{(coroll. teor. III)}.$$

Scegliendo sopra (DX) e (DX_1) due punti Y e Z, e sopra i segmenti corrispondenti $(D'X')$, $(D'X_1')$ i punti corrispondenti Y', Z', si ha per la stessa ragione $(YZ) \equiv (Y'Z')$.

3.° Dati i due punti X_2 e X_1 sui segmenti (AD) e (BC), o sui loro prolungamenti, e quindi i punti corrispondenti X_2' X_1', sulle rette $A'D'$, $B'C'$ (1°.) si ha $(AX_1) \equiv (A'X'_1)$ (2°.) quindi i triangoli ADX_1, $A'D'X_1'$ sono uguali per avere i tre lati uguali (teor. III).

Così sono identici i triangoli X_2AX_1, $X_2'AX_1'$ per avere due lati e la coppia da essi compresa in A e in A' uguali, dunque $(X_2X_1) \equiv (X_2'X_1')$. Dato ora un punto X_3 della retta CD e il punto corrispondente X_3' in $C'D'$ (1°.) e due punti Y_1 Z_1 sulle rette X_1X_2, XX_3 e i due punti corrispondenti $Y_1'Z_1'$ in $X_1'X_2'$, $X'X_3'$, siccome i segmenti determinati dai quattro punti $X\,X_1\,X_2\,X_3$ sono rispettivamente uguali per le dimostrazioni precedenti ai segmenti dei punti corrispondenti $X'X_1'X_2'X_3'$, si ha: $(Y_1Z_1) \equiv (Y_1'Z_1')$.

Da ciò si scorge che i segmenti formati dai punti $ABCDXX_1X_2X_3$ sono rispettivamente uguali ai segmenti dei punti $A'B'C'D'\,X'X_1'X_2'X_3'$. Due altri punti YZ sono situati in uno o in due di questi segmenti o dei loro prolungamenti, e si presentano i tre casi 1°, 2°, 3°. Quindi si possono costruire i punti corrispondenti $Y'Z'$ in modo che risulta $(Y'Z') \equiv (YZ)$. Considerando come coppia di punti Y,Z, ad es. Y e uno dei punti già costruiti, cioè $ABCD\ XX_1X_2X_3$, ad es. A, si ha per la stessa ragione

$$(YA) \equiv (Y'A').$$

Dunque i punti Y e Z, Y' e Z' hanno rispettivamente le stesse distanze dai punti corrispondenti così costruiti.

Dati due punti qualunque V e V_1 della prima figura essi sono situati in segmenti o in prolungamenti di segmenti corrispondenti già costruiti (1°.); oppure in segmenti o prolungamenti di segmenti corrispondenti già costruiti le cui rette hanno un punto comune, senza escludere che ne abbiano anche un altro (2°.); o finalmente sono situati in segmenti o prolungamenti di segmenti già ottenuti, le rette dei quali non hanno un punto comune (3°.). In ogni caso si ha: $(VV') \equiv (V_1V_1')$; dunque si può stabilire fra le due figure rettilinee $ABCD$, $A'B'C'D'$ una corrispondenza univoca tale che i segmenti dei punti dell'una siano ordinatamente uguali ai segmenti dell'altra, e perciò le due figure sono identiche (teor. III, 15).

La stessa dimostrazione vale evidentemente anche nel caso si tratti di un numero qualunque m di punti, perchè si dimostra successivamente la uguaglianza delle distanze dei punti corrispondenti dai punti già costruiti e fra loro (conv. II, 15).

Oss. III. Non è da confondere il teor. precedente col teor. III del n. 15, perchè mentre questo non dipende dall'ass. V, da questo assioma dipende invece il teor. VII.

Teor. VIII. La figura rettilinea formata da m raggi incontrantisi in un punto X, è uguale alla figura rettilinea formata dai raggi opposti.

Siano XA_1, XA_2, ... XA_m determinati dai segmenti (XA_1), (XA_2), ..., (XA_m) a partire da X. Sui raggi opposti consideriamo i punti A_1', A_2', ..., A'_m tali che:

$$(XA_1) \equiv (XA_1'); \ (XA_2) \equiv (XA_2'), \ \ldots\ldots, \ (XA_m) \equiv (XA_m').$$

Facciamo corrispondere X a sè stesso, i punti A_r ai punti A'_r; Essendo le coppie di raggi opposte al vertice XA_r, XA'_s; XA'_r, XA'_s uguali (teor. II) si ha $(A_r A_s) \equiv (A'_r A'_s)$ (coroll. teor. III, 16), e quindi i segmenti determinati m punti A_1, A_2, ..., A_m sono uguali a quelli dei segmenti degli m punti corrispondenti A_1', A_2, ..., A'_m. Le due figure rettilinee A_1, A_2, ..., A_m; A_1', A_2', ..., A'_m sono identiche (teor. VII), e perciò anche le figure XA_1A_2, ... A_m, $X'A_1'A_2'$ .... A_m; dunque il teorema è dimostrato (teor. VII).

Ad una retta di una figura corrisponde una retta della seconda (coroll. teor. VI, 15), e quindi se tre punti A_r, A_s, A_r sono in linea retta lo sono anche i tre punti corrispondenti A'_r, A'_s, A'_r. [1]).

§ 10.

Ipotesi I e II sulla retta assoluta XIII).

18. *Oss. I.* Finora noi abbiamo considerata tacitamente la retta rispetto ad una sola unità corrispondente all'unità sensibile (oss. IV e oss. emp. I, 4), ed abbiamo dati gli assiomi che valgono rispetto a questa unità.

Come abbiamo fatto nell'introduzione colle ip. III, IV, V, VII, VIII, vogliamo ora stabilire alcune ipotesi le quali non contraddicano agli assiomi già dati e non si contraddicano fra loro, e ci permettano non solo di allargare il campo della geometria ma di servirci poi di esse per studiare le proprietà del campo finito stesso rispetto ad un' unità sotto un punto di vista più generale [2]).

Nelle note contrassegnate con numeri romani indicheremo minutamente la via da seguire senza ricorrere a queste ipotesi.

Ip. I. **La retta è un sistema di punti ad una dimensione identico nella posizione delle sue parti, continuo assoluto e determinato da due dei suoi punti distinti.**

---

1) Di questi due ultimi teoremi daremo un'altra dimostrazione in ogni spazio speciale che noi considereremo (compreso anche il piano). Le dimostrazioni qui date hanno il vantaggio di essere indipendenti dal numero delle dimensioni dello spazio, e quindi di valere sia nello spazio generale (def. II, 2) come in ogni altro spazio speciale.

L'ass. V è subordinato all'esistenza delle coppie rettilinee identiche. I teoremi di questo numero ci danno l'esistenza di figure identiche nello spazio generale.

In conformità a ciò che abbiamo detto nella prefazione e nella nota 1, 16 osserviamo che, come si vedrà, nello spazio generale due figure determinate da due ennuple di raggi opposti limitati ad un punto sono uguali anche adottando per criterio dell'uguaglianza di due figure quello della sovrapposizione mediante il movimento senza deformazione; che se si dice comunemente che due triedri opposti al vertice nello spazio ordinario non sono uguali, ciò dipende appunto perchè si restringe il concetto dell'uguaglianza (int. oss. III, 9 e oss. III, 58), come qui si vede trattando la geometria indipendentemente dalle dimensioni dello spazio o nello spazio generale (oss. III, 2, e oss. IX, 4). Vedi l'ultimo paragrafo di questo capitolo, e i paragrafi analoghi dei capitoli successivi.

XIII) Questo paragrafo va naturalmente escluso.

2) Vedi pref.

Oss. II. Che questa ipotesi non contraddica all'assioma II, *a* che si riferisce tacitamente all'unità sensibile (oss. IV, 4) fu già dimostrato nell'introduzione, e d'altronde l'ass. II, *a* non stabilisce che la retta non possa essere continua in senso assoluto, dimodochè l'ip. I potrebbe essere contenuta fin da principio nell'ass. II, *a* aggiungendo in questo assioma che la retta è continua assoluta (int. def. I, 101). Nè l'ip. I contraddice agli altri assiomi che riguardano il di fuori della retta (int. def. VI, 13), e tacitamente il solo campo finito rispetto ad un'unità (oss. IV, 4). Anzi dall'ip. I, si deduce che la retta è continua rispetto ad ogni segmento di essa come unità (int. *b*, 101).

L'ip. I non contraddice neppure all'intuizione che si esercita nel campo finito dell'unità sensibile, nel senso che l'infinitesimo è nullo rispetto a questa unità (oss. emp. I, 4 e int. *b'*, 91), ma non già nel senso che un segmento infinitesimo ed uno infinito siano contemporaneamente intuitivi. È perciò che il sistema assoluto dato dall'ip. I non ha che un valore astratto ed ha valore geometrico in quanto questa colle altre ipotesi che daremo in seguito, ci aiuta, come si vedrà, nello studio del campo finito relativamente ad ogni unità.

Oss. III. I teor. I-V del n. 4 che dipendono unicamente dall'ass. II, *a* valgono evidentemente anche in senso assoluto.

Ip. II. **Due rette coincidono in senso assoluto se hanno in comune il campo relativo ad un unità qualunque a partire da ogni punto come origine** (int. def. I, 107).

Oss. IV. La coincidenza di due rette nel campo finito relativamente all'unità sensibile, se non è stabilito che i loro punti in senso assoluto non coincidono, possiamo ritenerla quale coincidenza assoluta (int. def. III e V, 57 e ad es. *a''*, 109), e la prima ipotesi che si presenta alla mente, è che quando coincidono nel campo dell'unità sensibile, coincidano in senso assoluto in tutta la loro estensione (int. def. I, 82).

19. *Oss. I.* Pel nostro scopo basta che limitiamo la retta ai segmenti finiti, infiniti e infinitesimi di ordine finito rispetto ad un'unità fondamentale (def. VII, 92), che come sappiamo formano un gruppo chiuso nel senso del teor. *m*, 93 dell'introduzione, e quindi non occorrono le considerazioni relative ai segmenti (e quindi anche ai numeri) infiniti e infinitesimi d'ordine infinito; anzi in seguito ci limiteremo ai campi di due sole unità.

Riportiamo qui alcuni dei teoremi dell'introduzione che maggiormente ci serviranno in seguito, o che meglio fanno conoscere la natura della retta in senso assoluto.

Teor. I punti all'infinito in un dato verso coincidono in un solo punto rispetto ad un segmento unitario qualunque (int. *i*, 85).

Oss. II. Quando diremo punti all'infinito rispetto ad un'unità senz'altro intenderemo in senso assoluto i punti del campo all'infinito di 1° ordine (int. def. IV e oss. IV, 86).

Teor. II. Sulla retta aperta vi è intorno ad un punto come origine un campo finito rispetto ad un dato segmento come unità, e vi sono dei campi infiniti e infinitesimi d'ordine n qualunque. I punti limiti all'infinito di 1°, 2°, ..., n^{mo} *ordine rappresentano rispetto all'unità fondamentale i campi all'infinito dello stesso ordine* (oss. I; oss. III, 18; int. ip. IV, def. II e III, 86 e *i'*, 85).

Oss. III. Si usa l'espressione punti limiti ad es. di 1° ordine quando non si esce dal campo finito, ma in senso assoluto non si può parlare di punti limiti all'infinito rispetto ad una data unità (int. *f*, oss. III e IV, 86).

Teor. III. Dato un segmento (*AB*) *sulla retta chiusa, esso o è finito o infinitesimo di ordine determinato n rispetto a tutta la retta, e quindi nella retta*

considerata semplicemente, rispetto ad (AB) non vi sono segmenti infiniti d'ordine superiore a n.

La retta chiusa è infinita d'ordine determinato rispetto ad un suo segmento qualunque dato.

Intorno a ciascun punto rispetto ad ogni unità (AB) vi sono nella retta chiusa un campo finito e i campi infiniti di 1°, 2°, ..., *n*^{mo} *ordine. I campi all'infinito di* 1°, 2°, ..., *(n—1)*^{mo} *ordine rispetto all'unità fondamentale (AB) nei due versi a partire dall'origine non hanno alcun punto comune, mentre i campi infiniti di n*^{mo} *ordine coincidono* (oss. I; int. *a*, 108 e *i*, 85).

Coroll. I. Rispetto all'unità (AB) in uno e nell'altro verso nella retta chiusa vi sono due punti limiti all'infinito di 1°, 2° ...., *(n—1)*^{mo} *ordine, ed un solo punto limite di n*^{mo} *ordine* (oss. I, int. *f*, 86 e *i'*, 85).

Coroll. II. I punti limiti di un dato ordine in uno e nell'altro verso rispetto all'origine A, nella retta aperta come nella retta chiusa formano segmenti uguali rispetto alla data unità (int. *b*, 107).

Oss. IV È da osservare che nel passaggio dall'unità (*AB*) ad un'unità di specie *n* (oss. I; int. def. I, 94) bisogna tener presente che gli elementi limiti corrispondenti non sono rispetto alla nuova unità elementi determinati, ma rappresentano tutto il campo all'infinito di ordine *n*.

Coroll. III. Considerando sulla retta chiusa il campo finito e infinito di 1°, 2°, ..., *(n—1)*^{mo} *ordine rispetto ad un' unità fondamentale infinitesima di ordine n relativamente all' intera retta, ogni punto di essi li divide in due parti uguali* (int. *a'*, 108).

Teor. IV. Il campo finito (e ogni campo infinilo di ordine n) intorno ad un punto rispetto ad una data unità sulla retta è anche finito (e infinito dello stesso ordine) rispetto ad ogni segmento della stessa specie dell' unità data, a partire dalla stessa origine o da un punto qualunque del campo finito (int. *e*, 86).

Teor. V. Un segmento infinito di un dato ordine n (se *n=o*, il segmento è finito) *è trascurabile rispetto ad un segmento infinito d' ordine superiore.*

Un segmento infinitesimo di un dato ordine n è trascurabile rispetto ad un segmento infinitesimo di ordine inferiore (int. *b* e *b'*, 91).

Oss. V. Un raggio della retta (def. I, 7) rispetto ad un' unità fondamentale a partire da un punto come origine fondamentale (int. def. VII, 92) ha un solo punto limite all'infinito di 1°, 2°, ..., *n*^{mo} ordine se la retta è aperta, come anche se la retta è chiusa ed *n* è l'ordine d'infinitesimo dell'unità data rispetto all'intera retta.

§ 11.

Triangolo con un lato infinitesimo — Campo finito, infiniti e infinitesimi intorno ad un punto rispetto ad un' unità — Campo finito assoluto — Ipotesi III e IV XIV).

20. *Teor. I. Se un lato (AB) di un triangolo ABC è finito, i rimanenti lati non possono essere entrambi infinitesimi.*

XIV) Anche questo paragrafo va tolto.

Difatti rispetto all' unità finita il vertice C dovrebbe coincidere con A e con B, ciò che è assurdo perchè A e B sono due punti distinti rispetto all'unità (AB) (int. b', 91 e b, 81).

Coroll. I. Se due lati di un triangolo sono finiti, il terzo lato non può essere infinito.

Perchè i due primi lati sarebbero infinitesimi rispetto al terzo (int. def. III, 86).

Coroll. II. Un triangolo non può avere un lato finito, un altro infinito e il terzo infinitesimo.

Considerando il secondo lato come finito gli altri due sono infinitesimi (int. e, 82).

21. *Def. I.* Consideriamo tutte le rette che contengono un punto S, e in ciascuna di queste rette prendiamo come origine fondamentale S e con l'unità fondamentale s (int. def. VII, 92). Tutti i punti a distanza finita da S in queste rette in uno e nell'altro verso determinano ciò che chiameremo *campo finito intorno al punto S rispetto all'unità s.*

Oss. I. Tacitamente ci riferiamo qui ad un punto S del campo finito rispetto al quale abbiamo stabiliti gli assiomi precedenti (oss. IV, 4). Il campo finito intorno ad un punto S non si riduce ad una sola retta (teor. IX, 4 che a maggior ragione vale in senso assoluto (int, def, III e V, 57).

Def. II. Se si considerano in tutte le rette suddette a partire da S in uno e nell'altro verso tutti i segmenti infinitesimi di n^{mo} ordine rispetto all'unità s, essi determinano il *campo infinitamente piccolo di n^{mo} ordine intorno ad S e rispetto all'unità fondamentale s* (oss. I, 19).

Oss. II. Il campo finito contiene (def. I, 2) i campi infinitesimi del punto S, e quindi quando parleremo dei punti del campo finito del punto S intenderemo anche in senso assoluto i punti dei campi infinitesimi di S, vale a dire quando diremo che un punto appartiene al campo finito del punto S in senso assoluto e senz' altra condizione intenderemo che esso non è a distanza infinita da S, sempre però rispetto all'unità fondamentale scelta. Se ci occorrerà di dire che esso è a distanza finita anzichè a distanza infinitesima, o inversamente, lo diremo esplicitamente quando non risulterà chiaro dal discorso stesso.

Def. III. Se la retta è aperta intorno al punto S abbiamo i campi infiniti di 1°, 2°, ... n^{mo} ordine sopra ogni retta rispetto all'unità fondamentale s a partire da S (teor. II, 19), e quindi intorno ad S nello spazio generale (def. II, 2 e teor. X, 4) abbiamo dei *campi infiniti di* 1°, 2°, ..., n^{mo} *ordine rispetto alla data unità fondamentale.*

I punti limiti all'infinito sulle rette intorno ad A ci danno i *campi limiti all'infinito di* 1°, 2°, ..., n^{mo} *ordine.*

Oss. III. Se la retta è chiusa e la data unità s è infinitesima di 1° ordine rispetto all'intera retta, si ha il solo campo infinito di 1° ordine, che in questo caso anche in senso assoluto chiameremo infinito soltanto, non essendovene altri.

Se invece la data unità fosse infinitesima d'ordine n rispetto all'intera retta (oss. I, 19), questa avrebbe a partire da S due punti limiti distinti di 1°, 2°, ... $(n-1)^{mo}$ ordine e due punti limiti coincidenti di ordine n (coroll. I, teor. III, 19). In tal caso si ha intorno ad S un campo all'infinito di 1°, 2°, ..., n^{mo} ordine rispetto all'unità data.

Def. IV. Tutta la figura determinata dalle rette passanti pel punto S, la chiameremo *campo finito assoluto* intorno al punto S (int. def. IV, 92) [1]).

22. *Ip. III.* **Nel campo finito assoluto intorno ad un punto** S **valgono gli assiomi** II, *b*, III, IV **e** V.

Oss. I. Noi partiamo dal campo finito rispetto all'unità fondamentale s che corrisponde all'unità sensibile per la quale abbiamo dati gli assiomi (oss. I, 21). Ammettendo l'ip. III, essa non viene a contraddire alla validità di questi assiomi nel campo suddetto. Coll'ass. II, *b* valevole in senso assoluto non è escluso che le rette distinte passanti per S nel campo dell'unità s non siano coincidenti rispetto ad un'unità infinita o infinitesima. È escluso però che lo siano in senso assoluto per l'ip. II stessa, e quindi la prima parte dell'ass. II, *b* che ha luogo nel campo dell'unità s, relativamente a questa unità potrebbe non valere in un campo infinitesimo o infinito.

Sussistendo gli ass. III, IV e V in senso assoluto, a maggior ragione valgono nel campo finito di un'unità, sia perchè l'uguaglianza assoluta ci dà anche l'uguaglianza relativa (int. def. III e IV, 9), come del resto si vede esaminando gli assiomi III e V, sia, per il IV, perchè quando un segmento diventa indefinitamente piccolo in senso assoluto tale diventa pure in senso relativo (int. def. II. 100 e def. I, 95).

Come l'ip. I si può ritenere compresa nell'ass. II, *a* (oss. II, 18) l'ip. III, in quanto riguarda gli ass. III, IV e V, può ritenersi compresa in questi assiomi, quando si considerino in senso assoluto, e non come abbiamo fatto noi tacitamente in senso relativo (oss. IV, 4). Così anche per l'ass. II, *b*; soltanto che alla prima parte di esso bisognerebbe aggiungere che vale anche nel campo relativamente ad un' unità s in conformità a quanto abbiamo detto precedentemente.

Avremmo potuto dunque trattare addirittura la geometria in senso assoluto includendo le ip. I, II e III nei rispettivi assiomi.

Teor. I. Ogni punto X deve essere situato in uno dei campi finiti intorno al punto S.

Difatti scelta una retta pel punto S, se X è fuori di questa retta, esso determina con S la retta (ass. II, *b* e ip. III).

Teor. II. Due punti X e Y qualunque appartengono ad un campo finito intorno ad S.

Difatti passano per essi due rette SX, SY, e se $(SY) \geqq (SX)$ (def. I, II, 6) basta cosiderare come unità del campo finito il segmento (SY) (oss. II, 21).

Oss. II. In senso assoluto sussistono colle stesse dimostrazioni il teor. VI, 4 e i suoi corollari, il teor. VII, IX e X; il teor. VIII è conseguenza dell'ip. II.

Teor. III. Se due lati di un triangolo sono finiti e il terzo è infinitesimo, i due primi lati sono uguali rispetto a qualunque unità, e coincidono rispetto all'unità finita ed ogni unità infinita.

Siano ABC i vertici del triangolo, (AC) il lato infinitesimo. Rispetto all'unità finita A e C coincidono, perchè (AC) è trascurabile rispetto ad ogni segmento finito (teor. V, 19).

Ma A e B determinano una sola retta, altrimenti i tre punti ABC non formerebbero un triangolo (def. II, 9 e teor. VI, 4 e oss. II); e poichè A e C coincidono rispetto all'unità finita, rispetto alla medesima unità coincidono anche i segmenti (AB), (AC), che perciò sono uguali rispetto ad essa.

---

1) Vedi oss. I, 19 e int oss. IV, 92.

La stessa cosa vale a maggior ragione per ogni unità infinita (teor. V, 19). Per un' unità infinitesima dello stesso ordine di (AC) relativamente ad A o C come origine, A e C non coincidono, perchè (AC) è finito rispetto ad essa (oss. I, 19 e a, 86). I segmenti (AB) e (BC) sono infiniti rispetto a questa unità, dunque essi sono uguali rispetto ad essa (teor. I, 19 e teor. I, 8).

Così dicasi rispetto ad un' unità infinitesima di ordine inferiore di (AC) (fig. 5).

Coroll. I. Se in un triangolo un lato è finito e un altro lato è infinito di ordine n, il terzo lato è pure infinito del medesimo ordine, e i due ultimi lati coincidono rispetto ad ogni unità infinita.

Difatti sia (AB) infinito di n^{mo} ordine, (AC) finito, vale a dire (AC) sia infinitesimo di ordine n rispetto ad (AB) (oss. I, 19; int. def. III, 86). In tal caso rispetto ad (AB) come unità, i punti A e C e i segmenti (AB) e (BC) coincidono; vale a dire (BC) è finito rispetto ad (AB), ossia è infinito d'ordine n rispetto ad (AC) (oss. I, 19; int. a, 86).

Oppure anche: se (BC) fosse infinito di ordine superiore ad (AB), ciò contraddirebbe al ter. I, 20.

La seconda parte del coroll. dopo la dimostrazione della prima è sotto un' altra forma il teor. III stesso.

Coroll. II. Se in un triangolo un lato è infinitesimo e un altro è finito, il terzo lato è pure finito.

E un' altra forma del coroll. I.

Coroll. III. Se un lato di un triangolo è finito e gli altri due sono infiniti, questi lati coincidono rispetto ad un' unità infinita.

I due lati infiniti devono essere del medesimo ordine, cioè finiti fra loro (coroll. I). Rispetto ai due lati infiniti, che sono finiti fra loro, il terzo lato è infinitesimo (int. def. II, 82), dunque il coroll. è dimostrato.

Oss. III. Non risulta però dal teor. III che se (AC) è un segmento finito come i due lati (AB) e (AC), questi due lati non possano coincidere rispetto all' unità finita; in tal caso i tre punti ABC non formerebbero però un triangolo rispetto a questa unità, ma potrebbero formarlo in senso assoluto.

Def. Diremo che due rette aventi un punto comune X sono in senso assoluto *infinitamente vicine* in un campo finito intorno al punto suddetto, quando sulle due rette vi sono due punti a distanza finita da X e infinitamente vicini rispetto all' unità data.

Teor. IV. Se due rette aventi un punto comune A sono infinitamente vicine (e perciò coincidenti) *rispetto ad una data unità, e presi due punti B' e C su di esse a distanza finita da A, ciascuno fuori dell' altra retta; se la retta $B'C$ non coincide con una o l' altra delle due rette date, $(B'C)$ deve essere infinitesimo rispetto alla data unità.*

Se la retta $B'C$ coincide con una o con l' altra delle due rette, le due rette stesse coincidono rispetto all' unità data.

Un punto di ciascuna delle due rette coincide rispetto all'unità data con un punto dell'altra retta, vale a dire è a questo infinitamente vicino (def. I e teor. III); quindi i punti B' e C sulle due rette hanno ciascuno sulla retta rimanente i punti B e C' ad essi infinitamente vicini rispettivamente alla stessa

distanza da A (teor. III). I punti B, C, B' determinano un triangolo, perchè altrimenti il punto B' sarebbe sulla retta BC contro il dato.

Se (BC) è finito deve esserlo anche il lato (CB'), perchè non può essere infinitesimo (teor. I, 20), nè può essere infinito (coroll. II, teor. I, 20). Dunque la retta CB' deve coincidere rispetto all'unità colle due rette, perchè nel triangolo $CB'B$ i due lati (BC), (CB') sono finiti e (BB') è infinitesimo (teor. III).

Reciprocamente se (CB') è finito la retta CB' deve coincidere colle due rette rispetto all'unità finita.

Difatti le due rette date sono infinitamente vicine, i punti B' e C sono infinitamente vicini ai due punti B e C' ciascuno sulla retta rimanente, e quindi (BC) deve essere finito sulla retta data AC, perchè non può essere infinitesimo essendo $(B'C)$ finito e (BB') infinitesimo (teor. I, 20), nè può essere infinito (coroll. II, teor. I, 20). Ma in tal caso, per quanto si è detto sopra, la retta $B'C$ coincide con le rette date rispetto all'unità finita. Dunque se $(B'C)$ e finito la retta $B'C$ coincide con le rette date.

A

B' B

C' C

fig. 14.

Non può essere $(B'C)$ infinito, perchè (BC) è al più finito e (BB') e infinitesimo (coroll. II, teor. I o teor. I, 20), dunque se la retta $B'C$ non coincide per dato con le rette date, il segmento $(B'C)$ deve essere infinitesimo, altrimenti se fosse finito (int. f, 82) la retta $B'C$ coinciderebbe appunto colle due rette date.

Così è dimostrata la prima parte del teorema.

Ora se due rette AB', AC date, sono tali che i punti B' e C soddisfino alla condizione del teorema e la retta $B'C$ coincide con una delle due rette, ad es. con la AC, ciò significa che il punto B' è infinitamente vicino ad un punto di AC (def. I e teor. III), e quindi le due rette AB' e AC coincidono rispetto all'unità data (teor. III) (fig. 14).

Coroll. I. Se due raggi che hanno un punto comune A coincidono rispetto ad un' unità, coincidono anche i raggi opposti.

Ogni punto dato di un raggio è un punto della retta che lo contiene (def. I, 7), e quindi ogni punto della retta di un raggio coincide con un punto della retta dell'altro raggio, vale a dire le due rette hanno gli stessi punti comuni, ossia coincidono (def. I, 2 e int. def. V, 57). Ma un raggio ha un solo raggio opposto sulla retta (def. I, 7) dunque i due raggi opposti ai coincidenti coincidono essi pure (def. II, 7).

Teor. V. Se due rette aventi un punto comune A sono distinte in un campo finito intorno ad A e rispetto all' unità di questo campo, presi su di esse due punti B e C qualunque a distanza finita dal punto A, essi determinano un segmento finito di una retta distinta dalle rette date.

Difatti (BC) non può essere infinito (coroll. I, teor. I, 20), nè può essere infinitesimo perchè allora le due rette coinciderebbero e non sarebbero distinte rispetto all'unità del campo suddetto (teor. III). Nè può essere che la retta BC coincida rispetto all'unità suddetta con una delle due rette, perchè coinciderebbero per questa unità anche le due rette date (teor. IV).

23. *Oss. I.* In seguito all'oss. I del n. 22, nella quale abbiamo accennato alla possibilità che le rette distinte passanti per un punto S rispetto all' unità fondamentale s, corrispondente all' unità sensibile (oss. I, 21), coincidano rispetto ad un' unità infinita o

infinitesima, nel qual caso non varrebbe la prima parte dell'ass. II, b nel campo finito intorno ad S rispetto all'ultima unità, noi possiamo scegliere un' ipotesi che lasci inalterata la prima parte dell'ass. II, b nel campo di ogni unità intorno al punto S, e nello stesso tempo non contraddica alle ipotesi precedenti, che è quanto dire agli assiomi dati dalle ipotesi precedenti in ogni campo finito intorno ad S. Dappoichè abbiamo veduto (oss. I, 22) che rette distinte intorno ad S in un campo finito non possono coincidere in senso assoluto in ogni campo infinito o infinitesimo, così la ipotesi che si presenta spontanea alla mente, in conformità alla suddetta condizione, è la seguente:

Ip. IV. **Due rette distinte qualunque in un campo finito intorno ad un punto S e passanti per S sono distinte anche in ogni campo infinito o infinitesimo rispetto all' unità di questi campi, e inversamente.**

Oss. II. Noi supponiamo che il campo finito intorno ad S sia quello di unità fondamentale s, rispetto alla quale vale la prima parte dell'ass. II, b (oss. I, 21). L'ip. IV non contraddice alle ip. I e II, perchè la prima riguarda la retta in sè; e la seconda viene confermata dall'ipotesi stessa perchè dalla II deriva appunto la proprietà dell'ip. IV in senso assoluto (oss. I, 22); essa non contraddice all'ip. III riguardo all'ass. II, b, perchè anzi da essa si deduce che l'ass. II, b vale in ogni campo intorno ad S, ed anche, come vedremo, intorno ad ogni altro punto rispetto a qualunqne unità (teor. II, 31); essa non contraddice infine all' ip. III in quanto riguarda gli ass. III, IV e V, perchè questi trovano anzi mediante l'ip. IV la loro applicabilità anche nei campi infiniti e infinitesimi.

Teor. I. Il campo finito intorno ad un punto A rispetto ad un' unità è il campo finito intorno a qualunque altro punto B di esso e rispetto alla stessa unità [1]).

Basta dimostrare che i punti a distanza finita da A sono a distanza finita fra loro se non coincidono rispetto all'unità data. Siano B e C due di questi punti. Se sono in linea retta con A, la distanza (BC) è finita, poichè la differenza (BC) dei due segmenti finiti (AB) e (BC) è finita, se B e C non coincidono (int. h, 85). Se B e C non sono in linea retta, ciascuno di essi determina con A una retta, ed anche fra loro (coroll. I, teor. VI, 4 e oss. II, 22), e formano quindi con A un triangolo (def. II, 9). Ma essendo (AB) e (AC) finiti, (BC) non può essere infinito (coroll. I, teor. I, 19).

Anche se le rette passanti per A coincidessero rispetto all'unità del campo suddetto (il che come vedremo in seguito non è), il teorema varrebbe ugualmente.

Coroll. I. Se la retta è chiusa e si prende come unità di misura l'intera retta o una parte finita di essa, il campo finito è tale per ogni punto dato.

Perchè ogni punto (dello spazio generale) è un punto di una retta almeno passante per un punto dato A (oss. II, 22).

Teor. II. Il campo all'infinito intorno ad un punto A e di qualunque ordine è il medesimo rispetto a qualunque punto del campo finito del punto dato.

---

1) Rimanendo nel campo finito bisogna ammettere fin da principio come ho detto l'assioma d'*Archimede* pei segmenti rettilinei (nota IV)). Qui vediamo in fondo che basta ammetterlo per le rette contenenti un punto A, per dimostrarlo poi per quelle passanti per un altro punto B qualunque del campo finito appoggiandosi sulla considerazione degli infiniti e degli infinitesimi.

Difatti se il punto C è a distanza infinita d'ordine n da A, essendo (AB) finito, (BC) è pure infinito dello stesso ordine (coroll. I, teor. III, 22).

Def. I. Quando parleremo dell'*unità del campo finito* la intenderemo considerata sopra ogni retta a partire da un punto del campo finito stesso come origine fondamentale, altrimenti useremo l'espressione *unità finita.* Ma quando non vi sarà ambiguità scambieremo le due espressioni fra loro.

Oss. III. Parlando d'ora innanzi del campo finito e dei campi infiniti intenderemo di riferirci sempre a quelli rispetto ad un'unità qualunque data del punto S o di un altro punto del suo campo finito (teor. I), quando, s'intende, non ci riferiremo ai campi intorno a punti diversi.

Ind. In generale i punti del campo finito li indicheremo con semplici lettere maiuscole, e con lettere minuscole le rette che hanno punti nel campo finito. I punti all'infinito di ordine n (oss. I, 19), li indicheremo con lettere accompagnate dal segno ∞^n. Così per le rette. In seguito però non avremo da adoperare che il segno ∞ col quale indicheremo anche qualunque punto all'infinito rispetto ad un'unità fondamentale.

Def. II. Una retta che ha dei punti nel campo finito la chiameremo anche *retta del campo finito.*

Teor. III. Se la retta è chiusa e il campo finito si riferisce ad un'unità infinitesima di 1° *ordine rispetto all'intera retta, ogni retta passante per un punto del campo finito ha un solo punto limite all'infinito.*

Ciò è una conseguenza immediata dei teor. I, II.

Teor. IV. L'ass. II, b vale per qualunque punto X rispetto all'unità (SX) *e alle unità infinite rispetto ad* (SX).

Dato un punto X, esso appartiene al campo finito intorno ad S coll'unità (SX) (teor. I, 22), il quale campo è anche il campo finito di X rispetto alla stessa unità (teor. I). Se (SC) è un segmento finito nel campo suddetto in una retta che non contiene X e in modo che le rette (SC) e (SX) non siano infinitamente vicine (def. 22 e ip. IV), vale a dire che X non sia infinitamente vicino ad un punto della retta SC (teor. V, 22); (SC), (XC), (SX) sono finiti; quindi le rette XS, XC sono distinte rispetto alla stessa unità (teor. IV, 22), e perciò nel campo suddetto intorno ad X vale l'ass. II, b rispetto all'unità (SX).

Ogni campo infinito di un dato ordine n di A rispetto all'unità suddetta è anche il campo infinito del medesimo ordine rispetto ad X (teor. II), e considerando questo campo come finito rispetto all'unità corrispondente infinita d'ordine n, vale la la dimostrazione precedente.

Quanto alla seconda parte dell'ass. II, b basta osservare che ogni punto A determina in senso assoluto una retta con qualunque punto B di ogni retta che non contiene A (ip. III), e che tale proprietà vale a maggior ragione rispetto all'unita (AB).

Oss. IV. Dal teor. IV risulta che tanto il campo finito intorno ad X rispetto all'unità (SX), quanto i campi infiniti rispetto alle loro unità corrispondenti non si riducono ad una sola retta (oss. I, 22), perchè per la dimostrazione del teor. IV tale proprietà avrebbe anche il campo finito di unità (SX), o i campi infiniti, intorno a S; il che è assurdo (ip. III e oss. I, 21). Non sappiamo però ancora se l'ass. II, b valga anche nei campi infinitesimi intorno ad X e rispetto all'unità fondamentale (SX);

come non sappiamo ancora se l'ip. IV valga incondizionatamente per ogni coppia di rette passanti pel punto X rispetto all'unità (SX) e alle unità infinite [1]; ma finchè non dimostreremo questa proprietà intenderemo, quando parleremo di campi infinitesimi senz'altro, di riferirci sempre per ora a quelli del punto S che ancora per l'ip. IV è un punto speciale rispetto agli altri punti.

Teor. V. Se due punti qualunque B e C non determinano in senso assoluto la retta non la determinano neppure in senso relativo all' unità (BC).

In ogni retta passante per B e C, B e C determinano segmenti uguali in senso assoluto (oss. II, 22; ip, III e teor. IV, 11). In una retta passante pel punto S consideriamo un segmento $(SC') \equiv (BC)$. Qualunque sia l'unità (SC'), nel campo di questa unità intorno ad S e relativamente ad essa vi sono rette distinte passanti per S (oss. I, 21 e ip. IV), e a maggior ragione distinte in senso assoluto (int. def, III e V, 58); esse passano dunque per C' (oss. II, 22 e teor. VI, 4). Per conseguenza S e C' non determinano la retta rispetto all'unità (SC') (oss. I, 4), e perciò anche B e C relativamente all'unità (BC) (oss. II, 22, teor. VII, 4; ip. III e teor. I, 8).

Teor. VI. Due punti distinti qualunque della retta aperta, o appartenenti ad un campo infinitesimo della retta chiusa rispetto all' intera retta come unità, determinano la retta in senso assoluto.

Soltanto due punti opposti in senso assoluto nel caso della retta chiusa possono non determinare la retta.

Se X e Y sono i due punti dati, essi appartengono ad un campo finito del punto S (teor. II, 22). Se essi non determinassero la retta in senso assoluto non la determinerebbero neppure rispetto all'unità (XY) (teor. V), il che è assurdo (teor. I e II, 14).

Relativamente all'unità della stessa specie dell'intera retta (int. def. I, 94) sappiamo che due punti opposti possono non determinare la retta (teor. II, 14). Se due punti in senso assoluto non determinano la retta non possono appartenere ai campi infinitesimi di due punti A e B che non sono opposti rispetto all'unità suddetta, perchè per questi punti passerebbero più rette distinte anche rispetto a quella unità (teor. IV e V). Dunque se due punti in senso assoluto non determinano la retta, essi devono essere nei campi infinitesimi di A e A', essendo A' opposto di A. Supponiamo dunque che vi sia un punto A'' in un campo infinitesimo di ordine n intorno ad A' sulla retta, e differente da A e che non determini con A la retta. Consideriamo il segmento $(A''A''') \equiv (AA'')$ nel verso $A\,A''\,A'$ (int. d, 64); il punto A''' appartiene al campo infinitesimo dello stesso ordine intorno ad A, perchè (AA'), (AA'') differiscono di un infinitesimo d'ordine n, e la differenza dei segmenti doppî è quindi un infinitesimo dello stesso ordine, essendo essa doppia della differenza primitiva (int. d, 104 e i, 82 e b', 86). Ma A e A''' dovrebbero non determinare la retta (teor. VI, 4 e oss. II, 22), il che per quanto si è dimostrato precedentemente è assurdo.

Teor. VII. Punti distinti all' infinito di una retta del campo finito danno rette coincidenti col punto S rispetto all' unità finita, purchè nel caso della

---

[1] Vedi teor. II del n. 31.

retta chiusa le rette anzidette non incontrino la retta data in un suo punto del campo finito.

Sia Z'_∞ A Z_∞ la retta data e il punto S fuori di essa, I punti all'infinito rispetto all'unita (SA), distinti in senso assoluto, danno rette distinte perchè se coincidessero in senso assoluto, i due punti Z_∞ e Z'_∞ (ind. I) non determinerebbero la retta; ciò che è escluso se la retta è aperta, mentre nel caso della retta chiusa dovrebbero essere punti opposti (teor. VI), e quindi due altri punti all'infinito non opposti determinano la retta con S.

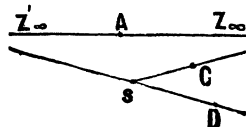



fig. 15.

Supponiamo ora che i due punti Z_∞, Z'_∞ diano due rette distinte nel campo finito intorno a S. In tal caso considerato il campo intorno ad S rispetto alla unità (SZ_∞), la retta $Z'_\infty A$ deve coincidere rispetto a questa unità colla retta $Z'_\infty S$ (teor. III, 22), e quindi colla retta $Z_\infty S$ (teor. IV, 22). Dunque rispetto all'unità infinita le due rette SZ'_∞, SZ_∞ devono coincidere, mentre per l'ipotesi fatta esse dovrebbero essere distinte (ip. IV); dunque è assurdo che SZ_∞, SZ'_∞ siano distinte.

Se uno dei punti Z_∞ è all'infinito d'ordine n e Z'_∞ all'infinito d'ordine m (oss. I, 19), le rette SZ_∞, SZ'_∞ coincidono rispetto all' unità infinita di 1° ordine con la retta AZ_∞, e quindi per la stessa ragione SZ_∞ e SZ'_∞ non possono essere distinte rispetto all'unità del campo finito intorno a S, che è anche quello intorno ad A rispetto all' unità (AS) (teor. I, 23) (fig. 15).

Si è posta la condizione che la retta passante per S e per un punto all'infinito di AZ_∞ non debba incontrare la retta AZ_∞ in un altro punto del campo finito, ad es. A, nel caso della retta chiusa, il che è ancora possibile (teor. II, 14, teor. VI, 23), perchè in tal caso i punti A S Z_∞ non formano più un triangolo e non si può più dire in generale che le rette AS e AZ_∞ coincidono rispetto all'unità infinita, perchè se ciò fosse tutte le rette passanti per A coinciderebbero rispetto all'unità infinita in una sola retta, il che è escluso (teor. IV e oss. IV, 23).

Coroll. La retta determinata da due punti all'infinito di due rette distinte del campo finito passanli per S è situata tutta all'infinito.

Difatti se fosse una retta del campo finito (def. I) essa coinciderebbe rispetto all'unità infinita colle due rette date (teor. III, IV, 22), e quindi queste due rette coinciderebbero rispetto all'unità infinita e non potrebbero essere distinte, contro l'ip. IV.

Oss. V. Nel caso della retta chiusa e che l'unità del campo finito sia infinitesima di 1° ordine rispetto all'intera retta, ogni retta del campo finito ha un solo punto limite all'infinito (teor. III), e poichè due punti limiti distinti sono dati da rette distinte passanti per S, una retta che congiunge due punti limiti all'infinito (s'intende in senso assoluto una retta che congiunge due punti all'infinito delle due rette distinte che hanno quei punti limiti) cade all'infinito.

§ 12.

Rette che uniscono un punto del campo finito con punti all'infinito XV).

24. *Teor. I. Data una retta AZ_∞ qualunque del campo finito, le rette che congiungono il punto S fuori di essa coi punti all'infinito della retta data e in un dato verso sono coincidenti rispetto all'unità del campo finito; mentre rispetto ad un'unità infinita di qualunque ordine sono coincidenti colla retta AZ_∞ stessa; sempre che nel caso della retta chiusa le rette passanti per S non incontrino la retta AZ_∞ in un altro punto del campo finito.*

Difatti le rette che congiungono il punto S (def. I, 21; oss. III e IV, 23) coi punti all'infinito della retta AZ_∞ rispetto all'unità (SA) coincidono in una sola retta (teor. VII, 23), ma non colla retta AZ_∞; mentre le rette AZ_∞ e SZ_∞ sono distinte, essendo il due punto S fuori della retta AZ_∞ (fig. 15).

Rispetto ad un'unità infinita, ad es. di 1° ordine e perciò anche di ordine superiore (int. def. II, 86), (AS) è infinitesimo, e quindi tutte le rette passanti per S e per i punti all'infinito sulla retta AZ_∞ nel verso considerato a partire da A coincidono rispetto alla nuova unità colla retta AZ_∞ stessa (teor. III, 22).

Teor. II. Se due raggi aventi un punto comune S sono coincidenti rispetto all'unità del campo finito, scelti su di essi due punti B_∞ e C_∞ a distanza infinita di 1° ordine da S, e la retta $B_\infty C_\infty$ è una retta r del campo finito distinta da quella dei due raggi coincidenti, i punti B_∞ e C_∞ sono situati nello stesso verso a partire da un punto A del campo finito sulla retta r.

Perchè se B_∞ e C_∞ fossero situati in verso opposto a partire da A, siccome le rette dei raggi $S B_\infty$, $S C_\infty$ (def. I, 7) coincidono rispetto all'unità del campo finitò (teor. VII, 23) B_∞, C_∞ sarebbero situati in versi opposti a partire da S, e quindi i due raggi sarebbero opposti e non coincidenti (def. II, 7).

Teor. III. Se i raggi SZ_∞, SZ'_∞ congiungono il punto S coi punti all'infinito di 1° *ordine o di un ordine qualunque, nel caso della retta aperta, di una retta $Z'_\infty A Z_\infty$, e si considerano sui raggi opposti a SZ_∞ e a SZ'_∞ due punti C D e a distanza finita da S, il segmento (CD) è infinitesimo; ossia le due rette SZ_∞, SZ'_∞ sono coincidenti rispetto all'unità del campo finito, ma non possono coincidere in senso assoluto.*

Nel caso della retta chiusa ciò vale per un'unità infinitesima di 2° *ordine e di ordine superiore rispetto all'intera retta. Per un'unità infinitesima di* 1° *ordine rispetto all'intera retta, le rette SZ_∞, SZ'_∞ coincidono e possono coincidere in senso assoluto, essendo escluso il caso che le rette SZ_∞, SZ'_∞ incontrino la retta AZ'_∞ in un punto del campo finito.*

XV) Questo paragrafo non occorre.

Nel caso della retta aperta (CD) non può essere infinito (teor. I, 20) ma deve essere almeno infinitesimo, perchè le due rette SZ_∞, SZ'_∞ coincidono rispetto all'unità data (teor. VII, 23). Non possono coincidere in senso assoluto perchè i punti Z'_∞ e Z_∞ non determinerebbero la retta, ciò che è assurdo (teor. VI, 23).

Ciò vale anche nei casi citati della retta chiusa, ma se l'unità è infinitesima di 1° ordine, allora i punti Z_∞, Z'_∞, se sono opposti, possono non determinare la retta (teor. II, 14 e teor. VI, 23); e in tal caso le rette SZ_∞, SZ'_∞ possono coincidere in senso assoluto.

25. *Teor. I. Se un punto X_∞ all'infinito determina la retta con un punto A del campo finito, esso determina una retta con ogni punto B di questo campo fuori della retta AX_∞.*

Difatti se B e X_∞ non determinano una retta, la retta AB dovrebbe passare anche per X_∞ (teor. VI, 4 e oss. II, 22), e quindi o per A passerebbe una sola retta, oppure B dovrebbe essere situato sulla retta AX_∞, contro il dato.

Teor. II. Se nel caso della retta chiusa e che due punti opposti non determinino la retta, l'unità del campo finito è infinitesima di 1° *ordine rispetto all'intera retta, scelta una retta AB vi sono più punti all'infinito in ambedue i versi che determinano la retta con ogni punto del campo finito.*

Si è già veduto che due punti opposti possono non determinare la retta chiusa (teor. II, 14 e teor. VI, 23). Perchè un punto X_∞ determini una retta con ogni punto del campo finito intorno al punto A nel caso della retta chiusa e di un'unità infinitesima di 1° ordine rispetto all'intera retta, bisognerà sceglierlo fuori del campo finito rispetto alla stessa unità intorno al punto opposto A' di A, perchè in caso contrario vi sarebbe sulla retta AX_∞ un punto X' nel campo finito intorno ad A tale che $X'X_\infty$ sarebbe uguale alla metà della retta, ossia $X'X_\infty$ sarebbero punti opposti (teor. VI, 23).

Conv. I. Finchè non ci decideremo per il sistema nel quale due punti opposti determinano la retta chiusa, stabiliamo che quando l'unità è infinitesima di 1° ordine rispetto all'intera retta per punto all'infinito s'intenda sempre un punto non opposto a nessun punto del campo finito.

Teor. III. Un punto all'infinito con un punto del campo finito determina una retta e un verso o raggio di questa retta (conv. I).

Ciò è chiaro se la retta è aperta o se, nel caso della retta chiusa, l'unità del campo finito è infinitesima d'ordine superiore al primo rispetto all'intera retta, supponendo sempre che quando si parla senz'altro di punti all'infinito rispetto ad un'unità si intendano quelli del campo infinito di 1° ordine rispetto all'unità (int. oss. IV; 86).

Difatti i punti ad es. A e X_∞ nel caso della retta aperta determinano sempre un segmento, è così nel caso della retta chiusa anche quando l'unità è infinitesima di 1° ordine (conv. I) e quindi il punto X_∞ determina il verso della retta a partire da A nel segmento (AX_∞).

§ 13.

Raggi e rette paralleli.

26. *Def. I.* Un raggio del campo finito (oss. III, 23; def. I, 7 e def. II, 23) dicesi *parallelo* ad un'altro raggio di questo campo, quando un punto all'infinito di 1° ordine del secondo raggio è situato sul primo, ammesso però che il punto all'infinito determini la retta con ogni punto del campo finito nel caso della retta chiusa quando l'unità del campo finito è infinitesima di 1° ordine rispetto all'intera retta (conv. I, 25).

Teor. I. Se un raggio è parallelo ad un altro, il secondo è parallelo al primo.

Difatti sia AX_∞ il raggio dato e BX_∞ il raggio parallelo. Il punto X_∞ è all'infinito di 1° ordine anche rispetto al punto B (teor. II, 23), e determina con B un solo raggio anche in ogni caso della retta chiusa (def. I).

Coroll. Due raggi paralleli ad un terzo sono paralleli fra loro.

Difatti siano r e r' i raggi paralleli al terzo raggio r''. Un punto X_∞ di r'' giace in r e in r', e poichè X_∞ è situato all'infinito di 1° ordine in r e in r' (teor. II, 23), r e r' sono paralleli (def. I).

Def. II. Le rette a cui appartengono due raggi paralleli si dicono *parallele* nel verso determinato dai due raggi (def. I, 7).

Teor. II. Due rette parallele non hanno alcun punto comune nel campo finito.

Ciò è chiaro se la retta è aperta, perchè in tal caso due rette non possono avere due punti comuni (coroll. teor. I, 14 e teor. VI, 23), ed anche nel caso della retta chiusa quando l'unità del campo finito è infinitesima di 2° ordine e di ordine superiore rispetto all'intera retta (teor. II, 14 e teor. VI, 23). Per l'unità infinitesima di 1° ordine quando la retta è chiusa, non si possono incontrare in un punto C del campo finito, perchè altrimenti i punti X_∞ e C non determinerebbero la retta contro la def. I.

Teor. III. I raggi paralleli condotti per il punto S ad un raggio coincidono in un solo raggio rispetto all'unità del campo finito.

E due raggi paralleli sono coincidenti rispetto ad ogni unità infinita (def. I, teor. I e teor. I, 24).

Coroll. Dal punto S, se la retta è aperta, o se nel caso della retta chiusa l'unità del campo finito è almeno infinitesima di 1° *ordine rispetto all'intera retta, si può condurre una sola retta parallela ad una data retta considerata in un dato verso* (teor. II, def. II).

Teor. IV. Se la retta è aperta qualunque sia l'unità del campo finito, dal punto S si possono condurre due rette parallele ad una retta data che coincidono rispetto all'unità finita, ma non in senso assoluto (teor. III, 24 e def. II).

Oss. I. Se la retta è chiusa, per un punto del campo finito intorno ad un punto A, che ha per unità l'intera retta, non passa alcuna parallela ad una retta data.

Difatti in tal caso non ha più ragione la definizione di rette e raggi paralleli, perchè non vi è rispetto all'unità data alcun punto all'infinito XVI).

XVI) Nel campo finito Euclideo la parallela ad una retta può essere definita indipendentemente dal piano nel seguente modo:

§ 14.

I due sistemi generali di geometria. Sistemi di Euclide, di Lobatschewsky e di Riemann. Ipotesi V.

27. *Oss. emp.* Cogli assiomi già dati sono possibili due sistemi di geometria quello della retta aperta e quello della retta chiusa sia in senso relativo ad un unità che in senso assoluto (teor. I, 4; oss. III, 18). Per decidere la questione bisogna vedere se l'osservazione stessa ci aiuta in proposito, imperocchè astrattamente potremmo seguitare a trattare la geometria sia nell'uno come nell'altro caso. Ma d'altronde per la definizione stessa dello spazio generale (def. II, 2) noi dobbiamo decidere i dilemmi che si presentano, e, quando non è possibile risolverli per via di deduzione, come in questo caso, bisogna ricorrere all'esperienza [1]).

Limitando la nostra osservazione all'oggetto rettilineo, a prima vista l'oggetto corrispondente alla retta, e che si ottiene immaginando prolungato indefinitamente in uno o nell'altro verso un filo teso (oss. emp. I, 4), esso ci sembra aperto: tale cioè che un punto partendo da una posizione iniziale A su di esso e in un dato verso non ritorni mai più nella posizione primitiva. Questa proprietà ha luogo realmente entro

---

Def. Se due triangoli uguali hanno due coppie di lati opposti, i lati opposti a queste coppie si dicono *paralleli*.

Siano RAB, $R'A'B'$ i due triangoli uguali con due coppie di lati opposti, il che è possibile (teor. II, 17 e teor. III, 16). In tal caso preso un punto C sul lato (AB), e dato sul raggio opposto di (AC) il punto C' ad uguale distanza da A, siccome i triangoli ARC, $A'RC'$, BRC; $B'RC'$; ARB; $A'RB'$ sono identici (teor. II, 17 e teor. III, 16) e i punti ABC sono in linea retta, lo sono pure i punti $A'B'C'$ (teor. V, 17) (vedi fig. 27).

Scegliendo un'altra retta, ad es. AC', non risulta che congiunto il punto medio R' di (AC') con un punto qualunque di AB, ad es. C, e costruito il punto C'_1 ad uguale distanza di C da R', il punto C'_1 sia situato sulla retta $A'B'$.

Ricorrendo all'esperienza, approssimativamente essa ci assicura che ciò ha luogo, e quindi diamo il seguente assioma.

Ass. VI. Per un punto passa una sola retta parallela ad una retta data.

Coll'ass. II' si dimostra che due rette parallele non possono incontrarsi, perchè se avessero un punto X comune, la retta AX incontrerebbe di nuovo le due rette in un altro punto comune X' ad ugual distanza da R, e quindi se X e X' fossero distinti le due rette avrebbero due punti comuni, contro l'ass. II'.

Ed anche se fossero coincidenti dovrebbero essere ad uguale distanza da R, e per l'assioma VI, anche da R', ciò che è impossibile (int. def. I, 61 e teor. I, 4). Coll'ass. II invece resta indeterminato fino ad ora se due rette, nel caso della retta chiusa, possano avere due punti opposti comuni, ma anche in tal caso coll'ass. VI or ora dato due rette parallele non possono incontrarsi, perchè i punti X e X' dovrebbero essere equidistanti da R e R', (teor. II, 14) il che è assurdo.

Rimane però sempre da provare sia coll'ass. II come coll'ass. II' che la retta è aperta, proprietà che dimostreremo in una delle note seguenti e che viene ammessa comunemente nei trattati elementari col postulato che la retta viene divisa da un suo punto in due parti, mentre nella retta chiusa ne occorrono due. (Vedi nota VI). Dobbiamo tener presente nelle note ulteriori, fino a questa dimostrazione, la possibilità che la retta sia aperta o chiusa, e che nell'ultimo caso coll'ass. II due punti opposti possono non determinare la retta (teor. II, 14).

1) In seguito avremo altre prove che gli assiomi suddetti valgono in ambedue i casi.

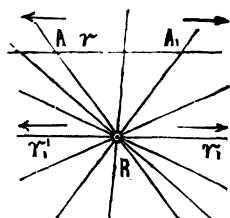
fig. 16.

il campo della nostra osservazione su quell'oggetto, che corrisponde ad una parte del campo finito intorno al punto ove trovasi l'osservatore (def. I, 21), ma ciò non significa punto che tale proprietà debba aver luogo per l'intera retta. Difatti immaginiamo un oggetto corrispondente ad una linea semplicemente chiusa, come finora dobbiamo supporre possa essere la retta (fig. 16), e supponiamo che l'osservatore non possa esplorare che la parte (AB), distinta nel disegno da un doppio tratto. È chiaro che se l'osservatore bada soltanto a ciò che vede è indotto a credere che quell'oggetto sia aperto, mentre in realtà è chiuso. E ritenendolo tale, considerando come unità un segmento finito rispetto al suo campo dell'osservazione materiale sull'oggetto, e se l'osservatore non ammette la realtà dell'infinito rispetto alla sua unità sensibile, allora l'oggetto deve essere finito. Ma il pensatore ammettendo astrattamente l'infinito, come abbiamo fatto noi e senza bisogno di ammetterne la realtà nel mondo esterno, può immaginare senza contraddirsi che costruito tutto il campo finito sull'oggetto a partire dal punto C, l'oggetto in questo campo sia aperto, ma astrattamente la linea corrispondente sia chiusa. In tal caso la sua unità sensibile sarà infinitesima rispetto all'intera retta e di un ordine qualunque dato rispetto ad essa (teor. III, 19). E se ammette che il campo sensibile sia infinitesimo di 1° ordine a partire da un punto qualunque di essa come origine, la retta sarà infinita di 1° ordine rispetto all'unità sensibile ed avrà un solo punto limite all'infinito (coroll. I, teor. III, 19). Se la ritenesse invece infinitamente grande di 2° ordine rispetto alla unità sensibile, allora la retta avrebbe a partire da un punto qualunque due punti limiti all'infinito di 1° ordine distinti nei due versi di essa a partire da un punto come origine. La stessa cosa avverrebbe se il pensatore supponesse la intera linea infinita d'ordine n (oss. I. 19) rispetto all'unità sensibile dell'osservatore.

Se poi ammette anche l'esistenza concreta dell'infinito secondo le ipotesi stabilite nell'introduzione, il che *geometricamente* non includerebbe contraddizione, e neppure è contrario all'intuizione o all'esperienza nel senso che lascia inalterate le proprietà del campo intuitivo (def. II, 2); e supponendo inoltre l'esistenza di un altro essere la cui unità sensibile fosse infinita di n^{mo} ordine rispetto alla nostra, quella linea rispetto a questo nuovo osservatore non sarebbe più infinita (int. c, 91; a, 86 e coroll. I, teor. III, 19). E se il secondo osservatore potesse senza contraddirsi supporre soltanto l'esistenza del primo, come pensatore, se valessero per esso gli stessi principî svolti nel cap. I dell'introduzione, stabilirebbe le stesse ipotesi sui segmenti finiti e infiniti.

fig. 17.

L'osservazione sull'oggetto rettilineo corrispondente alla retta non ci aiuta dunque a decidere se la retta sia aperta o chiusa.

Ricorriamo ora ad altre osservazioni. Sia dato il solito oggetto rettilineo (fig. 17). Osservandolo ad occhio nudo o col microscopio, o prolungato che sia col telescopio, vediamo che ogni segmento (AA_1) di esso è finito (int. def. II, 82) rispetto ad ogni altro segmento limitato che possiamo osservare. [1]).

1) Non dico che tutti i segmenti *rappresentabili* siano finiti. Intorno alla parola *rappresentazione* si fa non poca confusione non solo per rispetto all'infinitesimo ma altresì relativamente alle figure a più di tre dimensioni (vedi per queste ultime la pref. e specialmente la parte II). Secondo i nostri principî dell'introduzione il segmento infinitesimo, indipendentemente dai segmenti finiti, si può figurarselo come un segmento osservabile, in modo che si può applicare l'intuizione spaziale anche ai campi infinitamente piccoli o infiniti sulla retta, e la possiamo applicare per intero in ogni campo infinitesimo o infinito a tre dimensioni intorno ad un punto, perchè per le nostre ipotesi I-IV e per le proprietà che svolgeremo in seguito, almeno in piccola parte di essi ritroviamo le proprietà del campo delle nostre osservazioni. Possiamo dire che non abbiamo la continuità della rappresentazione dai segmenti finiti ai segmenti infinitesimi o infiniti, e quindi che rispetto al finito l'infinito o l'infinitesimo attuale non è

La figura delle rette congiungenti i punti di una retta r con un punto R fuori di essa nel campo finito intorno al punto S (oss. III, 23) corrispondente all'unità sensibile (oss. emp. I, 4) viene rappresentata in parte dagli oggetti rettilinei che uniscono R coi punti dell'oggetto r (fig. 17). Supposto che gli oggetti rettilinei passanti per R e incontrano r, siano prolungati indefinitamente, la figura di essi può essere tutta o in parte la figura che si ottiene tracciando tutti gli oggetti rettilinei (supposti anch' essi prolungati indefinitamente) passanti per R sul foglio disteso del disegno.

Supponiamo data o costruita sull'oggetto r debitamente prolungato una scala di unità (AA_1) a partire da A in uno o nell'altro verso (int. def. I, 80). Può darsi che dopo i raggi che sul foglio incontrano la retta r a destra di A vi sia un *primo* raggio che non la incontri, in modo che ogni altro raggio, compreso fra questo e uno qualunque dei primi sul foglio debitamente prolungato, incontri la retta r in un punto del campo della scala suddetta. (int. def. III, 80), perchè se fra i raggi che non incontrano la retta r a destra di A nel campo della scala non vi fosse un primo raggio, allora un raggio qualunque che incontra la retta r nel campo suddetto non potrebbe accostarsi indefinitamente ad uno qualunque dei primi raggi (def. I, 12), il che è escluso dall'osservazione del foglio intorno al punto R.

Se fosse possibile costruire nel foglio del disegno un primo oggetto rettilineo r_1 passante pel punto R, il quale prolungato a destra dell'osservatore non incontrasse l'oggetto r prolungato in un punto del campo suddetto a destra di A, l'oggetto r_1 rappresenterebbe esattamente il raggio parallelo a destra condotto da R o tutti i raggi paralleli condotti in senso assoluto da R alla retta r (def. I e II e teor. III, 26) [1]).

Approssimativamente questo raggio nel disegno è rappresentato dall'oggetto r_1, percorso nella direzione della freccia a destra. Dico approssimativamente perchè non abbiamo nessun mezzo per determinare un oggetto che corrisponda esattamente alla parallela. Invero fra l'oggetto che corrisponde al raggio parallelo e un oggetto rettilineo che sufficientemente prolungato incontri la retta r in un punto lontanissimo fuori del campo della nostra osservazione non si scorge sensibilmente alcuna differenza sia ad occhio nudo sia cogli istrumenti di cui possiamo disporre. E nella parte ristretta del foglio del disegno il secondo oggetto sostituisce approssimativamente il raggio parallelo. E quello che diciamo pel campo del foglio del disegno vale evidentemente anche per tutto il campo della nostra osservazione esterna, che non è tutto lo spazio intuitivo (oss. emp., 1, e nota II).

Ciò che si è detto per il verso a destra di A sulla retta r, si può ripetere anche per il verso a sinistra. Ora, non potendo tracciare sul foglio un oggetto r_1' che corrisponda esattamente alla parallela da R nel verso di sinistra alla retta r, l'osservazione non ci può dire se le due rette o i raggi paralleli condotti da R alla retta r coincidano o siano distinti o non esistano affatto, come accadrebbe se la retta nel campo finito fosse chiusa. Osserviamo soltanto che nel campo delle nostre osservazioni l'ipotesi che esistano i raggi r_1 e r'_1 e siano coincidenti, ha una grandissima approssimazione di verità, e quindi per le pratiche applicazioni questa ipotesi è da preferirsi alle altre due. Ma può darsi che se ciò ha luogo con grande approssimazione nel campo ristretto delle nostre osservazioni ciò non abbia più luogo in un campo più vasto, come pure può essere che ogni oggetto rettilineo r_1 nel foglio disteso del disegno sufficientemente prolungato abbia un punto comune coll'oggetto r nel campo finito.

Siccome poi le tre ipotesi, per essere geometricamente possibili, non devono contraddire ai dati dell' esperienza entro il campo d'osservazione (vedi pref.), ciò vuol dire

---

rappresentabile, come non lo è del resto in tutti i suoi stati la grandezza finita che diventa più piccola di ogni grandezza data. (Vedi int. nota n. 105).

1) Vedremo fra poco (teor. II, 31) che il teor. III, 26 come i teoremi precedenti dimostrati soltanto pel punto S (ip. IV) valgono per tutti gli altri punti. Dimostreremo in seguito secondo la nostra def. I, 26 che il raggio parallelo nel sistema Euclideo è raggio limite dei raggi che incontrano la retta r a destra, il che finora non fu fatto.

che in un campo piccolissimo intorno ad un punto S, ma finito e costante, devono dare i medesimi risultati, il che per lo appunto si dimostra.

Ed è perciò che la prima ipotesi essendo la più semplice, essa è anche sotto questo aspetto da preferirsi alle altre due per le pratiche applicazioni.

Quello che potrebbe essere nello spazio intuitivo (oss. emp. 1) si presenta sulla superficie di alcuni corpi, per es. sulla superficie della terra. Anche i ragazzetti sanno empiricamente che la terra ha la forma sferica, e sanno che cosa sono i meridiani, i paralleli ecc. Ebbene consideriamo tracciato sul terreno un meridiano per un punto del campo ristretto d'osservazione; evidentemente il meridiano si confonde in questo campo con grande approssimazione colla retta, eppure sappiamo per altra via che non è una retta. Se ora sulla terra stessa tracciamo due meridiani per due punti del luogo in cui ci troviamo, in un campo abbastanza ristretto, noi li confondiamo con due rette parallele, mentre si sa che si incontrano nei due poli terrestri XVII) [1])

Def. I. L'ipotesi secondo la quale vi sono due raggi paralleli che passano per un punto R di un campo finito ad una retta r del medesimo campo (def. II, 23) e giacciono sulla medesima retta (def. II, 7) si chiama *ipotesi*, *assioma* od anche *postulato di Euclide.*

L'ipotesi secondo la quale i due raggi sono distinti si chiama *ipotesi di Lobatschewsky* [2]).

E finalmente l'ipotesi secondo la quale la retta è chiusa, e che quindi manchino i raggi paralleli, si chiama *ipotesi di Riemann.*

I sistemi di geometria nel campo finito di un'unità che derivano dalle ipotesi suddette cogli assiomi precedenti I - V si chiamano rispetivamente coi nomi di Euclide, di Lobatschewsky e di Riemann.

Oss. II. Colle nostre ipotesi sulla geometria assoluta viene escluso il sistema di Lobatschewsky nel campo finito di ogni unità (teor. IV, 26), e sono possibili soltanto il sistema Euclideo e il sistema di Riemann; quest'ultimo quando la retta è chiuso in senso assoluto [3]).

Noi non ci occupiamo dunque di deciderci o pel sistema Euclideo o Riemanniano (e nel caso fosse reso possibile anche il sistema di Lobatschewsky nemmeno per questo) ma dobbiamo deciderci in senso assoluto per la retta aperta o per la retta chiusa. E sia perchè la retta chiusa colle nostre ipotesi I - IV comprende il sistema Riemanniano e il sistema Euclideo, sia per le applicazioni che noi faremo specialmente del primo sistema nello studio dell'ultimo, noi scegliamo la seguente ipotesi:

XVII) Per giustificare invece l'assioma delle parallele che noi abbiamo dato nella nota XVI si fanno altre considerazioni empiriche, perchè nella nostra definizione che meglio si presta per le ricerche nel solo sistema Euclideo, il raggio parallelo non appare quale raggio limite fra quelli di un fascio che incontrano e non incontrano la retta direttrice, proprietà che sarà dimostrata più tardi (vedi def. I, 30).

1) Come vedremo l'unicità della parallela dà per risultato cogli altri assiomi stabiliti, che la somma degli angoli di un triangolo è uguale alla somma di due angoli retti; mentre nella geometria sferica la somma degli angoli di un triangolo formato da circoli massimi è maggiore di due retti. Ora, in un campo ristretto d'osservazione sulla superficie terrestre la somma degli angoli di un triangolo è con grande approssimazione uguale a due retti, e quindi generalizzando questo fatto per tutta la superficie si concluderebbe che essa è un piano, come fu ritenuto dagli antichi.

Supponendo dato il piano, e definendo la parallela come quella linea che ha i suoi punti ad ugual distnzaa (normale) da una retta data nel piano, si può osservare che anche questa definizione contiene un assioma che è verificato con grande approssimazione nel campo della nostra esperienza esterna, perchè realmente estendendo questo campo può darsi che la linea suddetta non sia una retta, ma un'altra linea la quale nel campo della nostra osservazione si confonda colla retta.

2) Vedi appendice.

3) Vedi pref. e cap. III, lib. II, di questa parte.

Ip. V. **La retta è una linea chiusa.** XVIII).

Def. II. Il sistema assoluto che risulta dalla retta chiusa lo chiameremo *sistema assoluto Riemanniano.* Supposta la retta aperta in senso assoluto, se si può condurre da ogni punto fuori di essa una sola parallela si ha il *sistema assoluto Euclideo.*

Oss. III. Colle nostre ipotesi I - V non è possibile in senso assoluto il sistema di Lobatschewsky come non lo è quello in senso relativo. Abbiamo detto altrove le ragioni (oss. II, 18) per le quali ci occuperemo soltanto del sistema assoluto in quanto serve al passaggio dal sistema dei diversi campi finiti intorno ad un punto, e specialmente nel passaggio dal sistema Euclideo al sistema Riemanniano, e inversamente.

Def. III. Il sistema ad una dimensione (int. def. I, 62) dato dalle rette che uniscono i punti di una retta r con un punto R fuori di essa rispetto alla retta come elemento e i cui versi sono dati da quelli della retta r, si chiama *fascio di rette,* di cui R è il *centro* ed r la *direttrice.*

Ind. Indicheremo il fascio di centro R e direttrice r col simbolo (Rr).

§ 15.

Primo assioma pratico o postulato di Euclide — Indirizzo delle ulteriori ricerche e l'unità fondamentale.

28. *Oss. I.* Gli assiomi e le ipotesi precedenti bastano come vedremo allo svolgimento della geometria dei sistemi di Euclide e di Riemann; non bastano però per sapere a quale dei due sistemi corrisponde il campo delle nostre osservazioni, o in altre parole a quale unità della retta corrisponda l'unità sensibile alla nostra osservazione sull'oggetto rettilineo. Tale questione non riguarda la geometria in sè, ma siccome d'altra parte la geometria ha pure per scopo principale di essere applicabile allo studio dei corpi (def. III e oss. IV, 2), così decideremo la questione col seguente assioma, che corrisponde al postulato Euclideo (def. I, 27).

Ass. I pratico. **Nel campo delle attuali nostre osservazioni è verificata con grandissima approssimazione la proprietà che per un punto si può condurre una sola parallela ad una retta data** XIX).

Oss. II. È in vista di questo assioma che d'ora innanzi non solo abbandoneremo il caso della retta aperta in senso assoluto, ma per la retta chiusa *avremo principalmente per scopo la trattazione del sistema Euclideo intorno ad un punto.* E sebbene noi tratteremo ugualmente il sistema Riemanniano sia per la geometria in senso assoluto sia anche per svolgere le proprietà fondamentali di questo importante sistema, lo studieremo però specialmente per giovarci poi nella trattazione di quello Euclideo.

Tratteremo pure del piano di Lobatschewsky nel quale avremo agio di svolgere altre considerazioni sui suddetti sistemi geometrici, ma senza che esso porti alcun contributo nel nostro libro allo studio del sistema Euclideo stesso o del sistema Riemanniano. [1])

XVIII) S'intende che dopo l'assioma d'Euclide dato nella nota XVI non occorrono le ip. I - V nè coll'ass. II, nè coll'ass. II' (nota IV).

XIX) Questo paragrafo è pure inutile dopo l'assioma delle parallele della nota XVI sia coll'ass. II come coll'ass. II'. (Vedi pref.).

1) Vedi (cap. III, lib. II).

Conv. Per unità fondamentale sulla retta chiusa (int. def. VII, 97) consideriamo l'unità infinitesima di 1° ordine rispetto all'intera retta. E quando parleremo senz'altro di punti e figure del campo finito intenderemo di quello Euclideo coll'unità suddetta.

Def. I. L'unità fondamentale la chiameremo *unità Euclidea,* e l'unità del campo infinito o Riemanniano *unità Riemanniana.*

§ 16.

Retta completa XX).

29. *Def. I.* Siccome nel campo Euclideo intorno ad un punto la retta non è che una parte della retta, così chiameremo tutta la retta, *retta completa.*

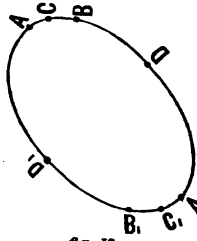



fig. 18

Oss. I. Essendo chiusa (ip. V) la rappresenteremo con un segno tracciato sul foglio, come la fig. 18, senza che occorra per questo che l'oggetto suddetto abbia tutte le proprietà della retta.

Def. II. Due segmenti (AB), $(A'B')$, i cui estremi sono punti opposti (def. III, 6), si chiamano *segmenti opposti.*

Teor. I. Due punti opposti sono separati da due altri punti opposti.

Siano AA_1, BB_1, le due coppie di punti opposti sopra la retta completa. Se B è situato in una delle due parti della retta determinata dai punti A e A_1, il punto B_1 deve essere situato nella parte opposta, altrimenti i punti B e B_1 determinerebbero sulla retta un segmento minore della metà di essa (int. def. I, 61 e *d,* 73). Dunque A e A_1 sono separati da B e B_1 in uno e nell'altro verso della retta (ass. II, *a,* ip. I, int. def. II, 62 e 23).

Def. III. Due segmenti che sommati insieme danno la metà della retta completa li chiameremo *segmenti supplementari.*

Se sono altresì consecutivi, come (AB) e (BA_1), li chiameremo *adiacenti.*

Def. IV. Un segmento che è la quarta parte della retta lo chiameremo *quadrante* o *segmento retto* (int. *b',* 99. opp. *a,* 103).

Teor. II. Due segmenti supplementari uguali sono ambidue retti.

Ciò risulta immediatamente dalle definizioni III e IV.

Def. V. Complementari sono quei segmenti che sommati insieme danno un segmento retto.

Teor. III. Due segmenti opposti sono uguali, e sono dello stesso verso a partire da estremi opposti.

Siano infatti A e A_1; B e B_1 due coppie di punti opposti sulla retta AB (fig. 18). Essi dividono la retta in quattro segmenti consecutivi diretti nel medesimo verso, cioè:

$$(AB),\ (BA_1),\ (A_1B_1),\ (BA)$$

XX) Naturalmente nel campo finito non occorre questo paragrafo, sebbene rimanga da sapere ancora, sia coll'ass. II come coll'ass. II' se la retta è aperta o chiusa, e nell'ultimo caso coll'ass. II, se essa è determinata o no da due punti opposti (vedi nota XVI).

tali che

$$(AB) + (BA_1)$$
$$(A_1B) + (BA) \qquad (1)$$

sono uguali alla metà della retta. Si ha pure che:

$$(BA) + (AB_1)$$
$$(B_1A_1) + (A_1B) \qquad (2)$$

sono uguali alla metà della retta, e quindi confrontando (1) con (2) si ha:

$$(AB) + (BA_1) \equiv (BA) + (AB_1)$$
$$(AB) + (BA_1) \equiv (B_1A_1) + (A_1B).$$

Ma

$$(AB) \equiv (BA),\ (BA_1) \equiv (A_1B),\ (B_1A_1) \equiv (A_1B_1) \quad \text{(int. } g, 99 \text{ o } c, 104)$$

dunque si ha:

$$(AB_1) \equiv (BA_1) \equiv (A_1B),\ (AB) \equiv (B_1A_1) \equiv (A_1B_1) \quad \text{(int. } g''' \text{ e } g^{IV}, 73).$$

È chiaro che (AB) e (A_1B_1) sono dello stesso verso a partire ad es. da A e da A_1, perchè B è situato in una metà e B_1 nell'altra metà opposta determinata da A e A_1 (teor. I), e quindi i quattro punti A, A_1, B, B_1 si seguono nell'ordine ABA_1B_1 oppure AB_1A_1B (int. f, f', f'', f''', 63 e 23).

Teor. IV. Se un punto C di un segmento (AB) *lo divide in modo che* (AC) *sia una parte* n^{ma} *di* (AB), *il punto opposto* C_1 *giace nel segmento opposto* (A_1B_1) *e* (A_1C_1) *è la* n^{ma} *parte di* (A_1B_1).

I punti $ACBA_1B_1A$ si seguono nel verso in cui si seguono le lettere che li indicano. Sappiamo che A e A_1, B e B_1 in qualunque verso della retta devono separarsi (teor. I). Il punto C è situato nei segmenti (B_1ACB), $(ACBA_1)$ e quindi C_1 deve essere situato nei segmenti opposti, ossia (BA_1B_1), (A_1B_1A). Non può essere situato nel primo fra B e A_1, perchè allora sarebbe situato nel segmento ABA_1 e non nel segmento opposto, dunque deve essere situato nel segmento (A_1B_1) opposto ad (AB).

La seconda parte è conseguenza del teor. III (fig. 18).

Coroll. I punti medî di segmenti opposti sono opposti. (int. e, 99, opp. a, 104).

Teor. V. I punti medî dei quattro segmenti consecutivi nel medesimo verso determinati da due coppie di punti opposti dividono la retta in quattro segmenti retti.

Siano A, A_1; B, B_1 le due coppie di punti opposti; i segmenti consecutivi da essi determinati sono

$$(AB),\ (BA_1),\ (A_1B_1),\ (B_1A)$$

e siano C e C_1 i punti medî di (AB) e (A_1B_1), D e D_1 quelli di (BA_1) e (B_1A) (ip. I e int. b', 99 o a, 103). Si ha:

$$(CB) + (BD) \equiv (CD) \equiv (DA_1) + (A_1C_1) \equiv (DC_1) \qquad (1)$$

perchè

$$(BD) \equiv (DA_1) \text{ per dato, e } (CA) \equiv (A_1C_1) \equiv (CB) \quad \text{(teor. III);}$$

ed essendo

$$(CB) + (BD) \equiv (BD) + (CB) \quad \text{(int. } e, 99, \text{ opp. } a, 104).$$

Ma $(CD) + (DC_1)$ è metà della retta, e poichè $(CD) \equiv (DC_1)$ (1), i segmenti (CD) e (DC_1) e quindi anche (C_1D_1) e (D_1C) sono segmenti retti (def. IV e teor. III).

§ 17.

Ipotesi VI — Punti e figure opposti.

30. *Oss. I.* **Dal teor. II del n. 14 e dal teor. VI del n. 23 risulta che sulla retta completa vi possono essere coppie di punti che non determinano la retta, come anche può darsi che non vi sia alcuna di queste coppie.**

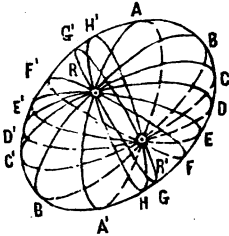
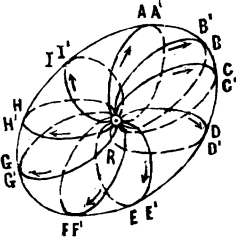
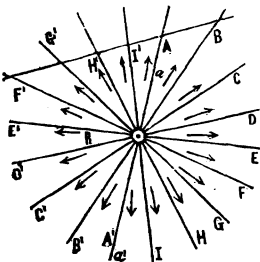



fig. 19, *a*.

Nel secondo caso, dato un fascio (*Rr*) (def. I, 27) quando il punto *X* percorre la retta *r* in un dato verso e ritorna nella sua posizione primitiva (oss. II, 3 o int. 67), la retta *RX* percorre l'intero fascio una sola volta, mentre nel primo caso lo percorre due volte.

I due casi sono rappresentati dalle fig. 19, *a* e 19, *b* rispetto ai punti d'intersezione delle rette del fascio di centro *R* colla direttrice *r*. Nella prima figura tutte le rette che passano per *R* si incontrano nel punto opposto *R'* e incontrano la retta *r* in due punti opposti. È naturale che le fig. 19, *a* e 19, *b* non possono essere effettivamente corrispondenti al fascio di rette, perchè lo rappresentano tutto in una parte limitata del foglio vale a dire del campo delle nostre osservazioni.

fig. 19, *b*.

Teor. *I. Se i punti opposti della retta determinano i raggi delle rette di un fascio a partire dal centro, essi determinano un sistema ad una dimensione semplicemente chiuso rispetto ad un raggio come elemento, e i raggi del fascio e i punti della retta direttrice si corrispondono univocamente e nel medesimo ordine.*

Difatti quando il punto variabile *X* da *A* sulla retta direttrice *r* arriva al punto opposto *A'*, la retta *RX* (ass. II, e ip. III) coincide colla retta *AR* ma nel verso opposto a partire da *R*, e quindi in tal caso i raggi delle rette del fascio costituiscono pure un sistema ad una dimensione semplicemente chiuso, perchè per ogni punto di *r* passa un solo raggio, e inversamente.

fig. 19, *c*.

Def. I. Un tale sistema di raggi si chiama

fascio di raggi o semplicemente *fascio, di centro R e di direttrice r*. I *versi* del fascio sono dati da quelli della direttrice.

Nelle proprietà comuni del fascio di raggi col fascio di rette scambieremo anche l'uno con l'altro.

Oss. II. **Il secondo caso si riduce al primo quando si consideri la retta *r* come doppia e quindi ciascun punto si riguardi come due punti distinti, in modo che quando il punto X a partire da *A* (fig. 19, *b*) percorre l'intera retta semplice *r*, esso occupi la posizione del punto *A'*, e debba percorrere ancora l'intera retta semplice per ritornare al punto *A*.**

Se il secondo caso soddisfa all'osservazione nel campo stesso, esso deve dar

luogo alla stessa fig. 19, *c*; e quindi anche in questo caso il sistema di raggi deve essere un sistema semplicemente chiuso (int. def. II, 63). Bisogna dunque supporre che quando in questo caso il punto A percorre tutta la retta semplice r e ritorna in A, il raggio RA invece cada nel raggio opposto, altrimenti il sistema dei raggi si scinderebbe in due sistemi di raggi semplicemente chiusi come farebbe credere la fig. 19, *b*.

E se vogliamo far corrispondere in questo caso ai raggi del fascio i punti della retta r, la dobbiamo considerare come doppia. Inoltre siccome subordiniamo principalmente la considerazione dell'intera retta allo studio del sistema Euclideo (oss. II, 28) in questo campo la retta è aperta, e le due parti in cui un punto la divide non hanno alcun punto comune (coroll. I teor. III, 19 e conv. 28). E quindi sotto questo aspetto è più conveniente supporre che rispetto all'unità infinita o Riemanniana (conv. 28) ad ogni raggio nel fascio (Rr) corrisponda un solo punto della direttrice, e reciprocamente.

Se si considera invece anche il campo limite all'infinito del campo finito Euclideo, il primo caso si riduce al secondo rispetto all' unità Euclidea, perchè la retta rispetto a questa unità ha un solo punto all'infinito (teor. III, 23 e conv. 28). Siamo dunque giustificati nell'ammettere la seguente ipotesi:

Ip. VI. **Sulla retta vi sono coppie di punti, che non la determinano.**

Oss. III. Questa ipotesi per il sistema Euclideo è più una convenzione che un' ipotesi, perchè anche il secondo caso rispetto ad esso dà i medesimi risultati. In senso assoluto è però una vera ipotesi.

Teor. II. Nella retta completa due punti opposti e soltanto due punti opposti non determinano la retta (ip. VI, teor. II, 14 e teor. VI, 23).

Coroll. I. Due rette che si incontrano in un punto si incontrano nel punto ad esso opposto (teor. VI, 4, oss. II, 22).

Def. I. Ad ogni punto X corrisponde un punto X' che è opposto a X in tutte le rette che contengono X (coroll. I, teor. II).

I punti X e X' si chiamano *punti opposti* indipendentemente dalle rette in cui sono situati.

Figure determinate da punti opposti (def. I, 2) si chiamano *figure opposte.*

Teor. III. Due figure opposte sono uguali.

Difatti scelti due punti X e Y e i punti corrispondenti opposti X' e Y' si ha $(XY)\equiv(X'Y')$ (teor. III, 29 e teor. IV, 11).

Oss. IV. Al n. 6 abbiamo veduto che due punti A e B sulla retta determinano due segmenti in generale uno minore dell'altro. Ma non potevamo parlare allora di segmenti e di distanze determinate da due punti qualunque (nello spazio generale (def. I, 2)), poichè non sapevamo ancora come si comportano i segmenti che hanno due estremi comuni. Ora dunque completando l' oss. I, 11, possiamo dire che due punti se non sono opposti determinano un solo segmento, intendendo il minore sulla retta da essi determinata, e perciò una sola distanza. E se i due punti non determinano la retta essi hanno una sola distanza, perchè ogni retta passante per essi viene divisa da essi in parti uguali.

L' uguaglianza delle distanze in due segmenti ci dà la loro uguaglianza, e quindi se (AB) e (A_1B_1) sono le distanze fra i punti A e B, A_1 e B_1 e si ha $(AB)=(A_1B_1)$, si ha pure pei segmenti $(AB)\equiv(A_1B_1)$ (teor. I, 5 e teor. I, 8) XXI).

XXI) La proprietà che il raggio può esser considerato come elemento del fascio, e che rispetto al raggio come elemento il fascio è pure un sistema semplicemente

§ 18.

Rette i cui punti determinano segmenti retti con un punto. L'ipotesi IV vale per ogni punto (dello spazio generale) XXII).

31. *Teor. I. La retta congiungente due punti non opposti che determinano ciascuno un segmento retto con un punto A qualunque, ha tutti i suoi punti equidistanti dal punto A.*

Siano X e Y i due punti dati non opposti che determinano una retta r (teor. VI, 23). Non essendo punti opposti determinano in r un segmento (XY) (def. II, 6), il quale ha in r_∞ un segmento opposto uguale $(X'Y')$ (teor. III, 29).

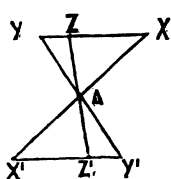



fig. 20.

Dico che ogni punto Z della retta r è equidistante in senso assoluto da A. Supponiamo dapprima che Z sia interno al segmento (XY). Al punto Z è opposto un punto Z' situato nel segmento $(X'Y')$ e a distanze da X' e Y' uguali a quelle del punto Z da X e Y (teor. III, 29), e la retta ZA passa pel punto Z' (coroll. I, teor. II, 30). I due triangoli AXY, $AX'Y'$ sono identici (ip. III e teor. III, 17), e quindi essendo Z e Z' due punti corrispondenti si ha:

$$(AZ) \equiv (AZ') \qquad \text{(teor. II, 15)}$$

oppure perchè i due triangoli AYZ, $AY'Z'$ sono uguali per avere due lati e la coppia da essi compresa uguale (teor. III, 16), e perciò deve essere

$$(AZ) \equiv (AZ') \equiv (AX) \equiv (AY)$$

La stessa cosa accade se il punto Z è fuori del segmento (XY) nella retta r. Dunque ecc.

Ter. II. L'ip. IV vale per ogni punto (dello spazio generale).

Scelto un punto A qualunque, esso appartiene ad un campo finito del punto S al quale ci siamo finora sempre riferiti (oss. III, 23). Vi sono rette passanti per A le quali rispetto all'unità del campo finito suddetto ed anche alle unità infinite se esistono (teor. III, 19), sono distinte (teor. IV, 23).

Due rette r e r_1 passanti per A, distinte rispetto all'unità di un campo qualunque intorno ad A, lo sono in senso assoluto anche se in un campo infinitesimo o infinito intorno ad A fossero coincidenti rispetto all'unità di questo campo (oss. I, 22).

Scelti due punti X e Y che determinano ciascuno un segmento retto con A sulle rette r e r_1, la retta XY ha tutti i punti equidistanti da A (teor. I). Ora per S facciamo passare una retta r' e per un punto X' in r', che determina con S un segmento retto, si consideri una retta s' che abbia i suoi punti equidistanti dal punto S, il che è possibile (ip. IV e teor. I). Scelto poi

---

chiuso, e per conseguenza ogni retta del fascio lo divide in due parti, deriva dalla proprietà che la retta é aperta nel sistema Euclideo, come sarà dimostrato in una nota del n. 46.

XXII). Va pure escluso. Vedi oss. III, 2.

in s' un segmento $(X'Y') \equiv (XY)$, i due triangoli XAY, $X'SY'$ sono identici per avere i tre lati uguali (ip. III e teor. III 17), dunque le due coppie di rette $X\dot{A}Y$, $X'\dot{S}Y'$ (def. I, 16) sono identiche.

Ad ogni coppia dunque di rette r e r_1 di vertice A (def. I, 16) si può far corrispondere una coppia di rette di vertice S uguale alla prima in senso assoluto. Ma siccome due rette distinte qualunque passanti per S sono distinte in ogni campo infinitesimo o infinito intorno ad S (ip. IV), la stessa proprietà ha luogo pure per le rette r e r_1 (teor. II, 15).

Oss. Per questo teorema noi possiamo riferirci ai campi intorno ad ogni punto (dello spazio generale) e intorno ai quali valgono tutti gli assiomi e le ipotesi stabilite e quindi anche le proprietà che ne derivano; per conseguenza valgono anche per un punto qnalunque A il teor. VII col coroll. del n. 23; i teor. I, II, III del n. 24, il teor. III e IV del n. 26. Però fintantochè tratteremo del sistema Euclideo intenderemo di riferirci al campo intorno ad un punto qualunque.

§ 19.

Rette e raggi paralleli assoluti e relativi — Campo limite assoluto intorno ad un punto del campo finito Euclideo XXIII).

32. *Oss. I.* Consideriamo di nuovo il campo Euclideo intorno al punto A (oss. 31, conv. 28), ed una retta r o $X'_\infty A X_\infty$. Se scegliamo su questa retta un punto X_∞ che non appartenga al campo finito Euclideo intorno al punto opposto A' di A, questo deve determinare con un punto B qualunque del campo finito intorno ad A una retta (teor. VI, 23). Le rette che congiungono un punto B con tutti i punti all'infinito della retta r, tranne i punti opposti di A e dei punti del campo finito di A', coincidono in una sola retta rispetto all'unità del campo finito (teor. III e IV, 26 conv. 28 e oss. 31) e sono parallele alla retta r (def. II, 26).

Def. I. Chiameremo le rette parallele suddette *parallele relative.*

Oss. II. Una retta parallela relativa passante per B incontra la retta r in due punti determinati X_∞, X'_∞ in versi opposti a partire da A, che sono in senso assoluto punti opposti sulla retta completa (coroll. teor. II, 30). I punti X_∞ e X'_∞ devono essere separati dai punti opposti A e A' (teor. I, 29). Una metà della retta determinata dai due punti X_∞ e X'_∞ contiene il punto A, ed è quella situata in parte nel campo finito intorno ad A. Non è però detto che A sia punto medio del segmento $(X_\infty X'_\infty)$.

Def. II. La retta parallela che da un punto B nel campo Euclideo si può condurre ad una retta r, passante per un punto A e che incontra la retta r in due punti X_∞, X'_∞ determinati ad ugual distanza del punto A in senso assoluto, e quindi anche rispetto all'unità infinita (conv. 28 e teor. II, 30) si chiama *parallela assoluta.* I punti X_∞ e X'_∞ li chiameremo punti *limiti assoluti della retta r rispetto al punto A.*

Coroll. I. Le rette parallele assolute condotte dai punti di una parallela assoluta ad una retta data rispetto ad un suo punto, coincidono rispetto all'unità finita e infinita.

Ciò deriva immediatamente dalla definizione (teor. I, 24 e oss. 31).

XXIII) Anche questo paragrafo, nel solo campo finito, va tralasciato.

Teor. I. Ad ogni punto di una retta r nel campo finito corrisponde una parallela assoluta diversa, condotta da un medesimo punto B alla retta r.

Ciò deriva immediatamente dalla precedente definizione, perchè scegliendo un altro punto A_1 anche infinitamente vicino ad A, i due punti limiti assoluti sono diversi in senso assoluto (ass. II, a, ip. I, int. def. I, 61 e d, 73).

Coroll. I. Una retta r passante per A non è in generale parallela assoluta alla parallela assoluta condotta da un punto B alla retta r.

Difatti perchè lo fosse, bisognerebbe che i punti limiti assoluti rispetto ad A in r lo fossero anche rispetto ad B, ciò che in generale non è.

Def. III. Il raggio determinato da un punto limite assoluto di A sulla retta r, per. es. X_∞, e dal punto B (def. I, 7), si chiama *raggio parallelo assoluto* al raggio (AX_∞) a partire da A.

Coroll. II. In un raggio un punto e il suo punto limite assoluto sono estremi di un segmento retto.

Difatti essendo $(X_\infty X'_\infty)$ metà della retta e A il suo punto medio (def. II) (AX_∞) e (AX'_∞) sono segmenti retti (def. IV, 29, ip. I e int. b', 99 e a, 103).

Teor. II. Rispetto all'unità finita e infinita (Euclidea e Riemanniana) le parallele assolute condotte da ogni punto B ad una retta coincidono.

Coincidono pure rispetto alle stesse unità le parallele assolute condotte dai punti di una retta r ad una retta ad essa parallela assoluta, colla retta r stessa.

Non soltanto coincidono le parallele assolute condotte da un punto B alla retta r rispetto ai suoi punti del campo finito, ma tutte le parallele relative (def. II e I; teor. IV, 24, conv. 28 e oss. 31).

E dalla prima parte del teorema deriva anche la seconda, perchè se $X_\infty AX'_\infty$ è la retta r, $X_\infty BX'_\infty$ la parallela assoluta rispetto al punto A (def. II) la $X_\infty AX'_\infty$ è parallella relativa alla retta $X_\infty BX'_\infty$ (def. I, teor. III e IV, 26 e oss. 31). E per ciò, scelto un punto A' di r, la retta r è parallela relativa rispetto alla retta $X_\infty BX'_\infty$; e siccome tutte le parallele relative condotte da A' alla retta $X_\infty BX'_\infty$, fra le quali vi è anche la parallela assoluta rispetto ad un punto qualunque del campo finito di $X_\infty BX'_\infty$, coincidono in una sola, cioè nella retta r (def. I; teor. III, IV, 26 e oss. 31), così il teor. è dimostrato.

Coroll. I. Rispetto all' unità finita e infinita i raggi paralleli assoluti condotti da un punto ad un raggio dato coincidono.

Coincidono pure rispetto alle stesse unità i raggi paralleli assoluti condotti dai punti di un raggio ad un altro raggio ad esso parallelo assoluto, col raggio stesso (def. III e teor. II).

Def. IV. Chiamiamo *campo limite assoluto del campo Euclideo intorno ad ogni punto X* del campo finito quello dato da tutti i punti limiti assoluti delle rette passanti per il punto X, che sono distinte rispetto all'unità finita e infinita (teor. IV, 23 e teor. II, 31).

Teor. III. Due punti limiti assoluti di un punto X, e non opposti, determinano una retta situata tutta nel campo limite assoluto di X.

Ciò è un'altra forma del teor. II del n. 31 mediante la def. IV.

Teor. IV. I campi limiti assoluti di due punti qualunque del campo finito non coincidono in senso assoluto; coincidono però relativamente all' unità finita e infinita.

Difatti se X_∞ è un punto limite assoluto di un punto A, (AX_∞) è un segmento retto. Se B è un punto del campo finito, (BX_∞) non è in generale un segmento retto in senso assoluto (coroll. I, teor. I), ma rispetto all'unità finita e infinita si ha $(AX_\infty) \equiv (BX_\infty)$ (int. *i*, 85 e *b'*, 91; teor. III, 22).

§ 20.

Raggi e segmenti paralleli dello stesso verso o di verso opposto XXIV).

33. *Def. I.* Un punto del campo limite assoluto X_∞ di un punto A determina con A un segmento retto, e due punti opposti di questo campo due segmenti retti con un estremo comune in A (def. II, 32). Chiameremo questi due segmenti *lati* o *parti opposte* della retta r intorno al punto A rispetto al campo Euclideo.

Oss. I. I lati opposti nel campo Euclideo si possono anche considerare come raggi limitati dai punti limiti e dal punto A rispetto all'unità di questo campo (coroll. teor. III, 19).

Teor. I. Ogni punto X_∞ limite assoluto di A determina con ogni punto del campo finito un solo raggio, e quindi un verso sulla retta determinata da X_∞ e dal punto dato a partire da questo punto.

Sia B il punto dato che può coincidere anche con A. Il punto X_∞ determina con B un segmento minore della metà della retta, perchè rispetto all'unità infinita si ha $(AX_\infty) \equiv (BX_\infty)$ (teor. III, 22), e quindi in senso assoluto differiscono al più di un segmento infinitesimo rispetto all'unità infinita, che è finita rispetto alla retta completa (def. I, 29 e conv. 28). Ed essendo determinato così un solo segmento sulla retta BX_∞ (def. II, 6) è determinato anche il verso di esso a partire da B (int. ind. I, 64 e ip. I).

Coroll. I. Possiamo dire che due raggi aventi lo stesso punto limite assoluto all'infinito hanno lo stesso verso (direzione) *rispetto all'unità finita.*

Difatti il verso di un raggio determina il punto limite assoluto rispetto all'unità finita (teor. IV, 32), e poichè i due raggi hanno lo stesso punto limite assoluto, i loro versi determinano il medesimo punto all'infinito; riguardo alla determinazione di questo punto possono dunque sostituirsi uno all'altro, (int. def. VI, 8 e def. I, 9), e sotto questo rispetto i due versi sono uguali; o in altre parole possiamo dire che i due raggi hanno lo stesso verso o la stessa direzione [1]).

Def. II. Diremo che due raggi i quali soddisfano al corollario precedente, hanno lo *stesso verso*.

XXIV) Questo paragrafo nel solo campo finito non va trattato a questo modo, e la definizione di raggi o di segmenti dello stesso verso o di versi opposti può esser data qui in conformità alla nota XVI o al posto indicato dalla prima nota del n. 52.

1) Vedi int. nota n. 9.

Coroll. II. Due raggi dello stesso verso con un terzo raggio sono dello stesso verso fra loro.

Perchè i tre raggi e quindi anche il primo e il secondo hanno lo stesso punto limite assoluto all'infinito rispetto all'unità finita. (Opp. coroll. I e int. *e*, 8).

Coroll. III. I due raggi paralleli assoluti (e quindi anche relativi) condotti da un punto ad una retta sono di verso opposto.

Perchè due punti limiti assoluti opposti determinano con un punto B del campo finito due segmenti che a partire da B sono di verso opposto (teor. I; int. def. II, 62, f', 63 e coroll. I, teor. II, 32).

Coroll. IV. Possiamo dire che due raggi a e a' che hanno punti limiti assoluti all'infinito opposti sono di verso opposto.

Difatti ciò è chiaro se sono sulla medesima retta (coroll. III).

Se sono in rette diverse, indicando con a_1 il raggio opposto di a e in linea retta con a, a e a_1 sono di verso opposto (coroll. III). Ma a' e a_1 sono dello stesso verso (coroll. I e def. II), vale a dire nella determinazione del verso possiamo sostituire a' ad a_1, e poichè a e a_1 sono di verso opposto, possiamo dire che a e a' sono pure di verso opposto.

Def. III. Due raggi che soddisfano alla condizione del corollario IV diremo che sono di *verso opposto.*

D'ora innanzi intenderemo per *raggi* di una retta a partire da un punto del campo finito di essa in senso assoluto e rispetto all'unità infinita le metà della retta completa (def. I, 29) fino al punto opposto A'; mentre pel campo Euclideo li supporremo limitati ai loro punti limiti assoluti i quali, pei punti del loro campo finito rispetto all'unità finita e infinita, coincidono (teor. IV, 32).

Oss. III. Dato un segmento (AB) sopra una retta il suo verso nel campo finito è pienameute determinato, come anche nella retta completa, perchè A e B determinano due segmenti uno dei quali (AB) è infinitesimo rispetto all'altro; e considerando, come abbiamo stabilito al n. 6 come segmento dei punti A e B il minore, quando non c'è bisogno di tener conto anche del maggiore, il verso di (AB) è pienamente determinato a partire da A (int. ind. I, 64).

Coroll. V. Rispetto al verso, due segmenti (AB), $(A'B')$ che appartengono a due raggi paralleli e determinano in essi lo stesso verso, sono uguali (hanno lo stesso verso).

Perchè possono sostituirsi in questa determinazione l'uno all'altro, e quindi sono uguali (int. def. VI e VII, 8 e def. I, 9); ma siccome la determinazione del verso sui raggi che li contengono avviene mediante il solo verso di essi, così essi hanno versi uguali, ossia lo stesso verso.

Coroll. VI. Se due segmenti (AB) e $(A'B')$ appartengono a raggi paralleli, e a partire da A e A' determinano versi opposti, essi sono di verso opposto.

Perchè determinano raggi di versi opposti, e questi versi sono anche quelli dei due segmenti dati (int. f''', 63).

§ 21.

Figure uguali in senso assoluto e relativo XXV).

34. *Teor. I. I punti all' infinito di due figure uguali si corrispondono fra loro in modo che la distanza di due punti qualunque all' infinito è uguale alla distanza dei due punti corrispondenti dell' altra in senso assoluto.*

Difatti scelti due punti A e A' corrispondenti delle due figure nel campo finito e un punto X_∞ della prima, al segmento (AX_∞) (o ai segmenti (AX_∞) nel caso che X_∞ sia opposto ad A (def. I, 30)) deve corrispondere un segmento $(A'X'_\infty)$ infinito della seconda, perchè in due figure uguali i segmenti corrispondenti sono ugnali in senso assoluto (teor, II, 15 e int. def. III, 9), e quindi al punto X_∞ all' infinito della prima corrisponde un punto X'_∞ all' infinito della seconda. E se X_∞ e Y_∞ sono due punti della prima, X'_∞ e Y'_∞ i punti corrispondenti della seconda si deve avere $(X_\infty Y_\infty) \equiv (X'_\infty Y'_\infty)$.

Se X_∞, Y_∞ sono punti opposti, lo sono pure i punti X'_∞, Y'_∞, e in tal caso per sapere quale dei due segmenti determinati da queste due coppie di punti sopra due rette si corrispondono, osserviamo che queste due rette devono essere determinate da due punti corrispondenti e che quindi i segmenti che contengono questi punti si corrispondono.

Oss. I. Un triangolo di cui un vertice è nel campo finito e gli altri due nel campo limite assoluto del primo è isoscele (def. III, 9 e def. III, 32).

Un triangolo di cui due vertici sono in un campo limite assoluto e l' altro nel campo finito è isoscele rispetto all' unità finita e infinita (def. III, 9 e teor. IV, 32).

Teor. II. Due triangoli, i cui vertici sono situati in un campo qualunque finito e i cui lati sono uguali rispetto all' unità finita, possono ritenersi uguali in senso assoluto, se non è stabilito che i loro lati differiscono di segmenti infinitesimi.

Siano BCD, $B'C'D'$ i due triangoli. Se i lati dei due triangoli sono uguali in senso assoluto sappiamo già che sono identici (teor, III, 17 e ip. III e int. def. III, 9). Se sono uguali rispetto all' unità finita possono differire in senso assoluto di un infinitesimo (int. b', 91). Supponiamo che ciò abbia luogo fra i due lati (BC), $(B'C')$ corrispondenti nella corrispondenza d' identità (oss. III, 15), e sia B'' il punto nel verso di $(B'C')$ tale che $(BC) \equiv (B'C'')$ (int. b', 69 e ass. II, ip. I). Ma il segmento $(D'C'')$ si confonde rispetto all' unità finita col segmento $(D'C')$ (teor. III, 22); e inversamente il segmento $(D'C')$ passando dal relativo all' assoluto si può ritenere coincidente col segmento $(D'C'')$ in quanto che questi due segmenti coincidono rispetto all' unità finita, se non è però stabilito che $(D'C')$ sia distinto da $(D'C'')$. Ciò che vale per due lati corrispondenti valendo anche per gli altri, il teor. è dimostrato.

Oss. II. Un triangolo di cui uno o due vertici sono in senso assoluto all' infinito (conv. 28) ad es. BCA_∞ oppure $AB_\infty C_\infty$, non è un triangolo proprio del campo

---

XXV). Anche questo paragrafo va escluso, rimanendo nel solo campo finito di un' unità.

finito, considerando questo campo indipendentemente dall'infinito. Nel secondo caso abbiamo nel campo finito una coppia di rette col vertice in quello del triangolo situato nel campo finito, cioè A. Nel primo caso abbiamo invece due raggi paralleli limitati a due punti del campo finito.

In questi casi, per l'uguaglianza di due triangoli relativa all'unità finita, non si può quindi applicare il teor. III del n. 17 che riguarda triangoli aventi i vertici nel campo finito, e volendo parlare anche nei casi suddetti di uguaglianza dei triangoli bisogna che dall'uguaglianza di essi risulti l'uguaglianza delle loro coppie di rette (coroll. teor. III, 17). Ora questa uguaglianza si otterrà se saranno uguali i due triangoli che si confrontano anche soltanto rispetto all'unità infinita, perché potendoli considerare in tal caso come uguali in senso assoluto (teor. II), le coppie suddette saranno uguali relativamente all'unità finita.

Se i due triangoli non possono ritenersi uguali in senso assoluto, allora non si può più parlare in tal caso di uguaglianza rispetto all'unità finita.

Teor. III. Due triangoli aventi due vertici in un campo limite assoluto e l'altro nel campo finito sono uguali relativamente all'unità finita e infinita, e sono uguali in senso assoluto se i punti all'infinito sono punti limiti assoluti dei rimanenti vertici.

Siano $BX_\infty Y_\infty$, $CX_\infty Y_\infty$ i due triangoli e i punti X_∞, Y_∞ siano punti limiti assoluti di B (def. II, 32). Il triangolo $BX_\infty Y_\infty$ è isoscele in senso assoluto, e in senso relativo all'unità finita ed infinita (oss. I); dunque si ha:

$$(BX_\infty) \equiv (CX_\infty), \quad (BY_\infty) \equiv (CY_\infty) \qquad \text{(teor. IV, 32).}$$

e queste relazioni sussistono in senso assoluto se X_∞ e Y_∞ sono punti limiti assoluti anche del punto C; e perciò i due triangoli sono uguali nel primo caso relativamente all'unità infinita e quindi anche all'unità finita (oss. II); nel secondo caso sono eziandio uguali in senso assoluto (teor. III, 17 e ip. III).

Teor. IV. Se X_∞ e X'_∞; Y_∞ e Y'_∞ sono coppie di punti opposti limiti assoluti, i due triangoli $BX_\infty Y_\infty$, $BX'_\infty Y'_\infty$ o sono uguali in senso assoluto, oppure lo sono relativamente all'unità infinita e finita.

Supponiamo che X_∞ e X'_∞ siano punti limiti assoluti del punto B, Y_∞ e Y'_∞ di un altro punto C. In generale non si ha in senso assoluto la relazione $(BY_\infty) \equiv (CY_\infty)$, e perciò anche non si ha in generale $(BY'_\infty) \equiv (BY_\infty)$, pure essendo $(BX_\infty) \equiv (CY_\infty)$ (coroll. II, teor. I, 32); relazioni che valgono invece relativamente all'unità infinita e finita (teor. IV, 32).

Il teorema è dunque dimostrato (teor. III, 17 e oss. II).

Teor. V. Due triangoli i cui lati sono uguali rispetto all'unità finita, non possono ritenersi sempre uguali in senso assoluto se uno o due dei loro vertici sono all'infinito.

E nel primo caso non si possono sempre ritenere neppure uguali in senso assoluto se i loro lati sono uguali rispetto all'unità infinita.

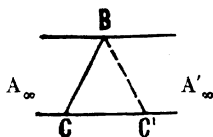



fig. 21

Difatti siano dati due punti C e C' ad ugual distanza da un punto B e la distanza (CC') sia finita (teor. IV, 23 e oss. 31). Conduciamo da B la parallela a CC', e consideriamo il punto all'infinito A_∞ delle due rette. Rispetto all'unità finita ed anche infinita i lati dei due triangoli $A_\infty BC$, $A_\infty BC'$ sono uguali, cioè (BA_∞) comune; $(BC) \equiv (BC')$, $(CA_\infty) \equiv (C'A_\infty)$; ma in senso assoluto (CA_∞) non è uguale a $(C'A_\infty)$ (int. def. I, 61) e perciò i due triangoli non sono identici,

e quindi nemmeno le coppie rettilinee $B\dot{C}A_\infty$, $B\dot{C}'A_\infty$ (def, I, 16 e teor. III, 16). Essendo A'_∞ il punto opposto di A_∞, i due triangoli $A'_\infty BC$, $A_\infty BC$ hanno i lati uguali, come anche i triangoli $A'_\infty BC$, $A_\infty BC'$ e i triangoli $A'_\infty BC$, $A'_\infty BC'$ relativamente all'unità finita e infinita. Se queste condizioni ci dessero l'uguaglianza dei triangoli, il triangolo $A'_\infty BC$ sarebbe uguale ai triangoli $A_\infty BC$ $A_\infty BC'$ che non sono uguali come abbiamo dimostrato.

Per l'ultima parte del teorema osserviamo che rispetto all'unità infinita i due lati BA_∞, CA_∞ coincidono (teor. III, 22), e quindi non si ha più un triangolo, e non è applicabile ai due triangoli $A_\infty BC$, $A'_\infty BC$ il teorema II, e quindi neppure il teor. III, 17, e perciò i due triangoli non sono in generale uguali nemmeno rispetto all'unità infinita (oss. II).

Soltanto quando i lati corrispondenti infiniti sono uguali in senso assoluto i due triangoli sono uguali.

Oss. III. Nelle relazioni di identità dei triangoli nel campo Euclideo considereremo soltanto quelli che secondo il teor. II, hanno i loro vertici nel campo finito, ai quali in ogni caso è applicabile il teor. III, 17, sempre che non si dica diversamente.

§ 22.

Segmenti congruenti e simmetrici sulla retta — Sistemi continui di figure qualunque invariabili (nello spazio generale) — Sistemi continui di segmenti invariabili sulla retta XXVI).

35. *Def. I.* Due segmenti di una medesima retta uguali e diretti nello stesso verso della retta (int. f''', 63) si chiamano *congruenti;* se sono di verso opposto si dicono *simmetrici* [1]).

Def. II. Se due segmenti simmetrici hanno un punto comune si dice che sono *simmetrici rispetto a questo punto,* e che gli altri estremi dei due segmenti sono simmetrici rispetto allo stesso punto.

Teor. I. Due segmenti congruenti che hanno due punti corrispondenti comuni coincidono.

Stabilita la corrispondenza d'identità fra i due segmenti (AB) e $(A'B')$ congruenti (def. I), e se X è un punto di (AB) che coincide col punto corrispondente X' di $(A'B')$, si deve avere $(AX) \equiv (A'X)$, ciò che non è possibibe per essere (AX) e $(A'X)$ dello stesso verso (coroll. II, teor. III. 4), se A e A' sono distinti (int. def. I, 61 e *d*, 73). Dunque A e A' in tal caso coincidono e quindi anche per la stessa ragione B e B'.

Teor. II. Punti corrispondenti di due segmenti congruenti sono estremi di segmenti congruenti.

Siano (AB) e $(A'B')$ i due segmenti congruenti. Può darsi che A' appartenga al segmento (AB) o sia fuori nel prolungamento di (AB), da A verso

---

XXVI) Questo paragrafo con qualche modificazione al n. 36 può andare tale quale pel solo campo finito sia coll'ass. II, come coll'ass. II',

1) Vedi int. oss. 1, 112.

B (int. 66); il caso in cui A' è fuori di (AB) nel prolungamento opposto si riduce ai primi due casi scambiando (AB) con $(A'B')$. Non può essere che l'uno sia contenuto nell'altro (int. d, 73; c, 61).

Essendo X e X' elementi corrispondenti qualunque dei due segmenti nella loro corrispondenza d'identità (oss. III, 15), nel primo caso l'elemento X appartiene o al segmento (AA') o al segmento $(A'B)$.

Se è compreso in (AA') si ha $(AX)+(XA')\equiv(AA')$, $(XA')+(A'X')\equiv(XX')$ $(A'X')+(XA')\equiv(XX')$ (ass. II, a o ip. I, int. e, 99 o a, 104); ma $(AX)\equiv(A'X')$, dunque $(AA')\equiv(XX')$ (int. c, 68). Se invece X, nel caso considerato, è compreso in $(A'B)$ si ha:

$$(AA')+(A'X)\equiv(A'X)+(AA')\equiv(AX), \quad (A'X)+(XX')\equiv(A'X')$$

perchè, essendo $(A'X')\equiv(AX)$ e X compreso fra A' e B, si ha $(A'X)<(A'X')$ (int. def. I e II, 61), dunque $(AA')\equiv(XX')$ (int. g''', 73).

Finalmente se A' è fuori di (AB) e nel prolungamento di (AB) da A verso B, si ha:

$$(AX)+(XA')\equiv(AA'), (XA')+(A'X')\equiv(A'X')+(XA')\equiv(XX')$$

ma $(AX)\equiv(A'X')$, dunque $(AA')\equiv(XX')$ (int. g, 73).

In ogni caso (AA') e (XX') sono dello stesso verso; il teorema è dunque dimostrato.

36. *Oss. emp.* Ogni sistema ad una dimensione descritto da un punto materiale che si muove nel campo della nostra osservazione esterna è ciò che si chiama una *linea materiale*, e se si fa astrazione dalla sua grossezza badando al luogo da essa occupato si ha una *linea intuitiva*. Noi vediamo che una tal linea è un sistema ordinato di punti di cui è dato l'ordine, come ad es. l'oggetto della fig. 22, e che scelto un segmento (AB) della linea si può scomporre in segmenti (AA'), $(A'A'')$ ... consecutivi arbitrariamente piccoli e tali che i segmenti rettilinei (AA'), $(A'A'')$ ecc. sono piccoli quanto si vuole, e inversamente.

fig. 22

Scegliendo dei punti $A\,A'\,A''$ vicinissimi nell'ordine della linea noi vediamo che i tratti rettilinei (AA'), $(A'A'')$ ecc. si confondono materialmente, cioè con grandissima approssimazione coi segmenti della linea compresi tra gli stessi punti, e che perciò la linea materiale può essere sostituita con grande approssimazione da una linea composta di tanti tratti rettilinei (linea poligonale), i cui tratti (lati) sono sufficientemente piccoli.

Rileviamo inoltre l'altra particolarità di queste linee, e cioè che quando (AA') è prolungato nel verso da A ad A' e si sceglie su di esso un tratto $(A'X)\equiv(A'Y)$, essendo Y un punto qualunque del raggio $A'A''$ da A' verso A'', quando A'' si avvicina sufficientemente ad A'', X e Y si confondono con grande approssimazione. Diamo quindi la seguente definizione:

Def. I. Dato un sistema di punti ad una dimensione (def. I, 3) tale:

1.° che contenga tutti i suoi punti limiti, e il segmento rettilineo determinato dagli estremi di un suo segmento quanto piccolo si vuole con un estremo in un punto qualunque del sistema (oss. I, 13) è piccolo quanto si vuole;

2.° che ogni segmento (AB) di esso si componga di segmenti consecutivi; piccoli quanto si vuole;

il sistema si chiama *linea* XXVII) [1]).

Oss. I. Dalla 1ª proprietà risulta che ogni punto limite sulla linea è tale anche nello spazio generale (def. II, 12), e dalla 2ª proprietà risulta ancora che ogni punto che non è estremo per essa è punto limite di due serie di segmenti l'una sempre crescente, l'altra sempre decrescente a partire da un altro punto della linea.

Oss. II. Non ci preoccupiamo di vedere se ogni sistema ad una dimensione che si chiama linea, sia compreso o no nella nostra definizione [2]). Osserviamo soltanto che la linea materiale che può essere sostituita da una linea a tratti rettilinei, per la proprietà della retta che soddisfa alla def. I (teor. V. 10 e int. a', 95) è compresa nella def. I suddetta.

Non indaghiamo neppure se ogni linea o un segmento di essa che soddisfa alla def. I sia rappresentabile o no con tutte le sue proprietà da una linea intuitiva (oss. emp.), perchè ciò non occorre per le nostre ricerche [3]).

La linea semplice soddisfa pure alla def. I come risulta dalla def. I e dal teor. VII, 13.

Oss III. Non diamo la def. della linea intuitiva perchè in fondo non ne abbiamo bisogno per le nostre ricerche e d'altronde essa è compresa nella def. suddetta.

Def. II. Date più linee o segmenti di linee (def. I) $(A) \equiv ....AA_1..,. A_m....$, $(B) \equiv ...B...B_1...B_2....B_m....$, $(C) \equiv ...C...C_1...C_2...C^m$, $(X) \equiv X...X_1...X_2...X_m...$ ecc. in modo che i punti delle serie di esse (def. I e int. def. I, 62) si corrispondano univocamente e nel medesimo ordine (int. def. III, 42), non escluso però il caso che alcuni o tutti i punti di una o più serie coincidano, e che i punti di una o più serie coprano più volte una medesima linea o segmento di linea; il sistema di figure $...ABCD...X...$, $A_1B_1C_1...X_1...$ ecc. si chiama *sistema continuo di figure ad una dimensione.*

Le figure $...ABCD...X...$, $A_1B_1C_1,..X_1...$ si dicono *consecutive*, se AA_1, BB_1 ecc. sono punti consecutivi delle linee (A), (B) ecc., essendo punti consecutivi AA_1 quelli pei quali (AA_1) diventa più piccolo di ogni segmento dato della linea (A).

Le linee o segmenti di linea dati si chiamano *linee dei punti corrispondenti delle figure del sistema*; le quali, per ciò che si è detto, possono ridursi anche ad un solo punto, oppure possono coprire più volte una stessa linea o uno stesso segmento di linea.

Def. III. Se la corrispondenza fra i punti di due figure qualunque del sistema ad es. $...ABC...X...$, $...A_1B_1C_1...X_1...$ è una corrispondenza d'identità (oss. III, 15) e le parti corrispondenti delle due figure in questa corrispondenza sono pure corrispondenti nella corrispondenza del sistema continuo, chiameremo questo sistema *sistema continuo ad una dimensione di figure invariabili* (vedi più sotto oss. II).

XXVII) Rimanendo nel solo campo finito, valendo sempre l'ass. V d'Archimede fra i segmenti rettilinei è inutile parlare di campo finito e di unità finita, lo si intende tacitamente.

1) Non ci occorre di dare la def. di linea in senso assoluto.

2) Come abbiamo detto più volte non ci preoccupiamo di dare delle definizioni generali che valgano in ogni caso (vedi ad es. l'int. nota, 4), ma definizioni che servano nei casi che noi consideriamo e che comprendano gli enti già chiamati collo stesso nome.

3) Se si ha una funzione continua qualunque $y = f(x)$ nell'intervallo (ab) (vedi ad es. Dini l. c. pag. 35-37 e 46) rappresentando questa funzione nel piano Euclideo (xy), vediamo che tutti i punti determinati dalla y considerati nell'ordine dei valori corrispondenti di x nell'intervallo (ab) determinano un segmento (AB) di un sistema ad una dimensione di punti che soddisfa alla def. I. Ma la y può anche non ammettere in tutti i punti la derivata e quindi la linea così ottenuta non ammettere la tangente come la linea intuitiva (Dini l. c. pag. 67); ed anche se l'ammette perchè sia rappresentabile con una linea intuitiva occorre che la serie delle tangenti sia pure continua (oss. emp.).

Def. IV. Se i gruppi ordinati (A), (B) della def. III sono situati in una retta e se i segmenti fra le coppie di punti corrispondenti sono uguali, $(AB) \equiv (A_1B_1)$ ecc., il sistema si chiama *sistema continuo di segmenti invariabili sulla retta.*

Oss. IV. Noi avremo da occuparci principalmente dei sistemi continui di figure invariabili. Si può avere un sistema continuo di segmenti (def. II). $(AB), (A_1B_1)$ ecc. senza però che i segmenti delle coppie di punti corrispondenti siano uguali. Ciò succede ad es. se nel segmento (AB) vi è un punto X nel quale coincidono tutti i punti del gruppo (X) (def. II). Se A_1 è compreso in (AX), B_1 dovrà essere fuori del segmento (XB) nel verso di (AB), e tale che $(AB) \equiv (A_1B_1)$ (coroll. I, teor. III, 4; int. def. I, 61 e *d*, 73). Ma in tal caso non è $(AX) \equiv (A_1X_1) \equiv (A_1X)$ e neppure $(XB) \equiv (XB_1)$ [1].

Oss. V. Badiamo che le definizioni di questo numero sono subordinate alla esistenza delle figure definite, e che noi dimostreremo per ogni spazio particolare di cui ci occuperemo.

Nello spazio generale mediante i teor. del n. 16 e 17 e il teor. II, del n. 31 e il teor. IV del n. 12 possiamo costruire di tali sistemi.

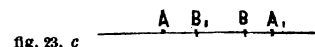
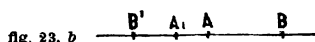
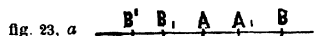
Teor. I. In ogni sistema continuo di segmenti invariabili sulla retta, i segmenti sono congruenti.

Siano (AB), (A_1B_1) due segmenti qualunque del sistema e quindi uguali (def. IV). È da osservare intanto che ad ogni punto A_1 del segmento (AB) non può corrispondere nel sistema un punto B_1 dello stesso segmento, perchè non sarebbe $(AB) \equiv (A_1B_1)$ (ass. II, *a* e int. def. I, 61; *d*, 73).

fig. 23, *a* — B' B₁ A A₁ B

fig. 23, *b* — B' A₁ A B

fig. 23, *c* — A B₁ B A₁ / A B B₁ A₁

1) Supponiamo dapprima, essendo A_1 interno ad (AB), che (A_1B_1) sia diretto nel verso opposto. Il punto B_1 dovrà essere compreso nel segmento (AB') simmetrico di (AB), rispetto ad A (def. II, 35) perchè $(A_1B_1) \equiv (AB')$, ed essendo A_1 fuori del segmento (AB') in (AB). Se (A_1B_1) contenesse (AB') non sarebbe ad esso uguale (int. def. I, 61 o *d*, 73, *b*, 61), e quindi neppure ad (AB) (int. def. II, 61). Ai punti B_r interni di (B_1A) non possono corrispondere punti A_r di (AA_1), perchè non sarebbe $(A_rB_r) \equiv (AB_1) \equiv (AB)$ (def. I, 61 o *d*, 73) e quindi ai punti A_r di (AA_1) devono corrispondere punti B_r fuori del segmento (BB_1) non potendo nemmeno ad essi corrispondere per la stessa ragione punti di (A_1B).

Ora ai punti di (AA_1) che determinano un continuo, corrispondono dunque univocamente i punti dell'altro segmento determinato da B e B_1 che non contiene A (def. IV). Ma fuori del segmento (BB_1) si può scegliere un punto B_r tale che non sia $(A_rB_r) \equiv (AB)$; basta che (BB_r) sia maggiore di (AA_1), dunque è assurdo che (A_1B_1) sia in questo caso di verso opposto ad (AB), e quindi è congruente con (AB) (def. I, 35) (fig. 23, *a*).

2) Se invece A_1 è fuori del segmento (AB), ad es. nel verso da B ad A, e (A_1B_1) non è dello stesso verso di (AB), ad ogni punto A_r di (AA_1) non può corrispondere un punto B_r fuori del segmento (AB) nel verso di (AB)

1) Col linguaggio del movimento (int. 67) ciò vorrebbe dire che la parte (AX) si accorcerebbe, mentre si allungherebbe la parte (XB) di altrettanto, in modo da mantenere l'uguaglianza fra (AB) e (A^1B_1), ma non la invariabilità.

perchè $(A_r B_r)$ avrebbe per parte (AB), mentre deve essere ad esso identico. Nè può corrispondere ad A_r un punto fuori del segmento (A_1B_1) nel verso di (A_1B_1) perchè $(A_r B_r)$ avrebbe per parte (A_1B_1). Dunque ad A_r deve corrispondere un punto B_r del segmento (BB_1). Ma si può sempre scegliere in questo segmento un punto B_r tale che $(A_r B_r)$ non sia uguale ad (AB) (def. IV), e quindi è impossibile anche in tal caso che (BB_1) sia di verso opposto ad (AB).

3) Rimane finalmente il caso in cui A_1 sia fuori di (AB) nel verso di (AB); ma è facile vedere che si ricade in uno dei casi precedenti. Invero se (A_1B_1) è di verso opposto ad (AB), e B_1 cade in (AB), essendo $(BA) \equiv (A_1B_1)$ (int. g, 99), e quindi considerando invece i segmenti (B_1A_1), (AB), l'elemento B cade in (B_1A_1), come A_1 cade in (AB) nel caso 1); oppure B_1 cade fuori di (AB) sempre nel verso di (AB), chè altrimenti (A_1B_1) conterrebbe come parte (AB); ed allora considerando (B_1A_1), l'elemento B cade fuori di questo segmento nel verso (A_1B_1) e si ricade nel caso 2).

Dim. 2.ª Se A_1 si accosta indefinitamente ad A, B_1 deve avvicinarsi indefinitamente a B per la corrispondenza fra i punti (A) e (B) (def. II), e quindi se A_1 è interno ad (AB), B_1 deve esser quanto si vuole vicino a B ma fuori di (AB), dovendo essere $(AB) \equiv (A_1B_1)$ (int. a, 99), e quindi (AB), (A_1B_1) sono dello stesso verso. Se invece A_1 è fuori di (AB) e quanto si vuole vicino ad A, B_1 dovrà essere per la stessa ragione quanto si vuole vicino a B e dentro di (AB). Quindi se (AB) e (A_1B_1) sono consecutivi, sono dello stesso verso. Ora, dato un segmento (AA_1), esso si può considerare come somma di parti piccole quanto si vuole o indefinitamente piccole (int. 105 e def. I, 95), e quindi valendo la proprietà per ogni segmento (A_1B_1) consecutivo di (AB), il teor. è dimostrato.

Coroll. Due segmenti simmetrici non possono mai appartenere ad un sistema continuo di segmenti invariabili (def. II, 35).

Teor. II. In un sistema continuo di segmenti invariabili i segmenti non possono avere punti corrispondenti comuni (teor. I, 35, e teor. I).

Teor. III. Dati due segmenti (AB), (A_1B_1) qualunque di un sistema continuo di segmenti invariabili sulla retta, i segmenti di due punti corrispondenti qualunqne del sistema sono congruenti (teor. II, 35 e teor. I).

Teor. IV. Una coppia di segmenti congruenti (AB) e (A_1B_1) della retta fa parte di un sistema continuo di segmenti invariabili in un dato verso di essa.

Basta far corrispondere A ad A_1, B a B_1, e ai punti di (AA_1), nello stesso ordine i punti di (BB_1) in modo che i segmenti fra i punti corrispondenti siano uguali ad (AA_1), il che è in ogni caso possibile essendo $(AA_1) \equiv (BB_1)$ (teor. II, 35 e teor. a ed e, 99).

§ 23.

Assioma pratico — Movimento reale sulla retta XXVIII).

37. *Oss. emp.* Per potere costruire sopra un oggetto rettilineo (int. fig. I) o su oggetti rettilinei diversi due segmenti uguali (oss. V, 4), abbiamo bisogno di un mezzo pratico, che non ci è dato dagli assiomi e dalle ipotesi precedenti, i quali se bastano allo svolgimento teorico della geometria, non bastano però per le pratiche applicazioni di essa. Ora ricorrendo all'esperienza, se un corpo si muove in un mezzo fisicamente omogeneo noi intuitiamo, osservando il corpo in due posizioni diverse, che nella seconda posizione il corpo occupa un luogo *uguale* al luogo occupato dapprima, e in modo che le parti del luogo occupato da una stessa parte del corpo sono uguali. Diciamo perciò che il corpo può muoversi *senza deformazione*. Vediamo inoltre che un punto materiale qualunque di un corpo a partire da un punto dato può muoversi nel luogo occupato da ogni oggetto rettilineo passante pel punto dato, occupando la posizione di tutti gli altri punti dell'oggetto. Diremo per ciò che il corpo può muoversi *liberamente.*

L'assioma pratico che serve alle pratiche applicazioni della geometria è il seguente:

Un corpo può muoversi senza deformazione.

Oss. I. Questo assioma *suppone* evidentemente una proprietà dello spazio intuitivo (oss. emp. I) e cioè che nella forma astratta ad esso corrispondente esistano sistemi continui di figure invariabili (def. III, 36) analoghe a quelle dei sistemi descritti dal corpo in movimento, la cui esistenza noi invece dimostreremo colla costruzione di questa figura astratta [1]).

Trattando del movimento astrattamente, ammettendo cioè il principio che un corpo *si muove effettivamente nel mondo esterno* e non nel senso del n. 67 dell'introduzione e che abbiamo talvolta usato fin qui per comodità di linguaggio, lascieremo ai punti del corpo piena libertà di movimento fra loro, in modo cioè che ogni punto possa muoversi indipendentemente dagli altri, *intendendo altresì col liberamente che possa essere assoggettato a tutte le condizioni, compatibili colle proprietà dell'ambiente in cui si muove rispetto agli altri punti.*

Diamo il seguente assioma, che chiameremo ugualmente pratico non avendo bisogno di esso per la teoria.

Ass. II pratico. **I punti di una figura qualunque possono muoversi liberamente è indipendentemente gli uni dagli altri descrivendo ciascuno una linea intuitiva, in modo però che le posizioni dei punti della figura corrispondano univocamente e nel medesimo ordine alle posizioni successive, non escluso però che più punti possano occupare lo stesso luogo in una posizione successiva** [2]).

Def. I. Un punto e una figura, i cui punti non si muovono, si chiamano *fissi.*

XXVIII) Mentre l'assioma I pratico nel solo campo finito diventa un assioma necessario (note XVI, XVIII), l'assioma pratico del movimento rimane tale anche pel solo campo finito cogli assiomi II e II'.

1) Vedi Libro III di questa parte e pref.

2) In questo modo la corrispondenza tra una posizione e la successiva è univoca, ma può non essere reciproca (int. def. II, 42). Ritenendo però i punti che vengono a coincidere in un punto come distinti, la corrispondenza è anche reciproca.

Oss. II. Le posizioni dei punti della figura ci danno le posizioni della figura stessa.

Teor. I. Se un segmento (AB) si muove sulla retta, descrive un sistema continuo di segmenti sulla retta.

Difatti ogni punto del segmento descrive una linea intuitiva che è la retta o un tratto di retta (ass. II. pr.), che può ridursi anche ad un punto in casi speciali (ass. II, pr.), e in modo che le posizioni diverse di due punti X, X_1, X_2..., Y, Y_1, Y_2..., si corrispondono nel medesimo ordine (ass. II pr.), e quindi se X_1 si avvicina indefinitamente a X, Y_1 si avvicina indefinitamente a Y e inversamente; dunque la def. II, 36 sulla retta è soddisfatta.

Oss. III. Liberamente significa qui che il segmento può muoversi secondo tutti i sistemi continui di segmenti possibili sulla retta.

Def. II. Se una figura muovendosi descrive un sistema di figure invariabili (def. III, 36) diremo che si *muove senza deformazione.*

Teor. II. Un segmento può muoversi sulla retta rimanendo invariabile.

Basta obbligare i punti del segmento a percorrere i gruppi di punti corrispondenti di un sistema continuo di segmenti invariabili di, cui fa parte il segmento dato (ass. II pr. def. III, 36 e oss. III).

Oss. IV. La possibilità di questo movimento evidentemente deriva dall'esistenza sulla retta del sistema suddetto, la quale dipende dalla omogeneità e dalla continuità della retta (teor. II, teor. III e coroll. II, ass. II, *a*, 4).

Oss. V. Siccome non considereremo nelle nostre ricerche che il solo movimento senza deformazione, che serve come dicemmo allo scopo di eseguire praticamente le nostre costruzioni nel campo esterno, così quando parleremo d'ora innanzi del movimento di una figura intenderemo il movimento senza deformazione, dimostrando però prima, come abbiamo fatto per la retta, la esistenza di sistemi continui di figure invariabili nell'ente che noi dapprima costruiremo.

Def. III. Se un segmento si muove sulla retta in una data direzione descrivendo un sistema di segmenti invariabili, diremo che *scorre* sulla retta in una data direzione.

La proposizione: un punto che si muove in una *data direzione* sulla retta, significa che le posizioni di ogni punto A sono situate in un dato verso a partire da A sulla retta (def. II, 62). Così pel segmento.

Teor. III. Un segmento che scorre sulla retta rimane congruente a sè stesso (teor. I, 36).

Teor. IV. Quando di un segmento in una retta si tien fisso un punto, esso non può scorrere sulla retta (vale a dire tutti gli altri punti del segmento rimangono fissi). (teor. II, 36, def. I e def. III).

Teor. V. Quando un segmento scorre sulla retta in uno o nell'altro verso, in ogni posizione i segmenti descritti dai suoi punti sono congruenti (teor. III, 36 e def. III).

Teor. VI. Due segmenti congruenti della retta possono trasportarsi senza deformazione l'uno sull'altro (teor. IV, 36 e def. II).

Teor. VII. Due segmenti simmetrici non possono trasportarsi l'uno sull'altro, senza deformazione sulla retta (coroll. teor. I, 36 e def. II e III).

LIBRO II.

IL PIANO.

Capitolo I.

Il fascio di raggi e il piano Euclideo.

---

§ 1.

Settori angolari ed angoli di un fascio di raggi XXIX).

38. *Def. I.* Una parte qualunque di un fascio di raggi limitata a due raggi *a* e *b* (teor. I e def. I, 30; e int. def. I, II, 62 e def. II, 27) si chiama *settore angolare del fascio*, o semplicemente *settore*; *a* e *b* i *lati*, *R* il *vertice* del settore angolare.

Se *A* e *B* sono i punti della retta direttrice *r* del fascio, che determinano con *R* i raggi *a* e *b*, chiameremo *lati* anche i segmenti (*RA*) ed (*RB*).

Oss. I. Per la corrispondezza univoca fra i raggi del fascio e i punti della retta direttrice completa (teor. I, 30) ad ogni segmento di questa corrisponde un settore angolare del fascio, e inversamente.

Def. II. Angolo di due raggi estremi di un settore angolare è il settore stesso considerato come *sostituibile da ogni altro settore ad esso uguale* in ogni unione con altri settori [1]).

Oss. II. Quando sarà indifferente considerare l'angolo in luogo del settore angolare, sostituiremo spesso, anche per seguire l'uso comune, la parola angolo alla parola settore angolare, come ciò può farsi per le parole distanza e segmento, sebbene queste come le prime denotino enti diversi.

Ind. I. Il settore angolare o l'angolo determinato dal segmento (*AB*) col

---

XXIX) Sia coll'ass. II come coll'ass. II' (nota IV) la definizione e le proprietà del fascio si possono dare al posto indicato nella nota XLI.

1) L'angolo di due raggi in un settore angolare è la grandezza intensiva del settore, come la distanza di due punti *A* e *B* in un segmento (*AB*) è la grandezza intensiva del segmento (nota, 2; def. I, 5; int. def. II, *a* e *c*, III). Vedi nota del n. 40.

punto R lo indicheremo anche coi simboli $R.(AB)$ oppure $\widehat{ARB}$ od anche $\widehat{BRA}$.

Def. III. Diremo che il settore angolare, o l'angolo $R.AB$ è *compreso* fra i suoi lati RA, RB oppure (RA) e (RB) (def. I).

Oss. III. Come due punti A e B della retta r completa (ip. V e def. I, 29) determinano due segmenti su di essa che insieme presi danno l'intera retta (int. c, 64), così i due raggi a e b oppure RA, RB determinano nel fascio due settori angolari che costituiscono l'intero fascio (teor. I, 30).

Def. IV. Per settore angolare ed angolo di due raggi in un fascio intenderemo sempre il più piccolo, quando non determinano due settori angolari uguali, nel qual caso si potrà considerare l'uno o l'altro qualora non occorra tener conto della loro diversità.

Oss. IV. Quando è dato il settore angolare (ab) intenderemo, ove non diremo diversamente (int. ind. I, 64), che il suo verso sia quello che da a conduce a b. Analogamente coi simboli $\widehat{ARB}$, $R.(AB)$ intenderemo che il verso è dato da RA a RB.

Def. V. Ogni settore angolare del fascio i cui lati sono due raggi opposti a e a' si chiama *piatto*.

Def. VI. Due settori angolari (ab), $(a'b')$ del fascio i cui lati sono raggi opposti (def. I, 7), si chiamano *opposti al vertice nel fascio*.

Def. VII. Due settori angolari (ab), (ba') del fascio che hanno un lato comune b e gli altri due lati sono raggi opposti, si chiamono *adiacenti*.

Oss. V. Da questa definizione risulta immediatamente che due settori adiacenti insieme presi danno un settore piatto (def. V).

Def. VIII. Se due settori adiacenti sono uguali si chiamano *retti*.

Def. IX. Se il centro del fascio di rette o di raggi è all'infinito, il fascio si chiama anche *fascio di rette o di raggi paralleli*.

Quando parleremo perciò senz'altro di un fascio di raggi, intenderemo che il suo centro sia nel campo finito (oss. 31 e conv. 28).

Def. X. Il settore angolare di un fascio di raggi paralleli si chiama *striscia*, e le rette o i raggi che la limitano *lati* della striscia.

Def. XI. Considerando le due coppie di raggi opposti a, a'; b e b' situati su due rette α e β di un fascio, i settori angolari o gli angoli (ab), (ba'), $(a'b')$ $(b'a)$ si chiamano *settori angolari ed angoli delle due rette*.

Oss. VI. Due punti distinti qualunque della retta la determinano nel sistema Euclideo (teor. II, 30); ma non si può dire che due raggi a e b limitati in un punto R determinino un solo fascio. Difatti se prendiamo sopra questi raggi due punti A e B, la retta AB determina con R un solo fascio (def. I, 30) ma non sappiamo ancora se tutti i fasci che si ottengono considerando altre coppie di punti A e B sui raggi a e b coincidano.

Se la retta direttrice del fascio non è all'infinito e consideriamo su di essa due segmenti uguali qualunque (AB) e (CD), i settori angolari ARB, CRD non sono in in generale figure uguali. Infatti se A e B sono punti a distanza differente da R e se scegliamo il punto di mezzo M del segmento (AB), i due triangoli ARM, MRA non sono uguali, perchè non hanno i tre lati uguali (teor. II, 15), e quindi, come vedremo in seguito, non sono uguali in generale nemmeno i settori $\widehat{ARM}$, $\widehat{MRB}$.

§ 2.

Il fascio (Rr_∞) — *Settore angolare e angolo di due raggi. Prime proprietà di essi — Unità angolare* XXX).

39. *Oss. I.* Data una retta r_∞ all'infinito noi possiamo considerarla come retta limite assoluta di ogni punto R del campo finito (teor. III, IV, 32). È da tenere presente che i campi limiti assoluti dei punti del campo finito coincidono rispetto alle unità finita e infinita, ma sono distinti in senso assoluto (teor. IV, 32), e quindi se la retta r_∞ rispetto alle unità finita e infinita si può considerare come retta limite assoluta di due punti A e B del campo finito, in senso assoluto si sa però che queste due rette sono determinate e distinte.

Oss. II. Per il fascio (Rr_∞) valgono le stesse proprietà enunciate per i fasci (Rr), ma troviamo subito per esso altre proprietà che solo più tardi potremo estendere agli altri fasci quando cioè avremo dimostrato che tutti i fasci di raggi (Rr) sono identici.

Teor. I. Due segmenti $(A_\infty B_\infty)$, $(C_\infty D_\infty)$ *uguali della retta* r_∞ *determinano due settori angolari uguali intorno al punto* R.

Difatti i due triangoli $A_\infty R B_\infty$, $C_\infty R D_\infty$ sono uguali (teor. III, 34 e oss. I).

Teor. II. Due segmenti disuguali $(A_\infty B_\infty)$, $(C_\infty D_\infty)$ *tali che* $(A_\infty B_\infty) > (C_\infty D_\infty)$ *determinano due settori* $R.(A_\infty B_\infty)$, $R.(C_\infty D_\infty)$ *disuguali, cioè* $R.(A_\infty B_\infty) > R.(C_\infty D_\infty)$.

Questo teor. deriva dal teor. I, dalla def. del fascio di raggi per la corrispondenza univoca e dello stesso ordine fra i raggi del fascio e i punti della retta (teor. I, 30) e per le def. I e II del n. 61 dell'introduzione.

Coroll. I. Due settori uguali del fascio (Rr_∞) *determinano due segmenti uguali sulla retta* r_∞.

Se i segmenti $(A_\infty B_\infty)$, $(C_\infty D_\infty)$ determinati dai due settori sulla retta r_∞ fossero disuguali i due settori sarebbero disuguali, contro il dato (teor. II e int. b e b', 61).

Teor. III. Ogni segmento finito rispetto alla retta completa r_∞ *determina un settore finito rispetto all'intero fascio* (Rr_∞).

Difatti se $(A_\infty B_\infty)$, $(C_\infty D_\infty)$ della retta r_∞ sono finiti fra loro, e se l'uno non è multiplo dell'altro ed è $(A_\infty B_\infty) < (C_\infty D_\infty)$ vi è un numero m tale che

$$(A_\infty B_\infty)\, m < (C_\infty D_\infty) < (A_\infty B_\infty)(m+1) \qquad \text{(int. } c', 81)$$

e quindi avremo

$$R.(A_\infty B_\infty)\, m < R.(C_\infty D_\infty) < R.(A_\infty B_\infty)(m+1) \qquad \text{(teor. I, II)}$$

e perciò i settori $R.(A_\infty B_\infty)$, $R.(C_\infty D_\infty)$ sono finiti fra loro (int. d, d', 81 e def. II. 82).

XXX) Tutto questo paragrafo va naturalmente tralasciato limitandosi, come supponiamo in queste note, al solo campo finito (nota I).

Teor. IV. Un fascio di raggi (Rr_∞) *è identico nella posizione delle sue parti.*

Difatti la retta r_∞ è identica nella posizione delle sue parti (ass. II, a e ip. I), e quindi a partire da un punto qualunque di essa esiste in uno e nell'altro verso un segmento uguale ad un segmento qualunque dato (coroll. II, teor. III, 4 e oss. III, 18), mentre a segmenti uguali della retta r_∞ corrispondono settori angolari uguali del fascio (Rr_∞) (teor. I, int. def. I, 70 e oss. II, 81).

Teor. V. Un settore (ab) *del fascio* (Rr_∞) *è uguale al settore* (ba), *vale a dire allo stesso settore percorso nel verso opposto.*

Imperocchè ciò ha luogo per ogni segmento $(A_\infty B_\infty)$ della retta r_∞ (int. g, 99 e c, 104).

Teor. VI. Due fasci di raggi i cui centri sono nel campo finito e le rette direttrici all'infinito, sono uguali in senso assoluto, se esse sono rette limiti assolute dei due centri, o relativamente alle unità finita e infinita se le rette direttrici sono situate in campi limiti assoluti di due punti del campo finito.

Invero siano Rr_∞; $R'r'_\infty$ i centri e le rette direttrici dei due fasci. Se sono rette limiti assolute di R e R', questi sono distanti dai punti delle rettè r_∞, r'_∞ di un segmento retto (teor. III, 32), e quindi stabilita fra le due rette r_∞ e r'_∞ una corrispondenza d'identità (teor. VI, 15) e fatto corrispondere il punto R al punto R', ad ogni triangolo $RA_\infty B_\infty$ della prima figura (Rr_∞) corrisponde un triangolo uguale $R'A'_\infty B'_\infty$ della seconda (teor. III, 17, teor. III, 34). Quindi scelti due punti X e Y situati sui raggi RA_∞, RB_∞, ad essi corrispondono due punti X' e Y' in RA'_∞, RB'_∞ a distanze da R' uguali rispettivamente a quelle dei punti X e Y da R; dunque i due triangoli RXY, $R'X'Y'$ sono uguali per avere due lati e la coppia da essi compresa uguale (teor III, 16) e perciò $(XY) \equiv (X'Y')$ (coroll. teor. III, 16). Dunque le due figure (Rr_∞), $(R'r'_\infty)$ sono uguali (teor. III, 15).

La seconda parte del teorema deriva in modo analogo dal teor. IV del n. 32.

Teor. VII. Se date due rette AB, AC si scelgono su di esse due punti quàlunque all'infinito B_∞, C_∞, *e* $(B_\infty C_\infty)$ *è finito rispetto alle retta completa e la retta* $B_\infty C_\infty$ *non coincide con una delle due rette rispetto all'unità infinita, le due rette sono distinte nel campo finito.*

Siccome la retta $B_\infty C_\infty$ non coincide con nessuna delle due rette AB_∞, AC_∞ (teor. IV, 22), queste due rette sono distinte rispetto all'unità infinita (teor. V, 22), e perciò anche rispetto all'unita finita (teor. II, 31).

Teor. VIII. Se due punti B_∞, C_∞ *all'infinito nel campo limite assoluto di un punto A sono a distanza finita, i due raggi che congiungono A coi due punti dati coincidono rispetto all'unità finita.*

Difatti il segmento $(B_\infty C_\infty)$ è infinitesimo rispetto all'unità infinita e perciò le due rette AB_∞, AC_∞ coincidono rispetto a questa unità (teor. II e oss., 31 e teor. III, 22), e perciò anche rispetto all'unità finita (teor. II, e oss. 31).

Def. I. Per settori angolari di due raggi a e b limitati ad un punto R intenderemo sempre quelli considerati nel fascio determinato dal punto R e dal-

la sua retta limite assoluta data dai suoi punti limiti assoluti in a e b (def. II, 32 e teor. III, 32), fintantochè non diremo diversamente.

Oss. III. A segmenti uguali della retta r_∞ corrispondono settori angolari uguali intorno al punto R nel fascio (Rr_∞), e inversamente (teor. I e coroll. I, teor. II). Per ***misura dei settori angolari o degli angoli intorno al punto R appartenenti o no ad un medesimo fascio considereremo i segmenti o le distanze determinati dai punti limiti assoluti sui loro raggi estremi rispetto al punto R.*** E inversamente, come ***misura dei segmenti di una retta r_∞ si possono considerare i settori angolari intorno al punto R, di cui r_∞ è una retta limite assoluta.*** (Vedi int. def. IV, 111).

Coroll. I. Se due raggi RA, RB sono distinti rispetto all'unità del campo finito, essi determinano un settore finito.

Difatti se non fosse finito, ad esso corrisponderebbe un segmento infinitesimo $(A_\infty B_\infty)$ sulla retta limite assoluta di R determinata dai raggi RA, RB, (teor. III) rispetto all'unita infinita, e quindi i due raggi non sarebbero distinti (teor. VIII).

Coroll. II. Congiunti gli estremi di due segmenti (AB), (CD) finiti con un punto R fuori di (AB) e (CD), essi danno due settori (ab), (cd) finiti.

Perchè R dà con A e B, come con C e D, due raggi distinti essendo R fuori di AB e di CD rispetto all'unità del campo finito (teor. IV, 22).

Coroll. III. In un triangolo ABC con un lato infinitamente piccolo l'angolo di vertice opposto è infinitamente piccolo (teor. V, 22).

Teor. IX. Se due settori angolari hanno angoli uguali, i due settori sono uguali.

Infatti ciò vale per due settori di un fascio (Rr_∞), valendo tale proprietà pei loro segmenti all'infinito rispetto alle loro lunghezze (def. I, teor. I, 5); e vale pure per due settori di due tali fasci (teor. VI), e quindi per due settori angolari qualunque (def. I).

40. *Teor. I. Due settori angolari che hanno i lati paralleli sono uguali rispetto all'unità del campo finito e infinito, e possono ritenersi tali anche in senso assoluto se non è stabilito diversamente.*

Siano $\widehat{BAC}$, $\widehat{B'A'C'}$ i due settori; possiamo supporre che i punti all'infinito X_∞, Y_∞ dei due raggi AB, AC rispetto all'unità finita siano punti limiti assolnti di A (def. II e coroll. teor. II, 32). Ma siccome sono situati anche nei raggi $A'B'$, $A'C'$ possiamo supporre la stessa proprietà rispetto ad A'. Le rette limiti assolute di A e A' determinate dai punti limiti assoluti dei raggi AB, AC; $A'B'$, $A'C'$, che indicheremo con $X_\infty^{(a)}$, $Y_\infty^{(a)}$; $X_\infty^{(a')}$; $Y_\infty^{(a')}$, sono coincidenti anche rispetto all'unità infinita (teor. III, IV, 32). Rispetto a questa unità i raggi paralleli coincidono, e quindi i segmenti limiti assoluti determinati dai due settori angolari suddetti, se non sono uguali in senso assoluto, differiscono di un infinitesimo rispetto all'unità infinita. Ma in tal caso si può considerare sulla retta limite di A' un segmento $(X_\infty^{(a')} Y'^{(a')}_\infty) \equiv (X_\infty^{(a)} Y_\infty^{(a)})$, che differisce dunque di un infinitesimo dal segmento $(X_\infty^{(a')} Y_\infty^{(a')})$. Però congiungendo il punto A' col punto $Y'^{(a')}_\infty$, questo raggio, sia relativamente

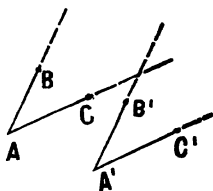



fig. 24

all'unità finita come a quella infinita, si confonde col raggio $A'Y_{\infty}^{(a)}$ ossia $A'Y_{\infty}$ (coroll. teor. II, 32) dunque il teor. è dimostrato (fig. 24) XXXI).

Coroll. I. Dati due segmenti qualunque (AB) e (CD) *percorsi nel verso da A a B, da C a D, se dai punti di uno di essi, ad es.* (AB), *si tirano i raggi paralleli all'altro, i settori angolari che questi raggi formano col raggio determinato da* (AB), *sono uguali.*

Difatti tiriamo ad es. da A e B i raggi paralleli al raggio determinato da (CD). I settori angolari che essi formano col raggio (AB) hanno un lato comune, e gli altri due lati paralleli; si possono dunque considerare come due settori angolari coi lati paralleli, e quindi sono uguali.

Oss. I. La definizione della misura di un angolo di due segmenti o raggi (oss. III. 39) suppone che i due segmenti si incontrino o siano limitati ad un punto comune. La suddetta misura può servire anche per due segmenti (AB), (CD) qualunque, di cui siano dati i versi nei quali debbono essere percorsi, o in altre parole siano dati i loro punti all'infinito (teor. I, e def. II, 33). Invero due segmenti che non si trovano nelle condizioni precedenti non determinano un settore angolare, ma se dai punti di uno di essi si tirano i raggi paralleli all'altro, tutti i settori angolari che così si ottengono possono ritenersi uguali anche in senso assoluto, oltre che rispetto all'unità del campo e infinito. Dunque diremo:

Def. I. Per *angolo* di due segmenti di cui è dato il verso s'intende quello che viene misurato dalla distanza dei punti limiti assoluti dei due raggi rispetto ad un punto del campo finito di ciascuno di essi [1]).

Coroll. II. L'angolo di due segmenti paralleli diretti nello stesso verso è nullo; quello di due segmenti paralleli e di verso opposto è uguale ad un angolo piatto. (coroll. V e VI, teor. I, 33; coroll. I e def. I).

Def. II. L'angolo che corrisponde all'unità di misura delle distanze nel campo infinito (conv. 28) chiamasi *unità angolare fondamentale*, od anche *unità angolare* non usandone altre, come faremo noi.

Teor. II. Due settori angolori apposti al vertice sono uguali.

Difatti siano (ab), ($a'b'$) i due settori angolari di vertice R; e indichiamo con $A_{\infty}B_{\infty}$ i punti limiti assoluti all'infinito dei lati a e b, e con $A'_{\infty}B'_{\infty}$ quelli dei lati a' e b' rispetto ad R, che sono punti opposti dei primi due (def. II, 32). I due triangoli $A_{\infty}RB_{\infty}$, $A'_{\infty}RB'_{\infty}$ sono uguali (teor. III, 34), e perciò anche le due coppie rettilinee (ab) e ($a'b'$) (coroll. teor. III, 17) quindi anche i settori angolari (ab), ($a'b'$) (teor. III, 15).

Oppure: essi sono uguali essendo figure corrispondenti nella corrispondenza d'identità fra le due coppie di raggi (ab), ($a'b'$) (teor. II e oss. IV, 15).

Def. III. Per settori angolari di due segmenti o raggi opposti limitati ad un punto R sulla medesima retta intenderemo quelli generati dal punto R e da una retta che passa pei punti limiti assoluti dei due raggi rispetto a R (def. II, 32 e teor. II, 30).

Teor. III. I due settori angolari (*angoli*) *piatti determinati da un seg-*

XXXI) Questo teorema senza l'uso dell'infinito sarà dimostrato nel piano e in generale in una nota del n. 52 coll'aiuto di teoremi dello spazio a tre dimensioni.

1) L'oss. I e la def. I, fanno meglio conoscere la differenza che c'è fra l'angolo e il settore angolare (def. I e II, 38).

mento, o raggio limitato da un suo punto R, e dal suo prolungamento sono uguali, sia considerati nello stesso verso come nel verso opposto.

Infatti i due punti A_∞, A'_∞ limiti assoluti dei due raggi opposti rispetto ad R sono punti opposti su ogni retta r_∞ all'infinito che passa per essi (def. II, 32 e teor. II, 30), e dividono questa retta per metà (def. III, 6); e perciò i due settori angolari piatti determinati dai due raggi opposti a e a' sono uguali sia nello stesso verso come in verso opposto, perchè tale è la proprietà dei segmenti della retta r_∞ determinati dai punti A_∞, A'_∞.

Essi hanno anche la stessa misura (oss. III, 39), vale a dire lo stesso angolo (def. II, 38)

Coroll. Una retta passante pel centro del fascio (Rr_∞) *lo divide in due parti uguali nello stesso verso e in verso opposto.*

41. *Oss. I.* Le denominazioni usate pei segmenti o per le distanze della retta completa (def. 1, 29) possono essere senz'altro usate per i settori angolari e per gli angoli.

Def. I. Se il segmento all'infinito corrispondente ad un settore angolare (def. I, 39) è retto (def. IV, 29) il settore angolare, o l'angolo corrispondente, si chiama *retto.*

Se un settore angolare, o un angolo, è maggiore di un retto dicesi *ottuso; acuto,* se è minore di un retto.

Def. II. Chiameremo *supplementari* due settori angolari o angoli la cui somma è uguale ad un angolo piatto, ossia alla somma di due angoli retti — *complementari* invece quelli la cui somma è uguale ad un *angolo retto.*

Teor. I. Due settori angolari (angoli) adiacenti sono supplementari.

Difatti essi danno per somma un settore angolare (angolo) piatto (def. VII, 38 e def. I, 39).

Teor. II. Tutti i settori angolari (angoli) retti sono uguali.

Difatti tali sono i segmenti retti sulla retta completa (def. I e def. IV, 29).

Teor. III. Ogni settore angolare può essere diviso in n parti uguali.

Perchè tale è la proprietà di ogni segmento della retta completa (int b, 99 o a, 103).

Def. III. La retta che divide per metà un settore angolare (ab) si chiama *bissettrice* del settore angolare o dell'angolo (ab).

Def. IV. Due rette aa', bb' che hanno un punto comune R e sono divise da questo punto nelle coppie di raggi opposti a, a'; b, b', determinano quattro settori angolari consecutivi nel fascio (Rr_∞) da esse determinati (def. I, 39), cioè (ab), (ba'), $(a'b')$, $(b'a)$, che si chiamano i *settori* e *angoli* delle due rette.

Per settore angolare o angolo delle due rette intendiamo il minore, o uno o l'altro se sono uguali, eccetto che non faccia bisogno di tener conto anche degli altri.

Def. V. Se i punti all'infinito A_∞, A'_∞; B_∞, B'_∞ di due rette dividono la retta $A_\infty B_\infty$ in quattro segmenti retti, le due rette determinano quattro angoli retti. In tal caso le due rette si chiamano *perpendicolari.*

Così due raggi o due rette, anche non incontrandosi, sono ad angolo retto (def. I).

Teor. IV. La bissettrice di un settore angolare (ab) è pure bissettrice dell'altro settore determinato dai raggi a e b, e dal settore opposto al vertice.

Difatti vi è un solo pnnto di mezzo di un segmento $(A_\infty B_\infty)$ della retta r_∞ completa, mentre il punto opposto divide per metà l'altro segmento determinato da A_∞, B_∞, e il segmento opposto $(A'_\infty B'_\infty)$ (coroll. teor. V. 29 e int. *c*, 64).

Teor. V. Dal centro del fascio (Rr_∞) *si può condurre una sola perpendicolare ad una retta del fascio.*

Difatti vi sono due soli punti opposti B_∞, B'_∞ che dividono coi punti A_∞, A'_∞ della retta data la retta r_∞ in quattro segmenti retti consecutivi (ass. II, *a* o ip. I; int. *b*, 99 o *a*, 103).

Teor. VI. Una retta perpendicolare ad una retta data, lo è pure a tutte le parallele a questa retta.

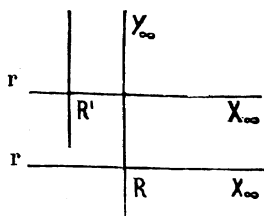



fig. 25

Siano r e r' le due rette parallele col punto X_∞ comune all'infinito (def. II, 26; def. I e II, 32 e conv. I, 28) e la retta RY_∞ perpendicolare ad una di esse, per es. ad r. L'angolo della retta r' colla retta RY_∞ è misurato dal segmento dei due punti $(X_\infty Y_\infty)$, e quindi é retto (def. I, 40) (fig. 25).

Teor. VII. Le due bissettrici dei settori angolari di due rette sono perpendicolari fra loro.

Difatti si sa che i loro punti limiti assoluti all'infinito determinano quattro segmenti retti (teor. V, 29).

§ 3.

Settori angolari e angoli di un triangolo e di due triangoli uguali.

42. *Oss. I.* In un triangolo ABC i raggi limitati da uno qualunqne dei tre vertici e determinati dagli altri due determinano tre settori angolari, cioè:

$$\widehat{ABC},\ \widehat{CBA},\ \widehat{ACB},$$

Se il settore angolare che si ottiene congiungendo per es. il vertice A coi punti del lato opposto (BC) (def. I, 38), non coincidesse col settore angolare $\widehat{BAC}$ anzidetto, il triangolo avrebbe altri tre settori angolari.

Per ora lasciamo sospesa tale questione e intanto, quando non diremo diversamente, per settori angolari e angoli di un triangolo intenderemo i primi tre XXXIII).

Gli altri tre, finchè dovremo tenerli distinti dai primi, li indicheremo coi simboli $A.(BC)$, $B.(CA)$ e $C.(AB)$.

XXXII) Anche questo teorema senza l'uso dell'infinito non può essere dimostrato in generale così semplicemente. Noi daremo la dimostrazione per rette situate nel piano (vedi coroll. I, teor. IX della nota del n. 48). In generale si può darne la dimostrazione colla considerazione dello spazio a tre dimensioni (libro III).

XXXIII) Limitandosi al campo finito, come settori angolari del triangolo bisogna considerare invece i secondi anzichè i primi tre, definendoli subito dopo la considerazione delle coppie dei triangoli (16), usando per l'angolo la def. I, 38, oppure volendo, la proprietà del teor, *a* del numero 111 dell'introduzione (int. *c*, 111).

Si può dare la definizione di coppie *adiacenti* di raggi e di coppie *adiacenti ortogonali* e quindi di rette *perpendicolari* aventi un punto comune, senza far uso del fascio (vedi nota XXIX). Per le coppie adiacenti basta seguire la def. VII del n. 38 data per i settori angolari di un fascio, e per quelle adiacenti ortogonali con un vertice comune basta supporre nella loro definizione che siano uguali (vedi nota XXXVI).

Def. I. Il settore angolare (angolo) del triangolo ABC di vertice A, dicesi *opposto* al lato (BC), e così (BC) si dice *opposto* al settore angolare, o angolo, di vertice A.

Def. II. Se un settore angolare, o angolo, di un triangolo è retto, il triangolo dicesi *rettangolo*. Il lato opposto all'angolo retto dicesi *ipotenusa* e gli altri due lati si chiamano *cateti*.

Teor. I. In due triangoli uguali i settori angolari determinati dai lati corrispondenti sono uguali.

In due triangoli identici ABC, $A'B'C'$ ai punti all'infinito dell'uno corrispondono i punti all'infinito dell'altro, e le distanze dei punti corrispondenti sono uguali (teor. I, 34), vale a dire le distanze dei punti limiti assoluti all'infinito dei lati rispetto ai loro vertici (def. II, 32) dei settori BAC, ACB, CBA sono rispettivamente uguali a quelle dei punti all'infinito analoghi dei lati dei settori corrispondenti $B'A'C'$, $C'B'A'$, $A'C'B'$ (def. I e teor. I, 39) XXXIV).

Oppure anche: perchè sono figure corrispondenti in figure identiche (teor. II e oss. IV, 15).

Coroll. In triangoli uguali ai lati corrispondenti uguali stanno opposti angoli uguali, e inversamente.

Questo coroll. deriva immediatamente dal teor. precedente e dalla def. II, 38.

Teor. II. Se due triangoli hanno due lati e il settore angolare compreso uguali, sono uguali.

Siano ABC, $A'B'C'$ i due triangoli, si ha:

$$(AB) \equiv (A'B'), \quad (AC) \equiv (A'C'), \quad \widehat{BAC} \equiv \widehat{B'A'C'}.$$

Le coppie rettilinee di vertici A e A' sono uguali (coroll. I, teor. II, 39; teor. III, 34 e coroll. teor. III, 17) ed essendo B e B', C e C' punti corrispondenti nella loro corrispondenza d'identità, si ha $(BC) \equiv (B'C')$, e perciò i due triangoli ABC, $A'B'C'$ avendo i tre lati uguali sono uguali (teor. III, 17) XXXV).

XXXIV) La 1ª dimostrazione di questo teorema si appoggia sulla definizione del fascio (Rr_∞) (def. I, 39) che limitandosi al solo campo finito non si può utilizzare. Si può procedere invece in questo modo. Siano ABC, $A'B'C'$ i due triangoli tali che i vertici A e A', B e B', C e C' siano corrispondenti nella corrispondenza d'identità dei due triangoli (oss. III, 15 e nota XII). I settori angolari $\widehat{ABC}$, $\widehat{A'B'C'}$ sono determinati dai punti dei lati (AC), $(A'C')$ coi vertici opposti B e B' (nota XXXIII).

Ora, ad un punto X del lato (AC) corrisponde un punto X' del lato $(A'C')$, in modo che $(AX) \equiv (A'X')$ (teor. II, 15), e perciò $(BX) \equiv (B'X')$. A due punti qualunque Y e Z del primo settore corrispondono due punti Y', Z' del secondo che hanno uguale distanza. Difatti se Y e Z sono situati nei due raggi BX e BX_1, essendo X e X_1 punti del segmento (AC) (per definizione devono essere sempre situati su due tali raggi del settore ABC), i punti d'intersezione dei raggi corrispondenti nel settore $A'B'C'$ col lato $(A'C')$ sono i punti X' e X_1' corrispondenti ai punti X e X_1, e i punti Y' e Z' sono nei raggi $B'X'$, $B'X'_1$ distanti da B' di quanto lo sono Y e Z da B. I due triangoli AXX_1, $A'X'X'_1$ sono uguali perchè hanno i tre lati uguali, e perciò le coppie di rette XB, X_1B; $X'B'$, $X_1'B'$ sono uguali (coroll. teor. III, 17). Dunque sono uguali i triangoli BYZ, $B'Y'Z'$ (teor. III, 16), e perciò $(YZ) \equiv (Y'Z')$; quindi il teor. è dimostrato (teor. III, 15). Il teor. II, 15 viene usato qui evidentemente pei soli segmenti rettilinei come abbiamo sempre fatto e faremo in seguito, mentre nella seconda dimostrazione del testo lo applichiamo in generale (vedi oss. IV, 15).

XXXV) Per dimostrare il teor. II bisogna dare dapprima i seguenti coroll. del teor. I.

Teor. III. Gli angoli di un triangolo isoscele opposti ai lati uguali sono uguali.

Difatti sia ABC il triangolo isoscele (def. III, 9), e $(AB) \equiv (AC)$. Consideriamo un altro triangolo $A'B'C'$ di cui il vertice A' coincida col punto A (int. def. III, 57), B' con C e C' con A. Evidentemente i due triangoli ABC, $A'B'C'$ sono identici, perchè hanno due coppie di lati corrispondenti uguali, cioè $(AB) \equiv (A'B')$, $(AC) \equiv (A'C')$, essendo $(AB) \equiv (AC)$, e $B\dot{A}C \equiv B'\dot{A}C'$ (teor. I, 17), quindi $\widehat{ABC} \equiv \widehat{A'B'C'}$ (teor. II). Ma $\widehat{A'B'C'} \equiv \widehat{ACB}$, dunque $\widehat{ABC} \equiv \widehat{ACB}$. (fig. 26).

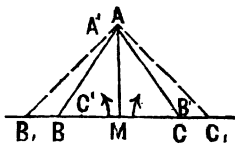



fig. 26

Oss II. Se il vertice A del triangolo isoscele opposto alla base (def. III, 9) cadesse all'infinito, non si può più dire in generale che a lati uguali stiano opposti angoli uguali (teor. V, 34).

Def. III. Le rette che passano pei vertici di un triangolo e pei punti di mezzo dei lati opposti si chiamano *mediane.*

Teor. IV. La mediana di un triangolo isoscele ABC che passa pel vertice A opposto alla base (BC), é la bissettrice del settore angolare $\widehat{BAC}$ ed è perpendicolare alla base.

Sia M il punto di mezzo della base (BC). I due triangoli ABM, ACM sono uguali per avere i tre lati uguali (teor. III, 17), e quindi $\widehat{AMA} \equiv \widehat{CMA}$ (teor. II). E siccome questi due angoli sono adiacenti (def. VII, 38), essi sono retti (def. VIII, 38 e oss. I, 42).

Si ha pure $A.(BM) \equiv A.(CM)$ intendendo con $A.(BM)$, $A.(CM)$ i settori generati da A coi lati (BM) e (CM) (oss. I, 42). Si vede dunque che la retta CM è bissetrice del settore $A.(BC)$.

Oss. III. Non si sa ancora se le rette AB, AC, AM appartengano ad uno stesso fascio (Aa_{∞}) XXXVI).

Coroll. I. Due settori angolari ABC, $A'B'C'$ sono uguali se $(AB) \equiv (A'B')$, $(AC) \equiv (A'C')$, $(BC) \equiv (B'C')$.

Difatti i triangoli ABC, $A'B'C'$ sono uguali (teor. III. 17; teor. I, nota XXXIV).

Coroll. II. Se due settori angolari $\widehat{ABC}$, $\widehat{A'B'C'}$ sono uguali, le coppie di rette AB, BC; $A'B'$, $B'C'$ sono uguali.

Perchè si ha $(AB) \equiv (A'B')$, $(BC) \equiv (B'C')$ e quindi $(AC) \equiv (A'C')$ (teor. II, 15), e perciò i triangoli ABC, $A'B'C'$ sono uguali (teor. III, 17); dunque anche le coppie AB, BC; $A'B'$, $B'C'$ (coroll. teor. III, 17 e nota XII).

La dimostrazione del teor. II è poi la medesima.

Osserviamo che finora non possiamo dire come nel testo (teor. IX, 39) che settori aventi angoli uguali siano uguali, ma bensì che settori angolari uguali hanno angoli uguali (nota XXXIII e la dim. del teor. I, 5 opp. di f del n. 111 dell'introduzione). Osserviamo ancora che si possono tralasciare qui questi teoremi dandoli dopo la definizione del fascio (vedi nota XLI) limitandosi intanto alle sole coppie dei lati dei triangoli (def. I, 16).

XXXVI) Si dimostra allo stesso modo che i triangoli MAB, MAC sono uguali e che quindi la retta AM è perpendicolare alla retta BC nel punto M. (nota XXXIII).

La retta AM si chiama *bissettrice* del settore angolare o dell'angolo $A.(CB)$.

§ 4.

Altre proprietà del fascio (Rr)

43. *Teor. I. I punti che giacciono nei raggi di un fascio* (Rr) *rispettivamente ad ugual distanza da* R *dei punti della direttrice* r *da* R, *sono situati in un' altra retta* r' *parallela alla prima.*

Siano a e b due raggi del fascio determinati da due punti A, B della retta r, e che contengono i segmenti (RA) e (RB); e a' e b' i raggi opposti o prolungamenti di a e b (def. I, 7), le due coppie di raggi opposte (ab), $(a'b')$ sono uguali (teor. II, 17).

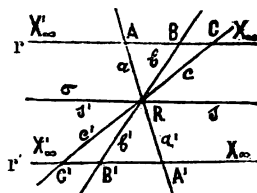



fig. 27

Se consideriamo nei due raggi a' e b' a partire da R i due segmenti (RA') e (RB') uguali rispettivamente ai segmenti (RA) e (RB), si ottengono due punti A' e B' tali che i due triangoli ARB, $A'RB'$ avendo due lati e la coppia compresa uguale sono uguali (teor. III, 16), e perciò $(AB) \equiv (A'B')$ (coroll. teor. III, 16) e le coppie $A\dot{B}R, \equiv A'\dot{B'}R$; $B\dot{A}R$, $B'\dot{A'}R$ sono pure uguali (coroll. teor. III, 16).

Se c è un altro raggio di (Rr), che interseca la retta r in un punto C, e se consideriamo nel suo prolungamento c' un punto C' in modo che sia $(RC) \equiv (RC')$, i triangoli RAB, RAC, RBC sono rispettivamente uguali ai triangoli $RA'B'$ $RA'C'$, $RB'C'$, e siccome A, B, C sono in linea retta, i tre punti A', B', C' giacciono nella retta r' (teor. V, 17).

Per dimostrare che la retta r' è parallela alla retta r (def. II, 26 e def. I e II, 32 e conv. 28), o ciò che è lo stesso alla retta σ condotta da R parallelamente alla retta r (coroll. teor. I e def. II, 26), basta osservare che al punto X_∞ del raggio parallelo s situato in r, corrisponde il punto X'_∞ del raggio s', che deve essere situato sulla retta r'. E inversamente, considerando X'_∞ come appartenente alla retta r, il punto X_∞ deve essere situato sulla retta r' (fig. 27).

Coroll. I. Se due triangoli uguali hanno due angoli opposti al vertice, i lati opposti a questi angoli sono paralleli ed uguali.

Perchè due tali triangoli si trovano nelle condizioni ad es. dei due triangoli ABR, $A'B'R$ descritti precedentemente.

Coroll. II. Ogni retta del fascio (Rr) *incontra la retta* r', *e inversamente ogni retta che congiunge un punto di* r' *con* R *è una retta del fascio* (Rr).

Perchè ogni retta del fascio (Rr) per definizione (def. III, 27) incontra la retta r, e quindi anche la retta r' in un punto ad ugual distanza da R; e così ogni retta che passa per R e incontra r' incontra per la stessa ragione la retta r, ed è perciò una retta del fascio (Rr).

Oss. I. Dal teor. precedente deriva pure che due settori angolari opposti al vertice nel fascio (Rr), pei quali i raggi dell'uno incontrano la retta r, e i raggi dell'altro la retta r', sono uguali. Ma non deriva ancora questa proprietà per due settori opposti del fascio di cui un raggio incontra r e un altro r', come ad es. per i

due settori angolari ARC, $A'RC$, perchè non è ancora noto se il fascio RAC' coincida col fascio (Rr) XXXVII).

Teor. II. Se sopra due rette parallele sono dati due segmenti (AB), $(A'B')$ uguali e diretti in verso opposto:

1.° *i segmenti (AA'), (BB') si incontrano nel loro punto di mezzo;*

2.° *i segmenti (AB'), e $(A'B)$ sono uguali e paralleli.*

A partire dal punto A la retta r della figura descritta precedentemente (fig. 27) viene divisa in due parti opposte uguali, cioè $(X'_\infty A)$, (AX_∞) rispetto al punto A (coroll. II, teor. III, 4 e conv. 28; coroll. III, teor. III, 19). Analogamente $(A'X'_\infty)$, $(A'X_\infty)$ sulla retta r' sono opposti rispetto al punto A'.

I due raggi (AX_∞), $(A'X'_\infty)$ sono paralleli e diretti in verso contrario; così (AX'_∞), $(A'X_\infty)$ (def. III, e coroll. IV, teor. I, 33).

Supponiamo che il punto B giaccia nel segmento (AX_∞), dico che il punto B' ad ugual distanza da R in (Rr) giace nel segmento $(A'X'_\infty)$. Difatti il segmento (RB) è compreso nel settore angolare $\widehat{ARX_\infty}$ del fascio (Rr) (def. I, 38), e il segmento opposto (RB') determina nel fascio coi segmenti (RA') e (RX'_∞) i settori angolari opposti a quelli determinati nel fascio stesso dal segmento (RB) coi segmenti (RA) ed (RX_∞). Ma siccome il settore $\widehat{ARX_\infty}$ contiene il raggio RB, il settore opposto $A'RX'_\infty$ contiene il raggio RB', imperocchè RB' forma con RA' e RX'_∞ angoli minori di $\widehat{A'RX'_\infty}$, ed essendo il fascio di raggi (Rr) semplicemente chiuso (teor. I, 30), non può essere che RB' sia fuori del settore $\widehat{A'RX'_\infty}$ (int. *a*, 65).

Siano ora date due rette parallele qualunque r_1 e r'_1, come è richiesto dal teorema. Esse sono in infiniti modi nelle stesse condizioni delle rette r e r' precedenti. Difatti basta scegliere una retta qualunque che le incontri in due punti A e A' e determinare il punto di mezzo R del segmento (AA'). Il fascio (Rr_1) coincide col fascio (Rr'_1), come il fascio (Rr) coincide col fascio (Rr') (teor. I), e perchè dal punto A' si può condurre una sola parallela alla retta r_1 (teor. IV, 26, conv. 28 e oss. 31). Siano quindi (AB) e $(A'B')$ i due segmenti uguali e di verso opposto sulle rette r_1 e r'_1; la retta RB per le considerazioni

---

XXXVII) Il teor. I è conseguenza immediata del postulato delle parallele dato nella nota XVI. Ma siccome la definizione del fascio sarà data alla nota XLI, così al teor. I si dà la forma seguente:

Se nel prolungamento di ogni segmento (RX) a partire da R, che unisce un punto X qualunque di una retta r con un punto R fuori di essa, si costruisce un segmento $(RX') \equiv (RX)$, i punti X' sono in una parallela r' alla retta data. Ai punti X della retta r in un dato verso corrispondono i punti X' di r' in un verso determinato.

Per l'ultima parte basta osservare che nella figura descritta nella dimostrazione del teor. I ad ogni punto C, che è interno al segmento di due punti qualunque A e B della retta r, corrisponde sul raggio opposto di RC e in r' un punto C' interno al segmento dei punti A' e B', perchè ha da questi due punti le stesse distanze che C ha da A e B (teor. I, 4, int. def. I. 61), e perciò data una serie di punti $ABC...,X....$ in un dato verso della retta r, i punti $A'B'C'....X'....$ si seguono in un verso della retta r' (int. def. II, 62) (fig. 27).

Il coroll. I è la def. della nota XVI, e con qualche lieve modificazione nella forma della dimostrazione vale il coroll. II (vedi note XVI e XXVIII).

precedenti deve incontrare la r'_1 in un punto che determina con A' in r' un segmento uguale e di verso opposto ad (AB), e quindi questo punto deve coincidere con B' (coroll. I, teor. III, 4).

I segmenti $(A'B)$, (AB') sono poi paralleli ed uguali (coroll. I, teor. I).

Coroll. I. Se sopra due rette parallele sono dati due segmenti (AB), $(A'B')$ *uguali e diretti nel medesimo verso, i segmenti* (AA'), (BB') *sono uguali e paralleli, e i segmenti* (AB') *e* $(A'B)$ *si incontrano nel loro punto di mezzo.*

Coroll. II. Se da un punto X *si conduce una parallela ad una retta* AA', *questa incontra la parallela condotta da ogni punto* A' *della retta data alla retta* AX.

Difatti scelto sulla retta parallela condotta per A' alla AX un segmento (AX') uguale ad (AX), o la retta XX' passa pel punto di mezzo di (AA'), o riesce parallela ad AA', secondochè il segmento $(A'X')$ è diretto in uno o nell' altro verso. Tirando dunque la parallela da X ad AA', siccome è unica (teor. IV, 26 conv. 28 e oss. 31), ne deriva che essa incontra in un punto la retta parallela condotta da A' ad AX (fig. 28).

Coroll. III. Ogni retta parallela alla direttrice di un fascio di rette parallele, che ne incontra una, incontra tutte le altre.

Sia r la retta direttrice del fascio (def. IX, 38), ed a una retta di esso incontrata da una retta r' parallela a r nel punto A', mentre a incontra la retta r nel punto A. Dico che la r' incontra una retta x qualunque del fascio in un punto X'.

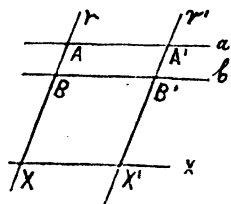



fig. 28

Difatti x incontra la retta r in un punto X per dato, quindi la parallela condotta dal punto A' di a alla retta r, ossia r', deve incontrare la retta x (coroll. II) XXXVIII).

XXXVIII) Si può anche qui far di meno del verso dei segmenti in rette diverse (nota XXIV). Il teor. II in tal caso assume la forma seguente:

Se sopra due rette parallele sono dati due segmenti (AB) e $(A'B')$ *uguali, due dei segmenti che congiungono gli estremi di* (AB) *con quelli di* $(A'B')$, *sono paralleli; gli altri due si incontrano nel loro punto di mezzo.*

Difatti scelto il punto di mezzo R' di (AB') la retta BR' o taglia la retta $A'B'$ nel punto A', ed allora il teor. è dimostrato (teor. I, e coroll. I), o la taglia in un punto A'_1 tale che $(A'_1B') \equiv (B'A')$ (teor. I e ass. della nota XVI).

Si ha pure $(R'B) \equiv (R'A'_1)$, $(R'A) \equiv (R'B')$ e $A\dot{R}'A_1' \equiv B\dot{R}'B'$ (teor. II, 17); quindi i due triangoli $AR'A'_1$, $BR'B'$ sono uguali (teor. III, 16), e perciò anche $(AA_1') \# (BB')$ (coroll. teor. III, 16 e def. della nota XVI).

Se nel caso precedente R è il punto di mezzo del segmento (BB'), la retta RA'_1 non può passare per A, perchè AA'_1 è parallela a BB' (nota XVI), dunque RA deve passare per A', ed $(AB') \# (A'B)$, essendo i triangoli ARB', $A'RB$ uguali per avere due lati e la coppia compresa uguale (teor. III e coroll. 16, e def. della nota XVI) (fig. 27).

Quale coroll. si ha:

Se (AA') *è un segmento cogli estremi in due rette* r *e* r' *parallele, ed* (AB) *è un segmento di* r; *gli estremi* B' *e* B'_1 *dei due segmenti* $(A'B')$ e $(A'B'_1)$ *uguali ad* (AB) *in* r' *congiunti con* B *danno due segmenti, l'uno parallelo ad* (AA'), *l'altro che lo incontra nel suo punto di mezzo.*

§ 5.

Il Parallelogrammo.

44. *Def. I.* Se un quadrangolo (def. I, 17) ha due coppie di lati paralleli dicesi *parallelogrammo*. Gli altri due segmenti o le altre rette determinati dai quattro vertici del parallelogrammo si chiamano *diagonali*.

Per *lati opposti* del parallelogrammo s'intendono i lati che non hanno alcun vertice comune, vale a dire i lati paralleli.

Se A, B, A', B' sono i vertici del parallelogrammo e (AB), (BA'), $(A'B')$, $(B'A')$ sono i lati, (AA'), (BB') sono le due diagonali; e se (AB) è parallelo ad $(A'B')$, (BA') parallelo a $(B'A)$, (AB) e $(A'B')$, (BA') e $(B'A)$ sono i lati opposti.

I settori angolari o angoli determinati dai lati del parallelogrammo coi vertici in quelli del parallelogrammo si dicono *settori angolari o angoli* del parallelogrammo.

Oss. I. Per la definizione delle rette parallele (def. II, 26) i vertici del parallelogrammo devono essere situati nel campo finito (def. I e coroll. teor. III, 26 e oss. 31).

Oss. II. La figura dell'ultimo teorema costituita da due segmenti uguali (AB) e $(A'B')$ sopra due rette parallele è evidentemente un parallelogrammo, le cui diagonali si incontrano nel loro punto di mezzo.

Ind. I. Se due segmenti (AB) e $(A'B')$ sono uguali e paralleli senza tener conto del verso, scriveremo:

$$(AB) \# (A'B')$$

essendo $\#$ il segno di uguaglianza e di parallelismo.

Teor. I. In ogni parallelogrammo:

1.° *Le diagonali si incontrano nel loro punto di mezzo;*

2.° *i lati opposti sono uguali.*

Difatti congiungendo B col punto R di mezzo di (AA') la retta RB deve passare per B' o per B'_1.

Vale con una dimostrazione analoga il coroll. II.

Poi si dà il teorema:

III. Date due rette parallele r e r' ed un segmento (AA') cogli estremi in r e in r', e condotte dai punti X di r, considerati in un verso, le parallele ad AA', i punti X' d'intersezione colla retta r' si seguono in un dato verso.

Sia R il punto medio di (AA'). I punti opposti in r' dei punti dati di r sono situati a cominciare da A' nel verso opposto a quello in cui si trovano i punti X' (coroll. preced. e teor. I nota XXXVII).

IV. Date due rette parallele r e r', la parallela condotta da un punto di una loro trasversale qualunque ad una di esse, è parallela anche all'altra.

Difatti conducendo da X (fig 28) la parallela alla retta a, si ha $(AX) \equiv (A'X')$, ed essendo $(AB) \equiv (A'B')$, per la stessa ragione (III) si ha $(XB) \equiv (X'B')$.

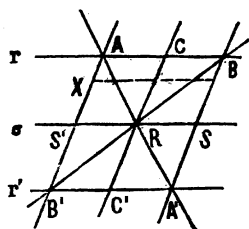
La retta AA' è parallela rispetto a BB' (XVI). Considerando le rette r e r' nei versi determinati dai segmenti (AB), $(A'B')$, o B e B' sono compresi in (AX) e $(A'X')$ (come nella fig. 28), ovvero A e A' sono compresi in (BX) e $(B'X')$, e perciò la parallela a BB' passante per X passa per X' (III).

Siano A, B, A', B' i vertici del parallelogrammo; (AB), $(A'B')$; $(A'B)$, (AB') i lati opposti. Sia R il punto di mezzo della diagonale (AA'). I raggi del fascio determinato dal punto R e dalla retta AB, che indicheremo anche con r, incontrano una retta r'. Se si congiunge R con B, la retta (RB) passa per un punto B'_1 di r' (teor. I, 43).

fig. 29

Ma siccome AB'_1 è parallela a BA' (coroll. I, teor. I, 43) e per un punto A passa una sola parallela ad una retta data (teor. IV, 26, conv. 28 e oss. 31) il punto B'_1 coincide con B', e perciò si ha $(AB) \equiv (A'B')$, $(AB') \equiv (A'B)$, ed R divide per metà le due diagonali, c. v. d (fig. 29).

Def. II. Il punto di mezzo delle diagonali si chiama *centro* del parallelogrammo.

Teor. II. I settori angolari del parallelogrammo sono uguali.

Difatti una diagonale (AA') del parallelogrammo $ABA'B'$ lo divide nei due triangoli ABA', $AB'A'$, i quali sono uguali per avere i tre lati rispettivamente uguali (teor. III, 17 e teor. II, 34), e quindi i settori angolari in B e B' che sono opposti alla diagonale e sono opposti nel parallelogrammo sono uguali (coroll. teor. I, 42) (fig. 29).

Teor. III. Se due segmenti (AA'), (BB') si incontrano nel loro punto di mezzo, i punti $ABA'B'$ sono vertici di un parallelogrammo.

Difatti se R è il punto di mezzo di (AA') e (BB') e se da A' si conduce la parallela alla retta AB, essa deve passare per B' (coroll. I, teor. I, 43; teor. IV, 26, conv. 28 e oss. 31). Così AB è parallela per la stessa ragione ad $A'B$; dunque ecc. (def. I) (fig. 29).

Teor. IV. Congiungendo i punti di mezzo dei lati opposti di un parallelogrammo si ottengono due rette parallele ai lati stessi, le quali passano pel centro del parallelogrammo.

E inversamente:

Le rette parallele ai lati condotte pel centro del parallelogrammo passano pei punti di mezzo dei lati.

Siano C e C' i punti di mezzo dei lati (AB) e $(A'B')$ del parallelogrammo $ABA'B'$. Siccome $(AC) \equiv (A'C')$ (teor. I e int. b e g, 99), ed (AA') passa per R, la retta CC' deve passare per R essendo (AC) e $(A'C')$ di verso opposto (teor. II, 43). Ma si ha anche $(AC) \equiv (B'C')$, e siccome (CC') passa per R, (AB') è parallela alla retta CC' (teor. II, 43); vale a dire $ABCC'$ sono vertici di un nuovo parallelogrammo (def. I). Conducendo dunque da R la parallela ai due lati (AB'), (BA') del parallelogrammo, essa incontra gli altri due lati nei loro punti di mezzo (teor. IV, 26 conv. 28 e oss. 31). Questa proprietà vale evidentemente anche tirando da R la parallela σ alle rette AB e $A'B'$, che incontra i lati (AB'), $(A'B)$ nei loro punti di mezzo S' e S.

Come le rette CC' e SS' appartengono al fascio determinato dal centro R col lato AB o col lato opposto $A'B'$, così appartengono al fascio determinato dal punto R coi lati AB' e $A'B$ (fig. 29).

Oss. III. Da ciò non risulta ancora che questi due fasci coincidano, ciò prova soltanto che hanno le rette AA', BB' CC', SS' comuni.

Coroll. I. Se dal punto di mezzo di un lato del triangolo si conduce la parallela ad un altro lato, essa incontra il terzo lato nel suo punto di mezzo.

Difatti il triangolo $AB'A'$ descritto precedentemente può essere considerato come un triangolo qualunque (def. II, 9), perchè le parallele condotte rispettivamente, ad es. da A e A', ai lati $B'A'$ e AB', si incontrano nel punto B (coroll. II, teor. II, 43).

Coroll. II. Dato un parallelogrammo $ABA'B'$, se da un punto X interno di un lato, per es. (AB') si conduce la parallela agli altri lati non opposti ad esso, essa incontra il lato opposto in un punto X' interno al lato $(A'B)$.

Difatti la parallela condotta da X alla retta AB incontra (BA') (coroll. II teor. II, 43), e la figura $AXX'B$ è un parallelogrammo (def. I), e quindi $(BX') \equiv (AX)$ (teor. I). Analogamente $(XB') \equiv (X'A')$; e poichè X è interno al segmento (AB'), X' è interno al segmento uguale (BA') (fig. 29) XXXIX).

§ 6.

Teorema fondamentale sul triangolo.

45. *Teor. I. Se da un punto qualunque X del lato AB di un triangolo ABC si conduce la parallela ad un altro lato BC:*

1.° essa incontra il terzo lato in un punto X';

2.° il rapporto del segmento che il punto A, o C, determina col punto X' al lato (AC) è uguale a quello del segmento determinato dal punto X col punto A, o B, al lato (AB).

E inversamente:

Se ha luogo l'ultima proprietà, i due punti X e X' determinano una retta parallela alla retta AB.

Il triangolo $AB'A'$ della fig. 29 si può considerare come un triangolo qualunque ABC (def. II, 9). Conducendo dal punto di mezzo R_1 di un lato, per es. (AB), la parallela al lato (BC) essa incontra il terzo lato (AC) nel suo punto di mezzo R'_1 (coroll. I, teor. IV, 44). Se facciamo la stessa operazione rispetto al triangolo $AR_1R'_1$, i due punti di mezzo R_2 e R'_2 di (AR_1) e (AR'_1) sono situati nella parallela passante per R_1 alla retta $R_1R'_1$, ossia al lato BC; perchè vi è un solo punto di mezzo di un segmento rettilineo (teor. I, 4, oss. III, 18; int. def. I, 61).

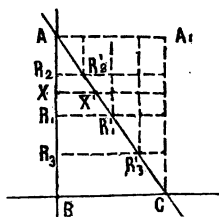



fig. 30

Per dimostrare che ciò ha luogo anche pel punto di mezzo R_3 di (R_1B) si congiunga C con R_1; si hanno così i due triangoli R_1BC, $R_1CR'_1$ coi due lati BC, $R_1R'_1$ paralleli. La parallela condotta da R_3 al lato BC nel primo triangolo incontra il lato (R_1C) nel suo punto di mezzo R''_3; la parallela condotta da R''_3 al lato $R_1R'_1$, che è anche

XXXIX) I teor. I, III. IV e coroll. vanno dimostrati allo stesso modo, riferendosi per le citazioni alle note precedenti, soltanto che il teor. II, se non si è data ancora la def. di settore angolare del triangolo e quindi anche del parallelogrammo (vedi nota XXXV) vale per le coppie rettilinee (def. I, 16) del parallelogrammo.

parallela a BC, coincide con la retta $R_3R'_3$ (coroll. I, teor. I, teor. IV, 26, conv. 28 e oss. 31) passa pel punto di mezzo R'_3 del segmento (CR'_1).

Questa dimostrazione vale evidentemente anche pei punti di mezzo dei segmenti (R_3B), (R_3R_1), (R_1R_2). Dividendo dunque (AB) per metà, e i due segmenti risultanti per metà, e i quattro risultanti ancora per metà ed eseguendo n volte questa operazione, (AB) resta diviso in 2^n parti uguali, e se dai punti di divisione conduciamo le parallele al lato (BC), esse incontrano il lato (AC) nei punti che lo dividono in 2^n parti uguali, in modo che se R^n e R'^n sono in una parallela al lato (BC), si ha:

$$\frac{(AR_n)}{(AB)} \equiv \frac{(AR'_n)}{(AC)} \text{ ed anche } \frac{(R_n B)}{(AB)} \equiv \frac{(R'_n C)}{(AC)}$$

cioè (AR_n) e $(A'R_n)$, $(R_n B)$, $(R'_n C)$ sono segmenti corrispondenti nella corrispondenza di proporzionalità determinata da (AB) e (AC) (int. def. I e III, 106).

Aumentando n indefinitamente, ogni altro punto X è punto limite del gruppo (R) di punti della divisione successiva di (AB) per metà, e ad una serie di punti R che ha per limite X nella corrispondenza di proporzionalità suddetta corrisponde una serie di punti R' avente per punto limite il punto corrispondente X' (int. *b*, 106). Ora i punti corrispondenti delle due serie (R) e (R') sono in rette parallele al lato (BC), e la serie di queste rette parallele ha per limite la retta (XX') (def. I, 12, teor. II, 30 e conv. 28). Ma se conduciamo da C la retta CA_1 parallela ad AB, le parallele condotte dai punti di (AB) a BC incontrano tutte il segmento (A_1C) (coroll. II, teor. IV, 44), e quindi la serie di rette parallele (RR') ha per limite anche la parallela XX_1 condotta da X alla retta BC.

Sia R'' il punto d'incontro della parallela condotta da R' alla retta AB colla retta XX_1; si ha $(R'R'') \equiv (RX)$ (teor. I, 44), e quindi $(R'R'')$ decresce indefinitamente con (RX). La serie di punti R'' in (XX_1) ha un punto limite Y, essendo illimitata di 1ª specie come la serie corrispondente di punti R' (int. *b'*, 98), e perciò $(R'Y)$ diventa indefinitamente piccolo tale diventando anche $(R'R'')$ (coroll. ass. IV). Dunque R' ha per punti limiti X' e Y, vale a dire X' e Y, e perciò anche le rette XX', XX_1 coincidono (teor. IV, 10) [1].

Dimostrato così il teorema per un punto qualunque X del lato (AB), si può dimostrarlo facilmente per ogni punto M della retta AB. Sia M situato dalla parte di B rispetto ad A. Vi è sempre un numero n tale che

$$(AB)\,n > (AM) \quad \text{(ass. II, } a\text{, int. } c'\text{, 81 e conv. 28).}$$

Indicando con B_n e C_n i secondi estremi di $(AB)n$, $(AC)n$, M si trova nel lato (AB_n) del triangolo AB_nC_n, e siccome (AB) e (AC) sono segmenti corrispondenti nella corrispondenza di proporzionalità determinata da (AB_n) e (AC_n) (int. *e'*, 106), la retta BC è parallela alla retta B_nC_n, e quindi la parallela condotta da M alla retta B_nC_n, che è parallela anche a BC (coroll. teor. I, e def. II, 26), incontra il lato (AC_n).

Se invece M è situato dalla parte opposta di A a partire da A nella retta AB, si costruisca un triangolo $AB'_nC'_n$ tale che $(AB'_n) \equiv (AB_n)$, $(AC'_n) \equiv (AC_n)$.

1) Pel coroll. II che si potrebbe dimostrare subito pei segmenti $(R'R'')$, si ha che (XR'') nel segmento (XX_1) è sempre crescente, e in tal caso si applicherebbe il teor. *d*, 97 dell'introduzione.

La retta $B'_n C_n$ riesce parallela alla retta $B_n C_n$ (coroll. I, teor. I, 43), e quindi anche alla BC; e perciò la parallela condotta da M a BC incontra il segmento (AC'_n).

Il teorema è dunque nella sua prima parte pienamente dimostrato.

La proprietà inversa è chiara, perchè se da X si conduce la parallela al lato BC essa incontra il lato AC in un punto X_1 che è corrispondente di X nella corrispondenza di proporzionalità determinata da (AB) e (AC) sulle rette AB, AC, e quindi X_1 deve coincidere con X' (int. *d*. 111) (fig. 30).

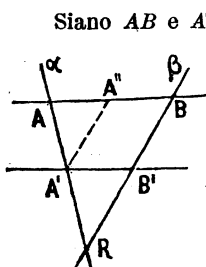
Coroll. I. Date due rette parallele e una retta α che le incontra (traversale), *una retta qualunque che incontra la retta α e una delle due parallele, interseca anche l'altra.*

Siano AB e $A'B'$ le due parallele, ossia r e r', A e A' i punti d'intersezione della trasversale con r e r'; β la retta che incontra α e r' nei punti R e B'. Nel triangolo $A'B'R'$, per la prima parte del teorema precedente, la parallela condotta da A a r', cioè r, deve incontrare la retta RB', ossia β, in un punto B (fig. 31).

fig. 31

Coroll. II. La parallela condotta da ogni punto interno di un lato del triangolo ad un'altro lato, incontra il lato rimanente in un punto interno.

Difatti nel triangolo descritto precedentemente (fig. 30) si ha:

$$\frac{(AX)}{(AB)} = \frac{(AX')}{(AC)}; \quad \frac{(XB)}{(AB)} = \frac{(X'C)}{(AC)}$$

ma $(AX) < (AB)$, $(XB) < (AB)$, dunque si ha anche $(AX') < (AC)$, $(X'C) < (AC)$ (int. *c*, 111); vale a dire X' è un punto interno al lato (AC), altrimenti se fosse fuori del segmento (AC) non sarebbero verificate le relazioni suddette (int. def. I, 61).

Coroll. III. Se due punti A', B', dividono i due lati (AR) e (RB) di un triangolo ABR nel medesimo rapporto, i segmenti (AB) e $(A'B')$ hanno il medesimo rapporto.

Da A' conducasi la parallela a (BR), che deve incontrare (AB) in un punto A''. Per la seconda parte del teorema si deve avere:

$$\frac{(A''B)}{(AB)} = \frac{(A'R)}{(AR)}$$

ma $(A''B) \equiv (A'B')$, perchè $A''\,B\,B'\,A'$ sono vertici di un parallelogrammo (def. I e teor. I, 44), quindi si ha:

$$\frac{(A'B')}{(AB)} = \frac{(A'R)}{(AR)} = \frac{(B'R)}{(BR)} \qquad \text{(int. } g\text{, 106) (fig. 31).}$$

Coroll. IV. Se A, B, C sono tre punti di una retta r e C è interno al segmento (AB), e se A', B', C' sono i tre punti d'intersezione delle tre rette RA, RB, RC con una retta r' parallela a r, il punto C' è interno al segmento $(A'B')$.

Difatti si ha pel coroll. III.

$$\frac{(A'R)}{(AR)} = \frac{(A'C')}{(AC)} = \frac{(A'B')}{(AB)} = \frac{(C'B')}{(CB)}$$

Dunque $(A'C')$ e $(A'B')$ sono proporzionali nella corrispondenza di proporzionalità determinata dai segmenti (AC) e (AB). Ora essendo $(AB) > (AC)$, per dato ne consegue che i multipli e i summultipli di (AB) sono maggiori di quelli secondo lo stesso numero di (AC) (int. d, d', 79), e perciò si ha $(A'B') > (A'C')$ (int. c, 106). Analogamente per le coppie $(A'B')$, (AB); $(C'B')$, (CB). Dunque, siccome le distanze di C' da A' e B' sono minori di $(A'B')$, C' è interno al segmento $(A'B')$ (int. def. I, 61) XL).

§ 7.

Definizione del piano e sue prime proprietà. Fasci intorno ai punti di esso.

46. *Def. I.* La figura (def. I, II 2) che si ottiene dal fascio di raggi, considerando come elemento il punto, si chiama sistema a due dimensioni o *superficie piana* o, più semplicemente, *piano.*

Def. II. La parte di piano data da un settore angolare del fascio si chiama *settore angolare o settore piano.*

Quando il settore angolare piano si considera come sostituibile da ogni altro settore ad esso identico in ogni unione con altri settori piani esso si chiama *angolo piano* [1]) del settore dato.

Oss. I. Vi è dunque una differenza sostanziale fra il settore angolare del fascio e il settore angolare del piano, perchè il primo ha per elemento il raggio, il secondo ha invece per elemento il punto. Vale a dire, facendo uso delle definizioni del n. 110, mentre il fascio di raggi va considerato come una figura ad una dimensione rispetto ad un raggio e ad una retta, il piano è invece una figura a due dimensioni rispetto al punto come elemento.

Però siccome ogni settore di un fascio di raggi dà un solo settore piano, e come vedremo fra breve, ogni settore piano dà un solo settore di un fascio, così è permesso scambiare l'uno con l'altro, salva però la loro differenza e le proprietà che da questa differenza dipendono; come in casi analoghi possiamo scambiare distanza e segmento, settore di un fascio e angolo del fascio.

Def. III. Se tutti i punti di una retta appartengono al piano (def. I, 2), si dice che la retta *giace* o è *situata* nel piano XLI).

XL) Il teorema I sia coll'ass. II sia coll'ass. II' va dimostrato ugualmente appoggiandosi ai teoremi analoghi a quelli indicati nel testo e dati nelle note precedenti. Soltanto è da osservare che poichè sia coll'ass. II sia coll'ass. II' non é ancora escluso che la retta sia chiusa, e coll'ass. II non è escluso che due punti opposti non possano determinarla (teor. II, 14), così noi riteniamo che nei lati del triangolo non vi siano punti opposti. Questa restrizione non occorre fare invece coll'ass. II', come non occorre farla anche coll'ass. II se per lato del triangolo consideriamo il segmento minore determinato dai suoi vertici, non potendovi essere un triangolo con un lato uguale alla metà della retta (teor. II, 14), Similmente per i corollari.

1) L'angolo piano è dunque la grandezza intensiva del settore piano (int. def. II e a, c, 111).

XLI) Se non si é ancora data la definizione del fascio di rette si può dare qui, come quella figura determinata da tutte le rette che uniscono i punti di una retta r con un punto R fuori di essa, compresa la retta parallela condotta da R alla retta r. Qui trovano poi posto le definizioni di settori angolari ed angoli del fascio dati al n. 38, come anche la def. del fascio di rette parallele. Si dà poi la def. del piano.

Teor. I. Se dai punti del piano si conducono le parallele a tutte le rette di un fascio che lo genera:

1.° esse sono incontrate da tutte le rette del fascio;

2.° hanno tutti i loro punti in rette del fascio;

3.° si incontrano fra loro XLII).

a) Il piano dato dal fascio di raggi (Rr) (def. I) contiene un'altra retta r' parallela alla retta r (teor. I, 43). Date due rette α e β qualunque del fascio (Rr), se da un punto della prima conduciamo la parallela x alla retta r, essa incontra la retta β (teor. I, 45) e perciò qualunque retta del fascio, perchè anche se β è parallela alla retta r la retta x incontra β all'infinito. E inversamente, ogni punto della retta x congiunto con R dà una retta che incontra la retta r (coroll. I, teor. V, 45); dunque la retta x giace tutta nel piano (def. III). Ma la retta α è una retta qualunque del fascio, e d'altra parte i punti del piano sono dati dalle rette del fascio (def. I); dunque tutte le parallele alla retta r, e quindi alla parallela σ condotta da R alla retta r (coroll. teor. I e def. II, 26), condotte dai punti del piano, incontrano le rette del fascio (Rr) e giacciono nel piano (def. III) (fig. 29).

b) Ma ogni retta x parallela alla retta r, che passa per un punto della retta RA, incontra la retta AB', perchè x è parallela alla retta σ, ossia RS', (teor. I, 45). E inversamente, ogni punto X della retta AB' è situato nel piano, perchè conducendo da esso la parallela alla retta r, essa deve incontrare la retta RA del fascio, e quindi giace nel piano (*a*), dunque la retta AB' giace nel piano (def. III) (fig. 29).

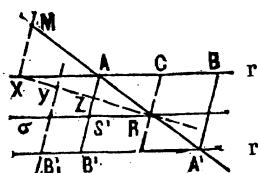



fig. 32

Oppure anche: La retta RX, incontrando la retta x parallela ad r, che incontra RA, incontra pure la retta r (coroll. I, teor. 45). Dunque ogni punto della retta AB' giace in una retta del fascio (Rr) (fig. 29).

Reciprocamente, ogni retta del fascio (Rr) incontra la retta AB'. Sia X il punto d'incontro della retta data del fascio colla retta r; la parallela condotta da X alla AB', ossia alla parallela RC condotta da R ad AB' (coroll. I, teor. I e def. II, 26) deve incontrare la retta RA in un punto M (teor. I, 45), e considerando il triangolo XRM o il triangolo XCR, si vede che la retta (AB') deve incontrare la retta RX (teor. I, 45) (fig. 32).

Ora, il punto A si può riguardare come un punto qualunque della retta RA, perchè se da un punto A'_1 qualunque della retta RA conduciamo la parallela r_1 ad r, ogni retta del fascio (Rr) è una retta del fascio (Rr_1) e viceversa (*a*); e quindi si può costruire un parallelogrammo analogo a quello $ABA'B'$, che abbia per centro il punto R e per vertice A_1, di cui un lato è la retta r_1 e l'altro lato è parallelo a RC. La parallela dunque condotta da un

---

XLII) Non facendo uso del punto all'infinito della retta, neppure come modo di dire, bisogna escludere in 1° e 3° il caso in cui le rette sono parallele. La dimostrazione salvo la distinzione delle rette parallele è la medesima tenendo conto del teorema IV della nota XXXVIII.

punto A qualunque della retta RA alla retta RC del fascio soddisfa alle proprietà 1 e 2 del teorema.

Dato un punto Y qualunque del piano, la retta RY è una retta del fascio generatore (def. I), che incontra la direttrice r in un punto X. Considerando il raggio RX come raggio RA, ne consegue che la parallela condotta da Y a RC giace tutta nel piano e viene incontrata da tutte le rette del fascio (Rr).

Ma RC si può considerare come una retta qualunque del fascio, e quindi le parallele condotte da un punto Y qualunque del piano alle rette del fascio (Rr) incontrano queste rette, e sono situate nel piano. Se RC fosse la parallela σ condotta da R alla retta r, sappiamo già che la parallela condotta da Y a σ ha la stessa proprietà (*a*).

Ciò che vale pel fascio (Rr) vale evidentemente per ogni fascio che genera il piano e che quindi si trova nelle stesse condizioni del fascio (Rr) (def. I).

Le proprietà 1 e 2 sono dunque dimostrate (fig. 32).

c) Rimane da dimostrare che le parallele condotte alle rette del fascio (Rr) si incontrano in un punto. Eccettuiamo il caso in cui sono parallele, perchè allora si sa già che si incontrano in un punto all'infinito rispetto all'unità del campo finito (def. II, 26, conv. 28 e coroll. I, teor. III, 19).

Sia data dunque una retta del fascio e da un punto A si conduca ad essa la parallela AB, che come si sa giace nel piano e incontra tutte le rette del fascio (*b*). Da un punto Y si conduca la parallela ad una altra retta RC del fascio. Siccome RC e RY incontrano la retta AB rispettivamente nei punti C e X (*b*), la parallela condotta da Y a RC incontra la retta AB (teor. I, 45) (fig. 32).

Il teorema è dunque pienamente dimostrato.

Coroll. I. Un punto all'infinito e uno del campo finito determinano una retta tutta situata nel piano.

Difatti il punto all'infinito è dato da una retta del fascio (Rr) (def. I) e pel punto del campo finito passa una parallela a questa che giace nel piano (*b*).

Coroll. II. Dato un fascio (Rr) del piano, ogni altra retta di esso determina con R lo stesso piano.

Se r' è l'altra retta, essa è parallela ad una retta del fascio (Rr), e quindi incontra tutte le rette del fascio (Rr) ed è incontrata dalle rette di questo fascio XLIII).

XLIII) Il coroll. I va espresso così:

La parallela condotta da un punto del piano ad una sua retta giace tutta nel piano.

a) La parallela condotta da R a una retta AB' situata nel piano giace pure nel piano.

Difatti considerando la retta RA e una retta RS' che incontra AB' nel punto S', tirando da A la parallela AB a RS' essa giace nel piano (def. III e teor. I), e quindi viene incontrata da tutte le rette del fascio (Rr) generatore del piano e i suoi punti giacciono in rette del fascio (*b*). Ma conducendo da R la parallela ad AS', essa incontra la retta AB in un punto C (nota XXXVII), dunque RC che è parallela ad AB', è una retta del fascio (Rr).

b) Se s è la retta ed X il punto dati, sia RC la parallela condotta da R ad s, che giace nel piano (*a*). La parallela condotta da X ad s è parallela anche a quella con-

Teor. II. La parallela condotta da un punto R ad una retta r è retta limite del fascio (Rr).

a) Sia Z un punto interno del segmento (AS') parallelo a (RC), essendo AC e RS' parallele fra loro. Sia X il punto d'intersezione della retta RZ colla retta AC, dico che A è interno al segmento (CX). Difatti dai triangoli XRC, XZA, si ha:

$$\frac{(AZ)}{(CR)} = \frac{(XZ)}{(XR)} \qquad \text{(coroll. III, teor. I, 45)}$$

e poichè $(CR) \equiv (AS')$ (teor. I, 44) e $(AZ) < (AS')$ (int. def. I, 61), è $(AZ) < (CR)$ (int. def. II, 61). Dunque $(XZ) < (XR)$ (int. *c*, 111).

Considerando i triangoli RXX_1, RZS', essendo (XX_1) parallelo a (RC) e col punto X_1 sulla retta RS', si ha $(XX_1) \equiv (RC)$ (teor. I, 44), e quindi:

$$\frac{(ZR)}{(XR)} = \frac{(S'Z)}{(X_1X)} \qquad \text{(coroll. III, teor. I, 45).}$$

Ma $(S'Z) < (S'A) \equiv (X_1X)$, e perciò $(ZR) < (XR)$; dunque Z è interno al segmento (XR) (int. def. I, 61), perciò anche A è interno al segmento (XC) (coroll. II, teor. I, 45).

Inversamente, se A è interno al segmento (XC) con lo stesso procedimento si dimostra che il punto d'intersezione Z di (RX) con AS' (teor. I) è interno al segmento (AS') (fig. 32).

b) Scegliendo un punto Z' nel segmento (ZS') la retta RZ' incontra (XX_1) in un punto interno X'' (coroll. IV, teor. I, 45), e indicando con X' il punto d'incontro di RZ' con la retta AC (teor. I), poichè X'' è interno al segmento (XX_1), il punto X è interno al segmento (CX') (*a*).

E inversamente, se X è compreso nel segmento (CX'), il punto X'' è interno al segmento (XX_1), (*a*) e quindi anche Z' nel segmento $(Z'S')$ (coroll. IV, teor. I, 45).

Dunque quando $(S'Z)$ decresce indefinitamente (conv. 28 e int. def. I, 95) il segmento (CX) cresce indefinitamente nel verso di (CA), perchè qualunque sia Z in (AS'), la retta RZ incontra la retta r in un punto X (teor. I), e reciprocamente.

Il teorema è dunque dimostrato [1]) XLIV).

---

dotta per R ad s (teor. IV, nota XXXVIII), ossia ad una retta del fascio (Rr), dunque essa giace tutta nel piano (teor. I).

Il coroll. II va dato colla stessa dimostrazione, salva la distinzione delle due rette parallele indicata alla nota precedente.

1) Colle nostre definizioni di raggi e di rette parallele (def. I, II 26), che si appoggiano sull'esistenza astratta dei punti all'infinito secondo i principî svolti nell'introduzione, troviamo una conferma sperimentale dell'esistenza delle rette e dei raggi paralleli; in quanto che colle considerazioni empiriche svolte al n. 27 abbiamo bensì veduto che il raggio parallelo è raggio limite del fascio, ma non ne abbiamo profittato che per dare l'ip. V e il primo assioma pratico.

XLIV) Il teorema II si dimostra nello stesso modo.

Oss. I. Si osservi che ad ogni punto della retta r corrisponde nel fascio (Rr) una retta che passa per il punto dato eccettuata la parallela, e che ogni retta del fascio incontra la retta r.

Per evitare le eccezioni sia nei teoremi come nelle dimostrazioni anche in un trattato elementare si può dire;

Teor. III. Ogni punto del piano è centro di un fascio di rette che sono situate nel piano e contengono tutti i punti del piano.

Difatti le parallele condotte da un punto X qualunque alle rette del fascio (Rr) generatore del piano (def. I) incontrano tutte la retta r (teor. I). Scelto un punto A di r, la retta AX è parallela ad una retta RB del fascio (Rr), perchè la retta RX, essendo una retta del fascio, incontra la retta r, e quindi la parallela condotta da R alla AX incontra la retta r in un punto B (teor. I, 45), dunque tutte le rette del fascio (Xr) appartengono al piano (Rr) (teor. I).

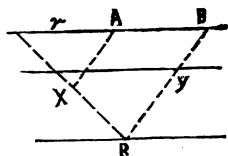



fig. 33

Inversamente, ogni retta del fascio (Rr) incontrando la retta r è parallela ad una retta del fascio (Xr), e quindi è incontrata da tutte le rette del fascio (Xr), e ogni suo punto è situato in una retta di questo fascio (teor. I). Dunque ogni retta del fascio (Rr) e quindi ogni punto del piano (Rr), è situato nel piano (Xr).

Se il punto X è all'infinito, tutte le rette del fascio di centro X sono parallele alla retta RX, le quali sono incontrate dalla retta r e da tutte le

---

La prop.: due rette *hanno un punto comune all'infinito* significa: le due rette sono parallele.

Questo punto all'infinito introdotto così è un punto improprio, e non come i nostri punti all'infinito, che godono le stesse proprietà degli altri punti (def. I e II, 26). Si ha poi (vedi nota V):

Teor. III. La retta è una linea aperta.

Difatti se fosse chiusa, ad ogni punto Z della retta r corrisponderebbe una retta del fascio (Rr) passante per Z, e ad una retta limite RX del fascio corrisponderebbe un punto limite X della retta, potendo in tal caso considerare la retta come un segmento AB cogli estremi coincidenti (int. a, 63 e teor. VIII, 13). Ma la retta parallela nel fascio (Rr) alla retta r non incontra la retta r (nota XVI), mentre essa è retta limite del fascio (teor. II). dunque la retta non è chiusa.

È da osservàre in relazione alla nota X che la dimostrazione del teor. VIII, 13 limitato alla retta è indipendente dagli altri teor. del n. 13.

Coroll. La retta viene divisa da un suo punto in due parti uguali. (come il teor. a'', 70 dell'introduzione).

Def. Se in un fascio di rette (Rr) si coinsiderano i raggi dati dalle parti in cui R divide ciascuna retta del fascio, la figura risultante si chiama *fascio di raggi.*

Teor. IV. Il fascio di raggi è un sistema ad una dimensione semplicemente chiuso rispetto al raggio quale elemento.

Difatti vi sono in (Rr) dei raggi che incontrano la retta r, e i raggi opposti che incontrano la retta r' (vedi nota XXXVII), fra i quali vi sono i raggi della retta parallela, che appartengono al fascio (nota XLI).

Oss. II. Dalla dimostrazione del teor. II risulta che i raggi del fascio che incontrano la retta r a partire da un punto di essa in un dato verso hanno per raggio limite un raggio della retta parallela, mentre i raggi nel verso opposto, che incontrano la retta r hanno per raggio limite il raggio opposto (def. I, 12).

Distinguendo i raggi di una retta, possiamo dire che nel primo caso il raggio della retta r e il raggio parallelo nel fascio (Rr) hanno un punto all'infinito e i raggi opposti un punto all'infinito opposto (oss. I).

Oss. III. Pel teor. III valendo il teor. I, 14 coll'ass. II, non occorre più tener conto d'ora innanzi in queste note della differenza tra l'ass. II e l'ass. II'. (Vedi nota IV).

rette del fascio (Rr), come ogni punto di esse è situato in una retta di questo fascio.

Coroll. I. Ciascuna retta del piano taglia tutte le rette di ogni fascio di esso.

Ciò risulta dalla dimostrazione stessa del teorema, perchè essa è parallela ad una retta del fascio (coroll. I, teor. I), e quindi incontra tutte le rette del fascio (teor. I).

Coroll. II. Due rette del piano si incontrano in un punto.

Se sono parallele si incontrano all'infinito (def. II, 26). Se non lo sono, presa sopra una di esse un punto X, essa appartiene al fascio del piano di centro X, e l'altra retta data è parallela ad una retta di questo fascio (coroll. I, teor. I), e perciò incontra tutte le rette del fascio e quindi anche la prima retta data (teor. I).

Teor. IV. Una retta avente due punti nel campo finito del piano giace tutta nel piano.

Se A e B sono i due punti, conduciamo per A la retta RA e per B la retta parallela, per es. alla retta RS del fascio (Rr) generatore del piano (def. I), la quale incontra RA in M (teor. I).

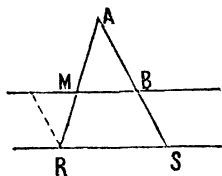



fig. 34

Ogni retta che congiunge A coi punti della retta BM è una retta del fascio di centro A situata nel piano (teor. III e coroll. II, teor. I), perciò la retta AB giace nel piano.

Oppure anche: Tirando da R la parallela ad AB, essa incontra la MB (teor. I, 45) ed è una retta del fascio di centro R colla direttrice BM (coroll. II, teor. I) e quindi anche pel teor. I la retta AB giace tutta nel piano [1]).

Teor. V. Il piano è determinato da ogni sua retta e da un punto qualunque fuori di essa.

Siano x e X il punto e la retta dati; (Rr) il fascio primitivo che genera il piano (def. I). Si sa che i punti dei due fasci (Xx), (Rr) coincidono (teor. III) e quindi anche i due piani (Xx), (Rr).

Coroll. I. Per una retta e per ogni punto fuori di essa passa un solo piano.

Se r e R sono la retta e il punto dati, e se per essi passano due piani, questi devono essere determinati dal fascio (Rr), vale a dire devono coincidere (teor. III e coroll. II, teor I).

Se il punto R è all'infinito vale la stessa proprietà.

Coroll. II. Tre punti A, B, C non situati in linea retta determinano un solo piano, che viene determinato da ogni altro gruppo di tre dei suoi punti del campo finito, non situati in linea retta.

Difatti per la retta r che congiunge due dei suoi punti dati e pel terzo punto passa un solo piano (coroll. I) che contiene le rette congiungenti l'ultimo punto coi primi due.

---

1) Questa è la proprietà che viene assunta comunemente nei trattati elementari come assioma fondamentale del piano.

Scelti tre dei suoi punti qualunque DEF non situati in linea retta, la retta congiungente due qualunque di essi giace nel piano (teor. IV), e perciò il piano viene determinato da questa retta e dal terzo punto.

Coroll. III. Due rette che hanno un punto comune A determinano un solo piano.

Oppure:

Due fasci di raggi con due raggi comuni coincidono.

Difatti per determinare le due rette oltre al loro punto comune A occorrono altri due punti che col primo determinano un solo piano, il quale contiene le due rette date.

Coroll. IV. Due parallele determinano un solo piano.

Siano r e r' le due parallele, e scelta una trasversale (AB) comune, sia R il punto di mezzo di (AB). Il piano determinato da R con una delle due rette contiene tutte le parallele che dai punti di AB si possono condurre alle due rette. Ogni punto di AB o di ogni trasversale $A'B'$ comune di r e r', che giace nel piano (Rr) (teor. IV), genera con r e r' lo stesso piano (teor. III). Il teorma è dunque dimostrato XLV) [1]).

§ 8.

L'identità del piano (Rr) intorno ai suoi punti del campo finito e a quelli all'infinito. — Proprietà delle perpendicolari nel piano.

47. *Def. I.* Chiameremo *segmento limite assoluto* all'infinito di un settore angolare (ab) di un fascio (Rr) il segmento determinato dai punti A_∞, B_∞ limiti assoluti dei raggi a e b rispetto al punto R (def. II, 32).

Teor. I. A settori angolari uguali di un fascio (Rr), o di fasci diversi (Rr), $(R'r')$, corrispondono segmenti limiti assoluti all'infinito uguali, e inversamente.

Difatti siano $\widehat{A_\infty R B_\infty}$, $\widehat{A'_\infty R' B'_\infty}$ i due settori angolari uguali, essendo A_∞, B_∞; A'_∞, B'_∞ punti limiti assoluti rispettivamente di R e R'.

Scelti due punti A, B sui raggi RA_∞, RB_∞, e i punti A' e B' sui raggi $R'A'_\infty$, $R'B'_\infty$ rispettivamente ad ugnali distanze da R' di quelle dei punti A e

XLV) I teor. III, IV, e V e i loro corollari possono essere dimostrati nello stesso modo facendo uso della def. della nota XLIV; altrimenti bisogna modificare la forma, quando si tratta di rette parallele.

1) Limitando il teor. I, 45 a tutti i punti R ottenuti dai lati (AB), (AC), (BC) del triangolo ABC colla succesiva divisione per metà, e a quelli che si ottengono dai multipli di (AB) e (AC) sui lati AB e AC del triangolo, conducendo dai punti R così ottenuti le parallele ai lati del triangolo e dei nuovi triangoli formati dalle nuove rette, si ha una figura, che chiamo *reticolo piano*, nel quale anzichè delle rette abbiamo dei gruppi di punti rettilinei determinati da due punti, e tali che i segmenti dei punti di ciascuno di essi sono commensurabili fra loro, e dato un segmento (AB) del reticolo, appartengono ad esso i punti che lo dividono in un numero n qualunque di parti uguali. Questo reticolo gode le stesse proprietà che abbiamo fin qui trovate per il piano, vale a dire due punti del reticolo piano determinano un gruppo rettilineo situato nel piano, e due gruppi rettilinei se non sono paralleli si incontrano sempre in un punto del reticolo. In un tale reticolo si possono eseguire le costruzioni delle forme proiettive di 1. specie che dipendono dalle proprietà precedenti, ma non sempre valgono le proprietà metriche, ad es. nel reticolo può non esistere un gruppo rettilineo normale passante per un punto del reticolo ad un gruppo rettilineo di esso. Proiettando il reticolo sopra un piano qualunque si ottiene un altro reticolo, senza però che sia soddisfatta in generale la condizione che due segmenti di un gruppo rettilineo del nuovo reticolo siano commensurabili.

B da R, si ha $(AB) \equiv (A'B')$ (teor. II, 15) e perciò i due triangoli ABR, $A'B'R'$ sono uguali (teor. III, 17).

Ma essendo A_∞ e A'_∞, B_∞ e B'_∞ punti corrispondenti nella corrispondenza d'identità dei due triangoli suddetti si ha $(A_\infty B_\infty) \equiv (A'_\infty B'_\infty)$ (teor. I, 34).

Inversamente, se si ha $(A_\infty B_\infty) \equiv (A'_\infty B'_\infty)$ i due triangoli $A_\infty RB_\infty$, $A'_\infty R'B_\infty$ sono uguali (teor. III, 17) e quindi anche i due triangoli ARB, $A'R'B'$ (teor. III, 16), vale a dire i due settori angolari $A_\infty RB_\infty$, $A'_\infty R'B'_\infty$ di essi sono uguali (teor. III, 15).

Se i settori angolari dei fasci sono piatti (def. V, 38), i loro segmenti limiti assoluti all'infinito sono uguali alla metà della retta, perchè i punti all'infinito dei loro raggi opposti sono punti opposti (def. III, 6 e def. II, 32).

Se invece sono dati due segmenti $A_\infty X_\infty A_{1\infty}$, $A'_\infty X'_\infty A'_{1\infty}$ uguali alla metà della retta nei campi limiti assoluti di R e R', scegliamo due punti B_∞ e B'_∞, sulle altre metà delle rette determinate dai due segmenti suddetti e ad ugual distanza da $A_{1\infty}$ e $A'_{1\infty}$. I settori angolari dei fasci (Rr) e $(R'r')$ determinati dai segmenti $A_\infty X_\infty A_{1\infty} B_\infty$ $A'_\infty X'_\infty A'_{1\infty} B'_\infty$ sono uguali, e poichè lo sono anche le loro parti $A_{1\infty} RB_\infty$, $A'_{1\infty} R'B'_\infty$, i settori angolari rimanenti, cioè i due settori angolari piatti dati, sono pure uguali (teor. III, 15).

Coroll. I. Due settori angolari opposti al vertice in un fascio di raggi (Rr) *sono uguali.*

Perchè le due coppie rettilinee opposte da essi determinate sono uguali (def. I, 16 e teor. II, 17), e conseguentemente anche i loro segmenti limiti assoluti all'infinito (teor. I, 34).

Coroll. II. Due settori angolari piatti qualunque di uno stesso fascio (Rr), *o di due fasci* (Rr), $(R'r')$, *sono uguali.*

Perchè i loro segmenti limiti assoluti all'infinito sono uguali alla metà della retta.

Coroll. III. Un settore angolare (ab) *di un fascio* (Rr) *percorso da* a *verso* b *è identico allo stesso settore percorso nel verso opposto.*

Perchè tale è la proprietà del segmento limite assoluto all'infinito del settore (int. g, 99 o c, 104).

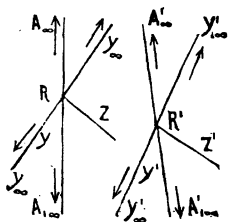
Teor. II. Due fasci qualunque (Rr), $(R'r')$ *sono identici.*

I due fasci hanno per segmento limite assoluto l'intera retta, riguardata come segmento cogli estremi coincidenti in un punto qualunque di essa.

Inversamente, date due rette $A_\infty X_\infty A_{1\infty} X_{1\infty}$; $A'_\infty X'_\infty A'_{1\infty} X'_{1\infty}$ limiti assolute dei punti R e R' (teor. III, 32), i due fasci (Rr) e $(R'r')$, che esse determinano mediante le coppie di rette $RA_\infty A_{1\infty}$, $RX_\infty X_{1\infty}$; $R'A'_\infty A'_{1\infty}$, $R'X'_\infty X'_{1\infty}$, sono divisi dalle rette $RA_\infty A_{1\infty}$, $R'A'_\infty A'_{1\infty}$ in due settori angolari piatti uguali (coroll. II, teor. I), anche se i settori angolari $X_\infty RA_\infty$, $X'_\infty R'A'_\infty$ non sono uguali.

fig. 35

Stabilendo in dati versi dei due fasci, per es. in quelli determinati dai punti $A_\infty X_\infty A_{1\infty} X_{1\infty}$ e dai punti $A'_\infty X'_\infty A'_{1\infty} X'_{1\infty}$, la corrispondenza d'identità dei settori angolari piatti suddetti, a due punti Y e Z in uno di questi settori corrispondono due punti Y' e Z' dell'al-

tro settore a distanze da R' uguali a quelle dei punti Y e Z da R, e tali che $\widehat{YRZ} \equiv \widehat{Y'R'Z'}$, e quindi $(YZ) \equiv (Y'Z')$.

Se invece Y e Z sono situati nei due settori piatti suddetti del fascio (Rr') i punti corrispondenti Y' e Z' sono situati nei settori corrispondenti del fascio $(R'r')$.

Il raggio opposto $RY_{1\infty}$ a RY è situato nel settore piatto opposto (vedi la dim. del teor. II, 43), nel quale è situato il raggio RZ. A questo raggio corrisponde il raggio opposto $R'Y'_{1\infty}$ di $R'Y'$ nella corrispondenza suddetta d'identità, e perciò si ha $\widehat{Y_{1\infty}RZ} \equiv \widehat{Y'_{1\infty}R'Z'}$, e quindi essendo $\widehat{Y_{1\infty}RY_\infty} \equiv \widehat{Y'_{1\infty}R'Y'_\infty}$, si ha $\widehat{ZRY} \equiv \widehat{Z'R'Y'}$, da cui $(ZY) \equiv (Z'Y')$ (teor. II, 42). Dunque si può stabilire fra i due fasci (Rr), $(R'r')$ una corrispondenza tale che ai segmenti dell'uno siano ordinatamente uguali i segmenti dell'altro; e perciò i due fasci sono identici (fig. 35).

Coroll. I. Tutti i piani (Rr) sono identici.

Perchè tali sono due fasci che li determinano (def. I, 46), e la corrispondenza d'identità dei due fasci dà la corrispondenza d'identità dei due piani, i quali perciò sono identici (teor. III, 15).

Coroll. II. Il piano è identico intorno ad ogni suo punto del campo finito.

Vale un'analoga dimostrazione (teor. III, 46).

Teor. III. Il fascio (Rr) è identico nella posizione delle sue parti e continuo.

Che sia identico nella posizione delle sue parti, risulta dal fatto che a partire da un suo raggio in un verso è identico al fascio percorso nel verso opposto (teor. I).

Che sia continuo deriva dalla definizione stessa del fascio, perchè dato un settore angolare (ab) del fascio, vi è in esso un settore più piccolo (def. I, 38) e se un settore angolare (xx') è tale che x e x' percorrono il fascio in versi opposti e (xx') diventa indefinitamente piccolo, scegliendo una retta r del piano del fascio che incontra i lati x e x' del settore, il segmento (XX') sulla retta r diventa pure indefinitamente piccolo (def. I, 30), e al punto Y che esso determina in r (int. a, 96 o a, 101) corrisponde un raggio RY del fascio compreso in ogni stato del settore (xx').

Il fascio soddisfa adunque rispetto ai suoi angoli alle proprietà del sistema ad una dimensione identico nella posizione delle sue parti e continuo, sia in senso relativo come in senso assoluto.

Coroll. Il piano è identico nella posizione delle sue parti intorno ad ogni suo punto del campo finito.

Difatti i settori angolari uguali di un fascio (Rr) del piano col centro nel campo finito determinano settori angolari piani uguali (def. II, 46, e teor. III, 15).

Teor. IV. I segmenti limiti assoluti all'infinito dei settori angolari retti di un fascio qualunque (Rr) sono segmenti retti.

Dati tre punti $A_\infty B_\infty A_{1\infty}$ di una retta nel campo limite assoluto di un punto R, e tali che $(A_\infty B_\infty) \equiv (B_\infty A_{1\infty})$, essendo A_∞, $A_{1\infty}$ punti opposti, nel fascio (Rr), i settori angolari $\widehat{A_\infty RB_\infty}$, $\widehat{B_\infty RA_{1\infty}}$ sono ciascuno uguali ad una quarta parte del fascio. E poichè due fasci qualunque (Rr), $(R'r')$ sono identici (teor. II), sono uguali anche le loro quarte parti (teor. III, int. b, 99, o a, 103 e d', 79), e quindi i loro segmenti limiti assoluti all'infinito essendo uguali (teor. I) sono segmenti retti.

Coroll. In un fascio (Rr) vi è una sola perpendicolare ad una retta del fascio.

Perchè la retta data determina due settori piatti nel fascio, che sono divisi per metà dalla perpendicolare alla retta data (def. V, 41).

Teor. V. Dato un punto A fuori di una retta a, esiste una sola perpendicolare che la incontra e che contiene il punto A.

Si consideri il fascio (Aa) e da A si conduca la parallela s alla retta a. Da A nel fascio (Aa), si può condurre una sola perpendicolare alla retta s (coroll. teor. IV), la quale è anche perpendicolare alla retta a (teor. VI, 41).

Coroll. I. Per un punto A del piano passa una sola perpendicolare ad una retta a qualunque del piano (teor. V; coroll. II, teor. III, 46),

Coroll. II. Due rette perpendicolari ad una terza nel piano (Rr) sono parallele fra loro.

Difatti siano a e b le rette perpendicolari alla retta c, A e B i loro punti d'incontro con c. Se b non fosse parallela ad a, la parallela ad a passante per B sarebbe un'altra perpendicolare alla retta c (teor. VI, 41), ciò che è assurdo (coroll. I).

Teor. VI. Due raggi perpendicolari a due altri raggi nel piano formano angoli uguali o supplementari.

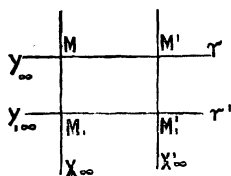
Possiamo supporre che i raggi dati x e y e i raggi perpendicolari z e w appartengano al medesimo fascio, perchè se così non fosse potremmo sempre considerare nel piano due raggi paralleli ai raggi perpendicolari passanti pel punto d'intersezione dei raggi x e y (coroll. II, teor. III, 46), che formerebbero tra loro il medesimo angolo dei raggi perpendicolari (teor. I, 40).

Se gli angoli (xz) e (yw) sono dello stesso verso, ed (xy) è un angolo acuto, si ha: $$(xy)+(yz)\equiv(yz)+(xy)$$ (teor. III, int. b, 99 o a, 104)
ed essendo gli angoli retti uguali fra loro (teor. IV e teor. I) si ha:
$$(yz)+(xy)\equiv(yz)+(zw)$$
da cui $$(xy)\equiv(zw)$$ (teor. III, int. g''', 73).

Similmente se (xy) è un angolo ottuso.

Se invece gli angoli (xy) e (zw) sono di verso opposto, indicando con w' il raggio opposto di w, gli angoli (xy) e (zw') sono dello stesso verso, e si ricade nel caso precedente. Ma (zw) è supplementare di (zw'), dunque il teorema è dimostrato.

48. *Teor. I. Ogni parallelogrammo che ha un angolo retto ha tutti e quattro gli angoli retti.*

Sia $MM_1M'M'_1$ il parallelogrammo con un angolo retto in M e quindi anche in M_1 (def. I, 44 e teor. VI, 41).

Siccome gli angoli opposti del parallelogrammo sono uguali (teor. II, 44), l'angolo in M' è pure retto. Ma (MM_1) (M'_1M') sono paralleli, dunque $M_1M'_1$ è pure perpendicolare alla retta M'_1M' (def. I, 44, teor. VI, 41) (fig. 36).

Def. I. Un parallelogrammo (def. I, 44) che ha un angolo retto chiamasi *rettangolo.*

fig. 36

Teor. II. Se due rette perpendicolari a due rette date nel piano sono parallele, le due rette sono parallele.

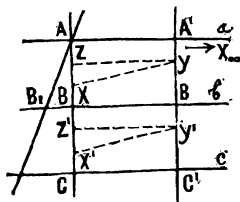
Siano MM_1, $M'M'_1$ le due rette perpendicolari alle rette date MM' e $M_1M'_1$.

Se la retta $M_1M'_1$ non fosse parallela ad MM', la parallela condotta da M_1 a MM' sarebbe un' altra perpendicolare alla retta M_1M passante per M_1 (teor. VI, 41), il che è assurdo (coroll. I, teor. V, 47) (fig. 36).

Teor. II. Un fascio di rette parallele è identico nella posizione delle sue parti e continuo.

Difatti sia X_∞ il centro del fascio, e si tiri nel piano di esso una perpendicolare AC ad una retta del fascio, la quale riesce perpendicolore a tutte le altre rette del fascio (teor. VI, 41). Scegliamo sopra questa perpendicolare due segmenti (AB e (BC) uguali, e pei loro estremi passino i raggi a, b, c del fascio.

fig. 37

Dico che le striscie (ab), (bc) (def. X, 38) sono uguali.

Difatti stabilendo una corrispondenza d' identità fra le rette a e b, b e c in modo che ad ogni punto A' di a corrisponda il punto B' di b e C' di c situati ad uguale distanza dai punti A, B e C e nei raggi delle rette a, b, c secondo la direzione del punto X_∞, le figure $AA'BB'$, $BB'CC'$ sono rettangoli (teor. I), e quindi $(AB) \equiv (A'B')$, $(BC) \equiv (B'C')$ (teor. I, 44). Ma pel punto B' passa una sola perpendicolare alla retta b e quindi anche alle altre rette del fascio (coroll. I, teor. V, 47 e teor. VI, 41), dunque essendo $B'A'$, $B'C'$ perpendicolari a b, i punti A', B', C' sono situati in una perpendicolare alle rette del fascio. E poichè A', B', C' sono punti corrispondenti qualunque nella corrispondenza suddetta, punti qualunque corrispondenti di a, b, c sono in una perpendicolare alle rette del fascio.

Scelti ora due punti X e Y di (ab), si conducano le perpendicolari alle rette del fascio per X e per Y, che supponiamo siano le rette AB, $A'B'$ stesse. Siano X' e Y' i punti che distano da B e B' quanto X e Y dai punti corrispondenti A e A'. Da Y e Y' conduciamo le rette parallele alla direzione del fascio, le quali incontreranno (AB) e ($A'B'$) nei punti interni Z e Z' (coroll. II, teor. IV, 44), pei quali si ha:

$$(AZ) \equiv (A'Y) \equiv (BZ') \equiv (B'Y') \qquad \text{(teor. I, 44).}$$

I triangoli XYZ, $X'Y'Z'$ sono rettangoli in Z e Z' (def. II, 42), ed hanno i cateti uguali, dunque si ha pure

$$(XY) \equiv (X'Y') \text{ (teor. II, 42; teor. IV e teor. I, 47).}$$

Si stabilisce così una corrispondenza d'identità fra le due striscie (ab), (bc), e quindi sono identiche (teor. III, 15).

Le striscie del fascio in questa corrispondenza si comportano come i segmenti che esse determinano sopra una retta perpendicolare qualunque alle rette del fascio. Il teorema è dunque dimostrato (fig. 37).

Teor. III. L' uguaglianza delle striscie di un fascio di rette parallele è data dall' uguaglianza dei segmenti determinati dalle striscie sopra una retta r qualunque del piano del fascio.

Difatti se per il punto A d' intersezione della retta AB_1 con a (coroll. II, teor. III, 46) si conduce la normale AB alle rette del fascio (coroll. I, teor. V, 47 e

teor. VI, 41) e B_1 e C_1 sono i punti d'intersezione di AB_1 colle rette b e c, essendo $(AB) \equiv (BC)$ si ha $(AB_1) \equiv (B_1C_1)$ (teor. I, 45) (fig. 37).

Def. II. Per misura delle striscie di un fascio di rette parallele si possono considerare quindi i segmenti che esse tagliano sopra una trasversale qualunque nel campo finito del fascio.

Def. III. Se nella striscia di un fascio di rette parallele si considera come elemento il punto, la figura così ottennta si chiama *striscia piana.*

Coroll. Il piano è identico nella posizione delle sue parti intorno ad ogni suo punto all'infinito (teor. III, def. III e teor. III, 15).

Teor IV. I fasci di rette parallele sono uguali.

Difatti scelte due rette r e r' che tagliano perpendicolarmente le rette dei due fasci, e stabilita fra le due rette r e r' una corrispondenza d'identità (teor. VI, 15), mediante questa corrispondenza possiamo stabilire una corrispondenza d'identità fra i due fasci stessi (teor. III).

Coroll. Il piano è identico intorno ad ogni suo punto all'infinito (teor. IV, def. III e teor. III, 15).

Def. IV. Una figura i cui punti appartengono al piano (def. II, 2) si chiama figura *piana.*

Teor. V. Se una figura piana viene incontrata da ogni retta del suo piano in un solo punto, essa è una retta.

Infatti due punti della figura determinano una retta che fa parte della figura stessa, per la condizione del teorema (def. II, 2). Se la figura avesse altri punti fuori di questa retta, ciascuno di essi determinerebbe con un punto di essa un'altra retta appartenente alla figura data, e quindi ogni retta del piano avrebbe più di un punto comune colla figura (coroll. II, teor. III, 46), contro il dato XLVI).

XLVI) Per le proprietà del n. 47 bisogna procedere nel campo finito nel seguente modo:

Teor. I. Due settori angolari (angoli) opposti al vertice di un fascio (Rr) sono uguali.

Il teor. fu dimostrato per quei settori angolari i cui raggi estremi incontrano la retta r (oss. I, 43 e nota XXXV). Si consideri ora un settore angolare del fascio (Rr) di cui un raggio estremo incontri la retta r in un punto A, e il secondo incontri invece la parallela r' ad r (i cui punti distano ugualmente da R dei punti della retta r), nel punto C' (fig. 27) I raggi del settore $\widehat{ARC'}$, incontrano la retta AC', perchè il fascio (Rr) coincide col fascio $R.\ AC'$ (teor. III, 46 e nota XLV), e quindi per la dimostrazione data al n. 43 si ha pure $\widehat{ARC'} \equiv \widehat{A'RC}$ (fig. 27).

Coroll. I. Due settori angolari (angoli) piani opposti al vertice sono uguali.

Ciò deriva immediatamente dall'identità dei settori angolari opposti di un fascio del piano col centro nel vertice dei settori angolari dati (def. II, 46 e nota XLI).

Teor. II. Un fascio viene diviso da due suoi raggi opposti in due parti identiche.

Siano s e s' i due raggi opposti in una retta σ del fascio (Rr) e sia r una retta parallela a σ del piano di esso (nota XLI). Tutti i raggi del fascio (Rr) che incontrano la retta r, compresi s e s', determinano una parte del fascio che ha per raggi estremi s e s' (nota XLI; teor. II, 46 e nota XLV), e i raggi opposti danno l'altra parte del fascio.

Queste due parti sono identiche. Difatti ad ogni settore della prima corrisponde un

§ 9.

Considerazioni sul sistema dei punti limiti assoluti all'infinito dei raggi di un fascio (Rr) rispetto al centro R.

49. Consideriamo ora tutti i punti limiti assoluti dei raggi di un fascio (Rr) rispetto al punto R (def. II, 32).

Tutti questi punti determinano un sistema σ_∞ di punti ad una dimensione, che corrisponde univocamente e nel medesimo ordine al fascio di raggi che lo determina (def. III, 42), e poichè questo corrisponde nello stesso modo ad una retta direttrice qualunque r del campo finito del piano (teor. III, 46)

---

settore identico opposto della seconda (teor. I), in modo che scelti due punti X e Y della prima, facendo passare per essi i due raggi RX ed RY, e costruiti i due punti X' e Y' nei raggi opposti tali che $(RX) \equiv (R'X')$, $(RY) \equiv (R'Y')$, i due triangoli XRY, $X'RY'$, sono uguali per avere due lati e l'angolo compreso uguali (teor, II, 42 e nota XXXV); dunque $(XY) \equiv (X'Y')$ (teor. III, 16 e nota XII), e perciò le due parti suddette del fascio sono uguali (teor. III, 15 e nota XII).

Teor. III. Esiste una corrispondenza nel fascio di raggi di centro R tale:

1° *che il punto R corrisponde a sè medesimo e che una retta AB e le rette ad essa parallele, considerate ciascuna in un verso, corrispondono a sè stesse considerate nel verso opposto;*

2° *che ai settori angolari del fascio corrispondono altri settori angolari uguali di esso;*

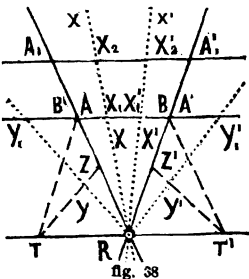
3° *che a due punti qualunque X e Y del piano del fascio corrispondono punti X', Y' tali che* $(XY) \equiv (X'Y')$.

In due raggi del fascio si considerino due punti A e B ad ugual distanza dal punto R, e indichiamoli rispettivamente con B' e A'; i due triangoli ARB, $A'RB'$ sono uguali per avere i tre lati uguali (int. g, 99 e teor. III, 17 e nota XII). Mediante i due triangoli suddetti possiamo stabilire la corrispondenza d'identità (oss. III, 15 e nota XII) del teorema fra i due fasci $R.AB$ e $R.A'B'$, i quali coincidono, cioè sono lo stesso fascio, una volta considerato in un verso, in quello cioè dato dal segmento (AB) percorso da A verso B, e l'altra nel verso opposto.

a) Nella corrispondenza d'identità fra i due triangoli suddetti il punto R corrisponde a sè stesso, e alla retta AB percorsa nel verso del segmento (AB) da A verso B (int, f'', 63) corrisponde la retta stessa percorsa nel verso opposto, in modo che ad un punto X_1 qualunque della retta AB considerata nel primo verso corrisponde un punto X'_1 le cui distanze da A' e B' sono uguali a quelle del punto X_1 da A e B (fig. 38).

b) Ad un punto qualunque X del fascio $R.AB$ corrisponde un punto X' ad ugual distanza da R nel modo seguente. Si determini il punto d'intersezione X_1 della retta RX colla retta AB, che dapprima supponiamo non sia ad essa parallela (coroll. II, teor. III, 46 e nota XLV). Al punto X_1 corrisponde in AB un punto X'_1 (a), e poichè il punto R corrisponde a sè stesso, RX_1 corrisponde alla retta RX'_1, e quindi al punto X il punto X' a distanze da R e X'_1 uguali a quelle del punto X da R e X_1, il quale punto è così pienamente determinato (teor. I, 8 e nota VII; int. def. I, 61, b, 36 e nota III).

fig. 38

Se invece RX è la retta s parallela alla retta AB percorsa nel verso di (AB), ad essa deve corrispondere la retta s' parallela alla retta $A'B'$ ossia alla retta AB nel verso opposto, vale a dire le due

il sistema σ_∞ e la retta r si corrispondono pure univocamente e nello stesso ordine (int. *f*, 42).

Il sistema σ_∞ è determinato da due dei suoi punti qualunque purchè non siano punti opposti; e contiene il punto opposto di ogni suo punto.

Si prova facilmente che a settori angolari uguali del fascio corrispondono segmenti uguali del sistema σ_∞, e reciprocamente; e a settori (ab), $(a'b')$ del fascio tali che $(ab) \gtrless (a'b')$ corrispondono segmenti di σ_∞ che stanno nella stessa relazione di disuguaglianza, e viceversa.

Ogni punto del sistema σ_∞ ha inoltre la proprietà che la somma delle

---

rette s e s' coincidono colla parallela condotta da R alla retta AB, in modo che ad un punto T dell'una corrisponde un punto T' dell'altra alla stessa distanza da R nel raggio opposto, perchè nella corrispondenza d'identità determinata dai due triangoli ABR, $A'B'R$ al settore angolare BRT che ha per raggio interno RA (nota XXXIII) deve corrispondere un settore ART' che ha per raggio interno RA'. il che non succederebbe se T' coincidesse con T (teor. II, nota XLIV e int. *b*, 36) (fig. 38).

Ad ogni punto, ad es. A_1, di RA corrisponde un punto A'_1 del raggio corrispondente RA'_1 ad ugual distanza da R, e la retta $A_1A'_1$ è parallela alla retta AB (teor. I, 45 e nota XL). Due raggi corrispondenti RX_1 e RX'_1 incontrano la retta $A_1A'_1$ in due punti X_2 e X'_2 ad ugual distanza da R (teor. I, 45, nota XL e oss. III nota XLIV), dunque ad ogni punto della retta $A_1A'_1$ corrisponde un punto della medesima retta (fig. 38).

c) A due raggi x e y del fascio e non paralleli alla retta AB corrispondono due raggi x' e y' che formano lo stesso angolo.

Difatti siano X_1 e Y_1 i punti d'intersezione di x e y colla retta AB, X'_1 e Y'_1 i punti corrispondenti (*b*). I triangoli ARX_1, $A'RX'_1$ sono ugnali, perchè hanno due lati e l'angolo compreso uguali (teor. II, 42 e nota XXXV), cioè $(AX_1) \equiv (A_1X'_1)$; $(RA) \equiv (RA')$, $\widehat{X_1AR} \equiv \widehat{X'_1A'R}$, dunque $(RX_1) \equiv (RX'_1)$ (nota XXXV, coroll. teorema III, 16 e nota XII).

Analogamente si ha $(RY_1) \equiv (RY'_1)$; ma $(X_1Y_1) \equiv (X'_1Y'_1)$ (*a*), dunque i due triangoli X_1RY_1 $X'_1RY'_1$ sono uguali per avere i tre lati uguali (teor. III, 17 e nota XII), quindi anche i due angoli $\widehat{X_1RY_1}$ e $\widehat{X'_1RY'_1}$ (nota XXXV), e a due punti X e Y sui due raggi x e y corrispondono due punti X' e Y' (*b*), e i due triangoli XRY, $X'RY'$ sono uguali per avere due lati e l'angolo compreso uguali, dunque $(XY) \equiv (X'Y')$ (coroll. teor. III, 16 e nota XXXV).

d) Supponiamo ora che uno dei raggi, ad es. x sia il raggio s parallelo alla retta AB.

Dal punto A conduciamo la parallela AT alla retta RA', sia T il suo punto d'incontro colla parallela condotta da R alla retta AB, e dal punto A' tiriamo la parallela $A'T'$ alla retta RA, che incontri la retta TR nel punto T'. Dai due parallelogrammi $AA'RT$, $A'ART'$ si ha $(RT) \equiv (AA') \equiv (RT')$ (teor. I, 44 e nota XXXIX), dunque T e T' sono punti corrispondenti (*b*). Di più, i triangoli ATR, $AA'R$; $AA'R$, $A'T'R$ sono uguali per avere due lati e l'angolo compreso uguale (teor. II, 44 e nota XXIX), e perciò si ha $\widehat{TRA} \equiv \widehat{RAA'}$ (coroll. teor. III, 16 e nota XXXV) e $\widehat{T'RA'} \equiv \widehat{RA'A}$. Ma $\widehat{RA'A} \equiv \widehat{RAA'}$ (teor. III, 42), dunque $\widehat{TRA} \equiv \widehat{T'RA'}$ (teor. IV, 15).

Sia ora data una retta y qualunque del fascio; si conduca per T una retta che incontri le due rette y e RA nei due punti Y e Z, il che è possibile altrimenti tutte le rette nel piano del fascio che incontrano la retta y dovrebbero essere parallele alla retta RA contro l'ass. VI (nota XVI).

Nelle rette corrispondentl a RT, y e RA corrispondono tre punti T', Y' e Z' ad ugual distanza da R (*b*), e in modo che si ha $(TZ) \equiv (T'Z')$ per l'uguaglianza dei triangoli TRZ, $T'RZ'$ che hanno, per quanto si è detto testè, due lati e l'angolo da essi compreso uguali, e $(YZ) \equiv (Y'Z')$ (*c*); quindi, anche per l'uguaglianza dei triangoll

sue distanze da due punti opposti qualunque del sistema è uguale alla metà della retta.

Ma nonostante tutte queste proprietà che il sistema σ_∞ ha in comune

---

suddetti, qualunque sia la posizione del punto Y sulla retta TZ' si ha $(TY) \equiv (T'Y')$.

Dunque il teor. è in ogni caso dimostrato.

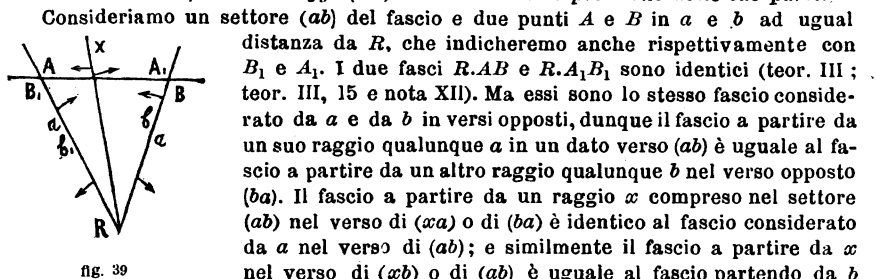
Teor. IV. Un fascio di raggi (Rr) è identico nella posizione delle sue parti.

Consideriamo un settore (ab) del fascio e due punti A e B in a e b ad ugual distanza da R, che indicheremo anche rispettivamente con B_1 e A_1. I due fasci $R.AB$ e $R.A_1B_1$ sono identici (teor. III; teor. III, 15 e nota XII). Ma essi sono lo stesso fascio considerato da a e da b in versi opposti, dunque il fascio a partire da un suo raggio qualunque a in un dato verso (ab) è uguale al fascio a partire da un altro raggio qualunque b nel verso opposto (ba). Il fascio a partire da un raggio x compreso nel settore (ab) nel verso di (xa) o di (ba) è identico al fascio considerato da a nel verso di (ab); e similmente il fascio a partire da x nel verso di (xb) o di (ab) è uguale al fascio partendo da b nel verso di (bx); ne consegue dunque, per quanto si è prima detto, che il fascio considerato dal raggio x in un dato verso è identico allo stesso fascio a cominciare dal raggio x nel verso opposto. E perciò dato un settore angolare qualunque (ac) del fascio vi è cominciando da x in uno o nell'altro verso un settore uguale ad (ac).

fig. 39

Ma il raggio x si può ritenere come un raggio qualunque del fascio, perchè si può sempre scegliere un settore (ab) nel quale esso sia compreso, come si vede facilmente, dunque il teor. è dimostrato (int. def. I, 68 e 70 e oss. II, 81).

Coroll. Il piano è identico nella posizione delle sue parti intorno ad ogni suo punto (def. II, 46 e nota XLI, teor. III, 15 e nota XII).

Teor. V. (*) *Il fascio è un sistema continuo.*

Difatti dato un settore (xx') ve n'è sempre uno più piccolo contenuto in esso; per assicurarsene basta scegliere una retta r del piano del fascio come sua retta direttrice (teor. III, 46 nota XLI, XLV). E se è dato un settore i cui raggi estremi x e x' siano variabili in versi opposti, il segmento corrispondente sulla retta r ha la stessa proprietà, e determina un punto Y compreso fra i punti X e X' (int. ip. VI e a, 96) al quale corrisponde un raggio y del fascio compreso fra x e x' (nota XLI).

Le condizioni della continuità date nell'introduzione (vedi nota 8ª del n. 99) sono soddisfatte e quindi il fascio è continuo.

Oss. I. Se le ragioni didattiche permettessero di trattare del sistema identico nella posizione delle sue parti e continuo in senso astratto seguendo la via indicata nella oss. II, 81 dell'introduzione (vedi anche *A.* Il continuo rettilineo ecc. nota pag. 23), si troverebbe preparato il materiale per le proprietà comuni della retta, del fascio di raggi, della circonferenza, del fascio di semipiani ecc. senza che bisognasse dimostrare separatamente le stesse proprietà per ciascuna di queste figure.

La costruzione della metà di un settore angolare, i cui raggi non sono opposti si può effettuare al punto a cui siamo arrivati per mezzo del triangolo isoscele coi due lati nei raggi del settore dato (teor. IV, 42 e nota relativa).

Abbiamo però segnato il teor. V. con un asterisco perchè vogliamo dimostrare le proprietà del fascio che ci occorrono ulteriormente, indipendentemente dalla continuità.

Oss. II. In virtù del teor. V si può dire che il piano (def. II, 46 e XLI) è *continuo.*

Teor. VI. Un settore angolare (angolo) (ab) qualunque di un fascio percorso in un verso è uguale allo stesso settore (angolo) percorso nel verso opposto.

Quando a e b non sono raggi opposti, ciò deriva dall'essere la coppia (ab) uguale alla coppia rettilinea (ba) (teor. II, 17 e nota XII), e quindi sono uguali anche i settori

colla retta del campo limite assoluto determinata da due punti del sistema σ_∞, e che quindi contiene anche i punti opposti (teor. I, 30), nonostante che due

e gli angoli del fascio da esse determinati (nota XLI e XXXV). Se a e b sono raggi opposti ad es: s e s', la proprietà suddetta risulta dalla corrispondenza del teor. III (teor III, 15 e nota XII) (fig. 38).

Oss. III. Il teor, VI deriva anche come corollario dal teor. V (int. g, 99 opp. A. «Il continuo rettilineo ecc.»).

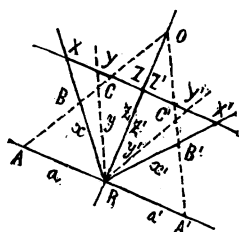
Coroll. Due settori (angoli) piatti piani sono direttamente e inversamente uguali.

Perchè tali sono i settori del fascio che li determina (def. II, 46 e nota XLI, teor. II e IV di questa nota, teor. III, 15 e nota XII).

Teor. VII. Esiste una ed una sola retta che divide per metà un settore angolare piatto — Gli angoli retti del fascio sono uguali.

Siano a e a' i raggi del settore piatto di vertice R. Scelta una retta XX' parallela alla retta aa', si stabilisca la corrispondenza d'identità data dal teor. III. Se x e x' sono raggi corrispondenti del settore piatto dato, e X e X' i loro punti d'intersezione colla retta XX', il triangolo XRX' è isoscele e il settore (ax) è uguale al settore $(a'x')$ (teor. III).

fig. 40

La bissettrice del settore XRX' è evidentemente bissettrice dei settori formati da due altri raggi corrispondenti (yy') e corrisponde a sè stessa, perchè il suo punto Z d'incontro con la retta XX' è equidistante da X e X' (teor. IV, 42 e nota relativa) e quindi Z coincide con Z'. Dunque si ha $(az) \equiv (a'z)$, e poichè il fascio è semplicemente chiuso (XLIV) così vi è un solo angolo a partire da a nel verso axa' uguale ad un angolo dato (fig. 40).

È chiaro poi che le rette che uniscono due coppie di punti corrispondenti si incontrano nella bissettrice. Ad es. la relta AC incontra la bissettrice z in un punto O il quale coincide con O', essendo $(O'Z) \equiv (OZ)$, $(O'R) \equiv (OR)$ (int. b, 36 e def. I, 61 e nota III).

Dati due settori angolari piatti, stabilita la loro corrispondenza d'identità (teor. VI) si corrispondono fra loro le bissettrici, ed il teorema è così dimostrato.

Teor. VIII. Se due triangoli ABD, ADC hanno un vertice A e un lato AD comune, gli angoli $\widehat{BAD}$ e $\widehat{CAD}$ uguali, i punti B, D, C in linea retta e $(BD) \equiv (DC)$, i due triangoli sono uguali.

Difatti pel punto C non passa alcuna altra retta che tagli AD e AB in due punti D' e B' in guisa che sia $(B'D') \equiv (D'C)$, perchè si avrebbe

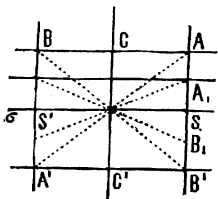
$$\frac{(CD)}{(CB)} = \frac{(CD')}{(CB')}$$

e le rette BB', DD' dovrebbero essere parallele (teor. I, 45), mentre si incontrano nel punto A (nota XVI).

Teor. IX. Per un punto R si può condurre una sola perpendicolare ad una retta AB nel piano.

Se il punto R é situato sulla retta AB il teor. è senz'altro il teor. VII (nota XXXVI). Se ciò non è, sia σ la parallela condotta da R alla retta AB, e si tirino due raggi RA e RB che formino con i raggi RS', RS opposti di σ due angoli ARS, BRS' minori di un angolo retto ed uguali. La bissettrice del settore $\widehat{ARB}$ è perpendicola in R alla retta σ (teor. VII).

fig. 41

Si prolunghi RB in RB' in modo che sia $(RB) \equiv (RB')$ e così sia $(RA) \equiv (RA')$: Si ha $\widehat{B'RS} \equiv \widehat{BRS'} \equiv \widehat{ARS}$. I triangoli ASR, $B'SR$ si trovano nelle condizioni di quelli del teor. VIII; dunque $(AR) \equiv (B'R)$, e perciò $\widehat{ASR} \equiv \widehat{B'SR}$; dunque AB' è pure perpendicolare alla retta σ (nota XXXIII).

tali sistemi siano identici (teor. II, 47) come lo sono due rette (teor. I, 8), pure non mi è riuscito di dimostrare in ogni caso, e quindi debbo anche ritenere che non si possano dimostrare, le seguenti proprietà mediante gli assiomi e le ipotesi stabilite:

1° «che a segmenti rettilinei $(A_\infty B_\infty) \gtrless (C_\infty D_\infty)$ corrispondano sempre » settori angolari che stiano nella stessa relazione di disuguaglianza, sebbene » ad essi pel teor. I corrispondano settori disuguali;

2° «che considerato un settore angolare come somma di più settori » angolari consecutivi nel fascio, il segmento rettilineo corrispondente al primo » settore sia pure somma in generale dei segmenti corrispondenti ai secondi ».

Sia C il punto medio di (AB); per esso passa la bissettrice del settore $\widehat{BRA}$ (teor. IV, 42 e nota XXXVI), e perciò la retta RC è pure perpendicolare alla retta AB (nota XXXIII).

Inversamente, data la retta RC perpendicolare in C alla retta AB, costruiti i segmenti uguali (BC) e (AC), si ha $(RB) \equiv (RA)$, perchè i due triangoli BCR, ACR sono uguali per avere due lati e l'angolo compreso uguali (teor. II, 42 e nota XXXV), dunque anche $(RB') \equiv (RA)$. Siccome la parallela σ incontra la retta AB' nel punto medio S, e il triangolo ARB' è isoscele, la retta σ è perpendicolare alla retta AB', e quindi essendo $(BS') \equiv (AS)$ si ha $\widehat{BRS'} \equiv \widehat{ARS}$ (teor. VII), e la retta RC è bissettrice dell'angolo piatto determinato dai due raggi RS e RS', dunque la retta RC è perpendicolare alla retta σ (fig. 41).

Vi è dunque una sola perpendicolare condotta da R alla retta AB, altrimenti se ve ne fossero due distinte sarebbero ugualmente perpendicolari alla retta σ, il che è assurdo (teor. VII) [1].

Coroll. I. La perpendicolare ad una retta nel piano é perpendicolare a tutte le rette parallele alla data.

Sia r' la parallela alla retta AB la quale incontra la retta AB' in un punto A_1. Si tiri la RA_1 e si conduca il raggio RB_1 tale che si abbia:

$$A_1RS \equiv B_1RS. \quad \text{(teor. IV)}$$

Pér la stessa ragione di prima la retta RC è perpendicolare alla retta A_1B_1.

Coroll. II. Due rette perpendicolari ad una terza sono parallele.

Vale la stessa dimostrazione del coroll. II del teor. VI data nel testo.

Teor. IX. Due fasci qualunque di centri R e R' del piano sono identici.

Dal punto di mezzo M di (RR') si conduca la perpendicolare r ad RR'; ogni punto A di r congiunto con R e con R' dà due segmenti (RA), $(R'A)$ uguali fra loro, essendo i due triangoli RMA, $R'MA$ uguali per avere due lati e l'angolo compreso retto uguali (teor. VII). Dunque le figure (Rr) e $(R'r)$, ossia i due fasci di centro R e R' nel piano, sono uguali (teor, III, 15 e nota XII).

Coroll. Il piano è identico intorno ad ogni suo punto e a partire da ogni sua retta in uno e nell'altro verso.

Perchè tali sono i fasci intorno ai suoi punti e i suoi angoli piatti (def. II, 46 e nota XLI).

Oss. II. Non ricorrendo come abbiamo fatto nel testo alle ipotesi astratte, non possiamo dimostrare subito l'identità di due fasci di raggi e quindi di due piani qualunque; come non ancora abbiamo dimostrato nel solo campo finito l'uguaglianza degli angoli coi lati paralleli nello stesso piano e in piani diversi (nota XXXI).

Oss. III. Il teor. VI del n. 47 sarà dato in una nota del n. 52, mentre quelli del n. 48 si dimostrano allo stesso modo coll'aiuto dei teoremi precedenti.

1) Veggasi la dimostrazione di questa proprietà data al cap. III, indipendentemente dal piano e per ogni sistema di geometria.

La seconda proprietà è sufficiente per stabilire l'identità del sistema σ_∞ colla retta. Da questa proprietà deriva quindi la prima, ma le abbiamo date separate perchè dalla prima non deriva ancora la seconda. Se si potesse dimostrare pel sistema σ_∞ il teor. VII del n. 13, allora da esso si ricaverebbe facilmente la prima delle due proprietà anzidette.

Ma la dimostrazione del teor. VII del n. 13 si appoggia sulla definizione della linea semplice (def. I, 13), la quale stabilisce che un punto limite di una serie di punti sulla linea lo è indipendentemente da essa nello spazio generale (def. II, 10), il che non vediamo come possa essere dimostrato per il sistema σ_∞ senza aggiungere all'ip. IV la proprietà che se una retta SA è limite di un'altra retta SX in un campo finito qualunqne intorno ad S, lo è anche della stessa retta SX in ogni campo infinito e infinitesimo rispetto all'unità del campo dato, o intorno al punto S. Questa aggiunta all'ip. IV, e che riguarda il solo punto S, può essere dimostrata poi per ogni altro punto X, seguendo il procedimento indicato nella dimostrazione dell'ip. IV (teor. II, 31).

Conv. Però rispetto al piano, o anche rispetto a due piani Euclidei (Rr) $(R'r')$, il sistema σ_∞ si comporta come se fosse una retta (teor. IV e VI, 39), dunque conveniamo intanto di chiamare il sistema σ_∞ *linea retta* all'infinito del piano Euclideo, quando ne faremo uso, il che è permesso facendo uso soltanto delle proprietà comuni del sistema σ_∞ e della retta.

Oss. I. Ci riserviamo di stabilire al cap. II un'ipotesi dalla quale deriva che il sistema σ_∞ è effettivamente una retta.

Volendo trattare fino al cap. II del solo piano Euclideo, così per fascio col centro nel campo finito e quindi anche per piano intenderemo sempre un fascio colla direttrice nel campo finito; e in generale parlando di punti e di rette senz'altro, intenderemo che siano punti e rette del campo finito.

§ 10.

Parti in cui il piano viene diviso da una sua retta. Parte interna ed esterna di un triangolo.

50. *Teor. I. Nel fascio $(R\,r)$ la retta r ed ogni retta ad essa parallela sono situate in una delle parti in cui il fascio viene diviso dalla retta parallela alla retta r.*

La retta σ parallela ad r, che passa per R, divide il fascio in due parti identiche (coroll. II, teor. I, 47), le quali sono determinate dalle due parti uguali della retta all'infinito del fascio (conv. 49) che hanno per estremi i punti S_∞, S'_∞ all'infinito della retta σ.

I raggi determinati dai punti di r col punto R a partire da R e da un dato raggio, ad es. dal raggio limite RS_∞ (teor. II, 46), si seguono in un dato ordine come i punti corrispondenti della retta r (def. I, 30), e quindi anche i punti corrispondenti su di una metà della retta all'infinito compresa fra i punti S_∞ e S'_∞. Dunque le due parti suddette del fascio sono date, l'una dai raggi che incontrano la retta r compresi i raggi limiti RS_∞, RS'_∞, e l'altra dai raggi opposti (fig. 27).

Se r' è una parallela a r, e quindi anche a σ, che passa per un punto A_1 di un raggio RA situato in una delle parti suddette del fascio, la retta r' determina con R la stessa parte $S_\infty A_\infty S'_\infty$ della retta all'infinito XLVII).

Oss. I. La figura di tutti i punti del piano situati in una parte del fascio determinata da una sua retta, è una parte del piano (def. I, 46).

Teor. II. I fasci del piano che hanno i centri sopra una medesima retta del campo finito vengono divisi da questa retta in due parti che giacciono rispettivamente nelle stesse due parti di piano.

Siano R e R' i centri di due fasci situati in una retta σ, ed r una parallela a σ. La retta r può riguardarsi quale retta direttrice dei due fasci (teor. III, 46), anzi, pel teor. I, di una delle due parti di essi in cui vengono divisi dalla retta σ. Se da un punto M, ad es. interno di (RA), si conduce la parallela a σ, essa incontra $(R'A)$ in un punto interno (coroll. II, teor. I, 45), ed (RB) in un punto interno M'; e siccome la parallela MM' è situata nelle parti del fascio (Rr) e $(R'r)$ determinate da r e σ, così esse hanno in comune tutti i punti della retta MM', qualunque sia M interno al segmento (RA). Se invece M è nel prolungamento di (RA) da R verso A, non essendo possibili altri casi nel raggio RA limitato in R (int. *b*, 36 e def. I, 7) vale la stessa proprietà. Dunque ogni punto della parte suddetta del fascio (Rr) è un punto di quella del fascio (Rr'), e inversamente per le stesse ragioni; dunque il teorema è dimostrato.

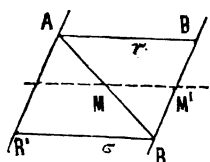



fig. 42

Def. I. In conformità al teor. II diremo che il piano *è diviso da una sua retta in due parti rispetto ad essa* (oss. I).

Coroll. I. Le parti opposte del piano rispetto ad una retta sono direttamente e inversamente identiche.

Perchè tali sono le parti opposte determinate dalla retta in un fascio che ha il centro su di essa (coroll. II, teor. 1, 47 e def. I).

Coroll. II. Ogni retta r è situata per metà nelle due parti di piano determinate da un' altra retta s non parallela alla prima.

I punti all'infinito della retta s sono punti opposti, ed essi sono separati dalla coppia dei punti opposti all'infinito della retta r (teor. I, 29).

Questi due punti col punto d'incontro B delle due rette (coroll. II, teor. III. 46) determinano le due metà della retta r situate da parti opposte della retta s (def. I, teor. II e I).

XLVII) Il teor. I va dimostrato nel seguente modo:

Per la def. del fascio (Rr) (XLI) una delle parti determinate dalla retta σ del fascio parallela alla retta r, contiene la retta r, mentre l'altra parte è data dai raggi opposti limitati in R che incontrano la retta r' i cui punti sono ad ugual distanza di quelli corrispondenti di r dal punto R (fig. 27).

Se RA è un raggio della prima parte e perciò limitato in R, un punto A_1 di esso è interno al segmento (RA), oppure A è interno al segmento (RA_1), non essendovi nel raggio RA limitato in R altri casi possibili (int. *b*, 36 e nota III). La parallela condotta da A_1 a σ incontra la retta RB, essendo B un punto di r, in un punto B_1 interno al segmento (RB) oppure tale che B è interno al segmento (RB_1) (nota XLI e coroll. II, teor. I, 45) e perciò il punto B_1 è situato sul raggio RB limitato in R; ed il teo. è così dimostrato.

Coroll. III. Il segmento che unisce due punti situati da parti opposte del piano rispetto ad una retta incontra questa retta in un punto interno, ed inversamente.

Difatti la retta che unisce i due punti X e Y dati non è parallela alla retta data s (teor. I), dunque la incontra in un punto S (coroll. II, teor. III, 46). Ma questo punto divide la prima retta in due raggi situati da parti opposte rispetto alla retta s (def. I, teor. II e I); e quindi il punto S è interno al segmento (XY).

La proprietà inversa risulta dall'essere SX e SY due raggi opposti, e quindi situati da parti opposte della retta s (def. I).

Coroll. IV. Un settore angolare (ab) di vertice R può essere generato congiungendo il vertice R coi punti di ogni segmento (AB) i cui estremi giacciono in a e b.

Siano (AB) e $(A'B')$ due segmenti i cui estremi sono in a e b. Sappiamo che il fascio di centro R può essere generato dalle due rette AB e $A'B'$ (coroll. II, teor. III, 46), ma non sappiamo ancora se valga la proprietà suddetta, nè di tale proprietà abbiamo fatto ancora uso, tranne nel caso che AB e $A'B'$ siano parallele (coroll. IV, teor. I, 45).

Sia E un punto interno al segmento (AB); i raggi RA, RB sono quindi da parti opposte del piano rispetto alla retta RE, e perciò A' e B' sono situati da parti opposte rispetto alla retta RE. Dunque il segmento $(A'B')$ incontra la RE in un punto interno (coroll. III).

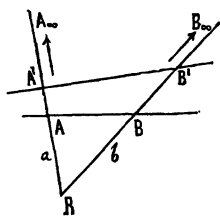



fig. 43

Oppure anche: Al segmento (AB) corrisponde il segmento $(A_\infty B_\infty)$ della retta all'infinito del settore (ab) (conv. 49), il quale corrisponde all'altro segmento $(A'B')$, dimodochè ogni raggio che incontra $(A_\infty B_\infty)$ incontra anche il segmento $(A'B')$ come incontra il segmento (AB) (fig. 43) XLVIII) [1]).

51. *Teor. I. Le parti di piano determinate dai settori angolari di un triangolo limitati ai lati opposti coincidono.*

XLVIII) Per il teorema II si dà la stessa dimostrazione (nota XXXI).

I coroll. I e III si dimostrano nello stesso modo, il coroll, II si dimostra invece così: la retta r incontra la retta s in un punto S (coroll. II, teor. III, 46 e nota XLV) e perciò appartiene al fascio di centro S. Ma i due raggi di r limitati in R sono situati nelle parti opposte del piano rispetto alla retta s (teor. II), dunque il corollario è dimostrato.

Pel coroll. IV. si dà la prima dimostrazione del testo) [1]).

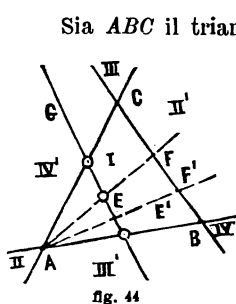
1) Le proprietà dei coroll. I, II vengono date d'ordinario tacitamente o no come assiomi nei trattati di geometria elementare. Euclide, Baltzer ecc. le suppongono tacitamente. Ad es. De Paolis (Elementi di geometria) li dà nei postulati III, 3 e 4, IV, 3; V, 1. Sannia e D'Ovidio danno invece come postulati i coroll. I, II e III (Elementi di geometria. 1886-post. 3, 4 e 5 pag. 15-16). Coi postulati sull'invertibilità di un angolo (ab), colla rotazione del piano intorno ad una sua retta qualunque fino a passare per un punto qualunque dello spazio (s' intende senza definizione quello a tre dimensioni — vedi libro III), collo scorrimento del piano lungo una sua retta e colla rotazione intorno ad ogni suo punto in due direzioni opposte, si ammettono, facendo uso del postulato del movimento senza deformazione (n. 37), i coroll. II, III del teor. I, il coroll. I del teor. II, il teor. III del n. 47 e il teor. II del n. 48, dimostrati anche nelle note precedenti senza l'uso dell'infinito, tranne il coroll. I del teor. II del n. 47, che sarà dimostrato più tardi. Così si ammettono tacitamente o no altri postulati che invece noi dimostreremo.

Sia ABC il triangolo e il settore $\widehat{CAB}$ sia limitato dal lato (BC). Scelto

fig. 44

un punto D sul lato (AB), il settore suddetto può essere generato anche dal vertice A e dal segmento (CD) (coroll. IV, teor. II, 50). Dato un punto E interno a (CD), ed essendo F il punto d'intersezione di AE col lato (CB) (coroll. IV, teor. II, 50), siccome il settore $\widehat{ACB}$ può essere generato dal segmento (AF), essendo D un punto interno di (AB), E è un punto interno di (AF) (coroll. IV, teor. II, 50). Ma (CD) è un segmento interno del settore $\widehat{ACB}$; dunque la parte di piano determinata dal settore $\widehat{CAB}$ limitato dal lato (AB) coincide colla parte di piano determinata dal settore $\widehat{ACB}$ limitato dal lato (CB) (int. def. V, 57).

Similmente si dimostra la stessa proprietà rispetto al terzo settore $\widehat{ABC}$ (fig. 44) [1].

Def I. La parte di piano determinata dai settori angolari di un triangolo limitata ai lati opposti si chiama *parte interna* del triangolo. La parte rimanente del piano si chiama *parte esterna*.

La figura costituita dai soli tre lati (AB), (AC), (CA) del triangolo si chiama *perimetro* o *contorno* del triangolo.

Per punto interno o esterno al triangolo s'intende un punto della parte interna o esterna, ma che non è situato sul contorno che è comune alle due parti.

Def. II. Se una figura ha tutti i suoi punti interni o esterni al triangolo, alcuni dei quali possono essere anche sul contorno del triangolo (def. I), la figura si chiama *interna* o *esterna* al triangolo.

Coroll. I. Una retta che passa per un vertice e per un punto interno del triangolo incontra il lato opposto in un punto interno (def. I e teor. I).

Coroll. II. Due rette che passano per due vertici e per due punti interni dei lati opposti del triangolo si incontrano in un punto interno del triangolo.

Difatti siano A e C i due vertici, D ed F i punti interni dei lati opposti. Il settore $\widehat{ACB}$ può essere generato da C col segmento (AF), e poichè (CD) è interno a questo settore, esso incontra (AF) in un punto interno E (coroll. IV, teor. II, 50) (fig. 44).

Coroll. III. Il segmento di due punti qualunque interni di un triangolo è interno al triangolo.

Siano E ed E' i due punti interni del triangolo. Il segmento (AE) prolungato da A verso E incontra il lato opposto in un punto F (def. I), e il segmento (AF) che contiene E è interno al triangolo (def. II). Così il segmento (AE') prolungato da A verso E' incontra il lato opposto (CB) in un punto interno F'. Il settore $\widehat{FAF'}$ è interno al triangolo, perchè è parte del settore $\widehat{CAB}$ (def. I). Il segmento (EF') è interno del triangolo FAF' (coroll. I), e il triangolo AEF' è interno al triangolo AFF' (int. a, 13 e def. I e II). Il segmento (EE') è interno al triangolo AEF' (coroll. I), dunque è interno al triangolo FAF' e perciò anche al triangolo ABC (int. a, 13 e def. I e II). (fig. 44).

---

1) Questo è il caso in cui al settore angolare non si può sostituire l'angolo, eccetto che non si voglia usare la parola angolo per indicare sempre il settore angolare (def. I, II, 38).

Coroll. IV. Un triangolo coi vertici interni ad un altro triangolo o sui lati di esso, è interno al secondo triangolo.

Difatti se il primo triangolo dato è $A'B'C'$, i lati $(A'B')$, $(A'C')$ $(B'C')$ sono interni al triangolo ABC (coroll. III), ma la parte interna del triangolo $A'B'C'$ è data dai raggi di ogni suo settore, ad es. $\widehat{A'B'C'}$, limitato al lato opposto $(B'C')$ (def. I), i quali sono interni al triangolo ABC (coroll. III), e perciò tutti i punti del triangolo $A'B'C'$ sono interni al triangolo ABC eccettùati quelli situati sui lati di esso (def. I), e quindi il coroll. è dimostrato (def. II).

Oss I. Un triangolo è determinato dalle tre rette dei suoi tre vertici (def. II, 9) e siccome due rette di un piano che si incontrano nel campo finito determinano in esso quattro settori angolari consecutivi due a due opposti (def. I. 50 e def, II, 46), così i tre lati del triangolo determinano due a due dodici settori angolari piani.

Def. III. I tre settori piani $\widehat{ABC}$, $\widehat{BCA}$, $\widehat{CAB}$ del triangolo ABC si chiamano settori (angoli) *interni* del triangolo; e lasciando da parte i settori angolari (angoli) opposti ai primi tre, i rimanenti sei settori (angoli) determinati nel piano dai tre lati (oss. I) si chiamano *esterni* al triangolo.

Oss. II. Le rette del triangolo ABC separano dunque il piano in sette parti, cioè la parte interna, le tre parti opposte ai vertici degli angoli interni e le tre parti rimanenti di questi angoli.

Def. IV. Le parti del piano limitate ciascuna da un lato del triangolo e dai prolungamenti degli altri due nel verso determinato su di essi a partire dal vertice comune opposto al lato dato, le chiameremo *parti opposte dei settori piani (angoli) interni rispetto ai lati.*

Coroll. V. Se un punto è esterno al triangolo, una sola delle tre rette che lo congiungono coi vertici incontra il lato, opposto al vertice che essa contiene, in un punto interno.

Se un punto E è interno al triangolo, vale a dire se è situato nella parte I interna al triangolo, le rette AE, BE, CE incontrano i lati (BC), (AC), (AB) in punti interni (coroll. I). Se invece il punto E è in una delle parti opposte ai vertici, ad es. nella parte II opposta al vertice A, la retta AE incontra il lato (BC) in un punto interno (coroll. I), mentre le rette BE, e CE non possono incontrare i lati (AC) e (AB) in punti interni, altrimenti il punto E sarebbe un punto interno (coroll. II).

La stessa cosa ha luogo se il punto E è situato in una delle parti opposte dei settori interni del triangolo rispetto ai lati (def. IV), ad es. nella parte II' opposta al settore $\widehat{BAC}$ rispetto al lato BC (coroll. IV, teor. II, 50) (fig. 44).

Teor. II. Se una retta del piano di un triangolo non passa per alcuno dei vertici e incontra un lato in un punto interno, incontra gli altri due l'uno in un punto interno e l'altro in un punto esterno.

Scegliamo sopra uno dei lati, ad es. (BC), un punto F. Il settore piano $\widehat{FAC}$ limitato dal segmento (FC) è tutto nella parte interna del triangolo dato (coroll. IV, teor. I), che si compone così delle parti interne dei due triangoli BAF, FAC. Il settore opposto ad $\widehat{AFC}$ ha per lati i raggi FB e il prolungamento di AF a partire da F, e quindi non ha all'infuori del segmento (FB) alcun altro punto comune col settore adiacente AFB, per essere il fascio di centro F nel piano (teor. III, 46) semplicemente chiuso, come ogni altro fascio (teor. I, 30). Ogni retta dunque

passante per F e contenuta nel settore $\widehat{AFC}$ e nel suo opposto al vertice incontra il lato (AC) in un punto interno (coroll. I, teor. I), mentre non può incontrare il lato (AB) che in uno dei suoi punti esterni (coroll. IV, teor. II, 50). Se invece la retta passante per F è interna al settore $\widehat{AFB}$ e al suo opposto al vertice, essa incontra il lato (AB) in un punto interno e in un punto esterno il lato (AC). Ma ogni retta passante per F è contenuta in due dei settori opposti suddetti, che formano intorno ad F tutto il piano (def. I, 30 e def. I, 46); il teor. è dunque dimostrato (fig. 44).

Coroll. I. Se una retta che non passa per alcuno dei vertici del triangolo incontra due lati del triangolo in punti esterni, incontra anche il terzo lato in un punto esterno.

Perchè se incontrasse il terzo lato in un punto interno, incontrerebbe anche uno degli altri due lati in un punto interno.

Teor. III. Se una retta ha un punto interno ad un triangolo, essa incontra necessariamente il perimetro di esso in due punti.

Difatti sia g la retta, E il suo punto interno al triangolo ABC, e F il punto d'intersezione di AE col lato opposto (BC). Considerando i triangoli ABF, ACF, due lati dei quali sono lati del triangolo dato o parti di essi, la retta g incontrando il lato (AF) comune in un punto interno, incontra un altro lato di ciascuno di essi, che è un lato o è parte di un lato del triangolo dato, in un punto interno; dunque il teor. è dimostrato (fig. 44).

Coroll. I segmenti che uniscono un punto O interno di un triangolo coi punti dei lati, contengono tutti i punti della parte interna del triangolo.

Difatti tutti i segmenti suddetti sono interni al triangolo (coroll. III, teor. I). Se O' è un punto interno qualunque, la retta OO' taglia il perimetro del triangolo in due punti, uno dei quali può essere anche un vertice, quindi il coroll. è dimostrato (def. I, 2 e def. I) XLIX) [1].

Oss. III. Osserviamo che gli angoli esterni di un triangolo (def. III) sono rispettivamente adiacenti due a due ad angoli interni che hanno con essi il medesimo vertice [1].

XLIX) Le proprietà di questo numero vanno dimostrate nello stesso modo ricorrendo agli stessi teoremi già dimostrati nelle note precedenti. Soltanto che se non si vuol far uso dell'espressione di punto all'infinito di due rette parallele, bisogna accennare nel teor. III al caso in cui la retta è parallela ad uno dei lati, ossia in cui il punto d'incontro con questo lato non esiste.

Ma osserviamo anche qui che l'introduzione dell'espressione suddetta anche in un trattato elementare serve a rendere più uniformi i teoremi stessi [1].

1) Per poligono *convesso* intendesi quel poligono del quale ciascun lato incontra gli altri, che non hanno con esso un vertice comune, in punti esterni ad esso.

Da questa definizione risulta che un lato divide il piano in due parti in una o nell'altra delle quali è situato tutto il poligono, ciò che si esprime anche dicendo che un lato del poligono convesso lascia dalla medesima banda tutti gli altri (def. II e coroll. III, teor. II, 50).

Da ciò si deduce tosto che dato un poligono convesso $A_1 A_2 A_3 \ldots A_n$, i cui lati sono $A_1 A_2$, $A_3 A_4, \ldots, A_{n-1} A_n$, $A_n A_1$, una diagonale ad es. $A_1 A_s$ lascia da una banda del piano i vertici $A_2, A_3, \ldots A_{s-1}$, e dall'altra i vertici $A_{s+1} \ldots A_n$. Si deduce pure che i prolungamenti dei lati $(A_{s+1} A_s), \ldots (A_n A_1)$ sono situati rispettivamente nei settori adiacenti di $A_{s-1} A_s A_1$, $A_2 A_1 A_s$. Stabilite queste proprietà si dimostra facilmente coll'aiuto dei teor. di questo numero e specialmente del teor. III il seguente teorema:

Se una retta del piano di un poligono convesso, che non passa per alcuno dei suoi vertici e

§ 11.

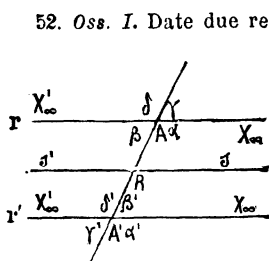
Angoli formati da due rette parallele con una traversale comune. Parti di una striscia piana rispetto ad una retta.

52. *Oss. I.* Date due rette parallele r e r' e una traversale comune che le incontra nei punti A e A', sia R il punto di mezzo del segmento (AA'). La retta AA' divide il piano in due parti opposte e uguali, nelle quali sono situate le due parti opposte di r e r' rispetto ai punti A e A' (coroll. II, teor. II, 50). Sia X_∞ il punto all'infinito di r ed r' situato da una parte della traversale, nella quale sarà situato anche il raggio s che lo congiunge con R; e X'_∞ sia il punto opposto di X_∞. Gli angoli $\widehat{X_\infty AR}$, $\widehat{X'_\infty AR}$, $\widehat{X'_\infty A'R}$, $\widehat{X_\infty A'R}$ indichiamoli rispettivamente con α e β, α' e β'. Inoltre gli angoli opposti di α e β col vertice in A indichiamoli con δ e γ; e gli angoli opposti di α' e β' con δ' e γ'. Gli angoli α e γ, β e δ; α' e γ', β' e δ' sono angoli adiacenti, come gli angoli α e β, γ e δ; α' e β', γ' e δ'.

fig. 45

Evidentemente gli angoli α e α', β e β', γ e γ', δ e δ' sono situati per la loro definizione in parti opposte del piano rispetto alla retta AA', mentre gli angoli α e γ, β' e δ', α' e γ', β e δ sono situati rispettivamente nella medesima parte di piano rispetto alla stessa retta AA' (fig. 45).

Def. I settori angolari (angoli) α e β, α' e β' secondo l'indicazione dell'oss. I si chiamano *interni*; γ e δ e γ' e δ' *esterni*.

α e β', α' e β *interni corrispondenti*,

γ e δ', γ' e δ *esterni corrispondenti*,

β e β', α e α' *alterni interni*,

γ e γ', δ e δ' *alterni esterni*,

α e δ', β' e γ, α' e δ, β e γ' *alterni corrispondenti* L).

---

incontra un lato di esso in un punto interno, essa incontra un altro lato ed uno solo in un punto interno, e gli altri in un punto esterno.

Una retta non può incontrare il contorno di un poligono convesso in più di due punti.

Il contorno del poligono è dato dai suoi lati, e la parte interna è data da quella dei triangoli che hanno un vertice comune ed hanno per lati quelli del poligono. Si dimostra poi:

Se una retta ha un punto interno al poligono convesso, essa incontra necessariamente il contorno del poligono in due punti.

La proprietà che se una retta ha un punto interno ad un poligono convesso ed uno esterno, essa incontra necessariamente il contorno di esso almeno in un punto, viene data da *Sannia* e *D'Ovidio* con un postulato (l. c. pag. 50). *Euclide*, *Legendre* ecc. la ammettono tacitamente, *De Paolis* (l. c. pagina 71 e 114) la ammette come cosa evidente senza postulato e senza dimostrazione appoggiandosi sul fatto che il contorno del poligono è una linea chiusa (vedi nota n. 60). La dimostrazione che dà *Faifofer* (Elementi di Geom. p. 43, 1836) non è sufficiente, come egli stesso avverte; se manca la definizione della linea manca anche la base per la dimostrazione delle sue proprietà. (Vedi pref.).

L) Si può dare a questo punto la definizione di raggi e di segmenti paralleli del medesimo verso e di verso opposto, cioè:

Def. I raggi di due rette parallele situati dalla stessa parte rispetto ad una retta a partire dai punti d'incontro con questa retta si dicono del *medesimo verso*, mentre se sono due raggi paralleli situati da parti opposte, si dicono *di verso opposto.*

Con queste espressioni intendiamo semplicemente di stabilire la posizione dei raggi paralleli rispetto ad una loro trasversale.

Teor. Due raggi paralleli del medesimo verso o di verso opposto rispetto ad una loro trasversale AA' lo sono rispetto a qualunque altra trasversale comune.

Sia $A_1A'_1$ un'altra trasversale comune. Possono darsi due casi: o A_1, A_1' sono dalla

Uguali denominazioni possiamo usare anche se le due rette r e r' non sono parallele.

Teor. I. Gli angoli alterni interni e alterni esterni che due rette parallele fanno con una traversale sono uguali.

Scegliendo un punto B sul raggio (AX_∞) della retta r, il punto B' simmetrico di B rispetto ad R sulla retta RB è situato sul raggio RB' opposto di RB contenuto nell'angolo $X'_\infty \widehat{RA'}$, e quindi il punto B' è sul raggio $(A'X'_\infty)$ della retta r' (teor. I, II, 43). Ma i due triangoli BAR, $B'A'R$ sono uguali, e quindi essendo $\widehat{BAR} = \alpha$, $\widehat{B'A'R} = \alpha'$ si ha:

$$\alpha = \alpha'$$

Similmente si ha

$$\beta = \beta'$$

ed essendo

$$\alpha = \delta, \quad \beta = \gamma; \quad \alpha' = \delta', \quad \beta' = \gamma'$$

si ha anche:

$$\gamma = \beta', \quad \gamma = \gamma' \qquad \text{(teor. IV, 15)}$$

Ind. Un angolo piatto lo indicheremo anche con la lettera π.

Teor. II. Gli angoli corrispondenti interni o esterni, che due rette parallele fanno con una trasversale comune, sono supplementari.

Difatti si ha:

$$\alpha + \beta = \alpha' + \beta' = \pi$$

ed essendo $\beta = \beta'$

$$\alpha + \beta' = \alpha' + \beta = \pi \qquad \text{(def. II, 38).}$$

Similmente

$$\delta + \gamma' = \delta' + \gamma = \pi$$

Teor. III. Se due rette r e r' formano angoli alterni interni uguali con una trasversale comune, esse sono parallele.

Siano infatti A e A' i punti d'incontro della trasversale con le due rette r e r', e siano X_∞, X'_∞; Y_∞ e Y'_∞ i punti all'infinito di esse, in modo che i segmenti (AX_∞), $(A'Y_\infty)$ di r e r' siano situati dalla stessa parte di AA' (def. I, 50), e quindi i segmenti (AX'_∞), $(A'Y'_\infty)$ saranno situati nella parte opposta (coroll. II, teor. II, 50). Per ipotesi si ha:

$$X_\infty \widehat{AA'} \equiv Y'_\infty \widehat{A'A}.$$

---

stessa parte rispetto alla retta AA' (def. I, 50 e nota XLVIII), oppure sono situati da parti opposte. Nel primo caso i raggi AA_1, $A'A'_1$ sono dello stesso verso rispetto alla retta AA' (def.). I segmenti (AA'), $(A_1A'_1)$ non possono avere alcun punto comune, altrimenti i punti A_1 e A'_1 sarebbero da parti opposte rispetto alla retta AA' (coroll. III, teor. II, 50 e XLVIII), e quindi, come si vede facilmente, A e A' sono essi pure dalla stessa parte della retta $A_1A'_1$; dunque i raggi A_1A, A'_1A' ed anche i raggi opposti, cioè AA_1, $A'A'_1$, sono dello stesso verso rispetto alla retta $A_1A'_1$. Per conseguenza, raggi paralleli di verso opposto rispetto alla retta AA' sono anche tali rispetto alla retta $A_1A'_1$.

Se invece A_1 e A'_1 sono da parti opposte della retta AA', A e A' lo sono rispetto alla trasversale $A_1A'_1$, e quindi i raggi A_1A, $A'A'_1$ sono dello stesso verso rispetto alla retta AA' e anche rispetto alla retta $A_1A'_1$. Il teorema è dunque dimostrato.

Se r' non è parallela alla retta r si può condurre a questa retta una parallela r'' dal punto A', e si dovrà avere

$$\widehat{X_\infty AA'} \equiv \widehat{X'_\infty A'A}$$

vale a dire vi sarebbero due raggi $(Y'_\infty A')$, $(X'_\infty A')$ che formerebbero lo stesso angolo col raggio $A'A$ intorno ad A' e nella stessa parte di piano rispetto alla retta AA' a partire dal raggio $A'A$, ciò che non può essere essendo il fascio di raggi un sistema semplicemente chiuso e per di più identico nella posizione delle sue parti (teor. I, def. I, 30 e teor. III, 47). Dunque le due rette r e r' devono essere parallele, e perciò i punti X_∞ e Y_∞, X'_∞ e Y'_∞ devono coincidere LI).

53. *Teor. I. Una retta che si appoggia ai lati di una striscia piana la divide in due parti uguali.*

LI) Le dimostrazioni dei teor. I, II e III si possono rendere facilmente indipendenti dai punti all'infinito, usando altri punti, mentre facendo uso del punto improprio all'infinito (nota XLIV) le dimostrazioni resterebbero le stesse.

Nel solo campo finito non si è ancora dimostrato in queste note che due angoli coi lati paralleli dello stesso verso sono uguali, ciò che risulta facilmente dalla considerazione dell'infinito (teor. I, 40).

Questo teorema per angoli situati in un piano risulta dal teor. II. La dimostrazione si può dare nel seguente modo:

Siano $\widehat{BAC}$, $\widehat{B'A'C'}$ i due angoli e sia $(AB) \# (A'B')$, $(AA_1) \# (A'A'_1)$, e si congiunga A con A'; si ha:

$$\widehat{BAA'} \equiv \widehat{B'A'D'}; \quad \widehat{CAA'} \equiv \widehat{C'A'D'} \qquad \text{(teor. II)}$$

ma

$$\widehat{BAA'} \equiv \widehat{BAC} + \widehat{CAA'}; \quad \widehat{B'A'D'} \equiv \widehat{B'A'C'} + \widehat{C'A'D'}$$

dunque

$$\widehat{BAC} \equiv \widehat{B'A'C'} \quad \text{(nota XLVI e int. } g^{\text{IV}}, 73) \text{ (fig. 46).}$$

Per dimostrare questo teorema in generale basta dimostrarlo nello spazio a tre dimensioni (vedi libro III), perchè due piani paralleli come sono $A'B'C'$, ABC sono sempre contenuti, come vedremo, in uno spazio a tre dimensioni. E siccome nelle note contrassegnate dai numeri romani ci limitiamo al solo piano, così diamo qui la dimostrazione che bisognerebbe dare invece dopo la costruzione dello spazio suddetto.

fig 46

Data dunque la costruzione di questo spazio e definito il parallelismo di due piani si dimostra facilmente:

1.° che due piani paralleli sono tagliati da un terzo piano in rette parallele, mentre due rette parallele sono situate in un piano (coroll. IV, teor. V, 46 e nota XLV).

2.° che segmenti paralleli compresi fra piani paralleli sono uguali.

Poi si dà la seguente dimostrazione.

La rette AB, $A'B'$; AC, $A'C'$ sono situate rispettivamente in un piano (1°), ed essendo $(AA_1) \equiv (A'A'_1)$, si ha $(A_1A'_1) \# (AA')$. Il piano $A_1A'_1\,B$ taglia il piano $A'B'C'$ secondo la retta A'_1B', la quale è parallela alla retta A_1B (1°). Immaginando condotto per AA' un piano parallelo al piano $A_1BA'_1$, si ha $(AB) \equiv (A'B')$ (2°), e perciò $(BB') \# (A_1A'_1)$ (coroll. I, teor. II, 43 e nota XXXVIII) da cui $(A_1B) \equiv (A'_1B')$. Inoltre, i triangoli ABA_1, $A'B'A'_1$ sono uguali per avere i tre lati uguali (teor. III, 17 e nota XII), e perciò i loro angoli corrispondenti $\widehat{BAC}$, $\widehat{B'A'C'}$ sono uguali, come si voleva dimostrare (fig. 46).

Valendo il teor. suddetto nel piano colla stessa dimostrazione si può dare qui il teor. VI del n. 47.

Siano r e r' i lati della striscia che debbono essere paralleli (def. III, 47), e sia AA' la traversale che li incontra nei punti A e A'.

Per dimostrare che le due parti $X'_\infty AA'X'_\infty$, $X_\infty A'AX_\infty$ sono identiche, stabiliamo che siano corrispondenti quei punti che sono allineati col punto medio R di (AA'), e sono simmetrici rispetto ad R (def. II, 35). Scelti due punti B e C' sui segmenti (AX'_∞), $(A'X'_\infty)$, i punti corrispondenti B' e C sono situati sui segmenti $(A'X_\infty)$ e (AX_∞) (teor. II, 43), e tali che si ha $(B'C) \# (BC')$ (coroll. I, teor. I, 43). Scelti due altri punti X e Y della prima parte, i punti X' e Y' corrispondenti sono ad ugual distanza da R sui raggi opposti di RX e di RY, e quindi i due triangoli RXY, $RX'Y'$ sono uguali per avere i due lati e l'angolo compreso uguale, e perciò $(XY) \equiv (X'Y')$; dunque le due figure sono uguali (teor. III, 15) (fig. 47).

fig. 47

Def. I. Le due parti della striscia in cui viene divisa da una retta le diremo *opposte* rispetto alla retta.

Teor. II. Se dagli estremi A e A' di un segmento si conducono due raggi in una delle parti del piano determinate dalla retta del segmento, in modo che la somma degli angoli che essi formano col segmento (AA') sia minore di due retti, i due raggi si incontrano in un punto. Se la somma degli angoli è maggiore di due retti, si incontrano i loro prolungamenti nella parte opposta del piano rispetto alla retta AA'.

Indicando con Y_∞ e Y'_∞ i punti all'infinito della retta AA', e conducendo per A e A' due rette parallele r e r', il piano viene diviso dalle tre rette r e r' e AA' in sei parti, due a due uguali, cioè:

$$\widehat{Y_\infty A'X_\infty} \equiv \widehat{Y'_\infty AX'_\infty}, \quad \widehat{Y_\infty A'X'_\infty} \equiv \widehat{Y'_\infty AX_\infty} \qquad \text{(teor. I, 52)}$$

$$X_\infty AA'X_\infty \equiv X'_\infty A'AX'_\infty \qquad \text{(teor. I)}.$$

Una retta s del piano passante pel punto A è situata per metà nelle due parti del piano separate dalla retta AA' (coroll. II, teor. II, 50), cioè nelle due parti:

$$\widehat{Y_\infty A'X_\infty} + X_\infty A'AX_\infty + \widehat{X_\infty AY'_\infty}$$

$$\widehat{Y'_\infty AX'_\infty} + X'_\infty AA'X'_\infty + \widehat{X'_\infty A'Y_\infty}.$$

Se una metà della retta s è contenuta nell'angolo $X'_\infty AY'_\infty$, l'altra metà è situata nell'angolo opposto $\widehat{X_\infty AY_\infty}$. Essa incontra la retta r' nel segmento $(A'X_\infty)$, situato entro questo angolo, perchè esso può essere generato congiungendo il punto A coi punti di questo segmento (coroll. IV, teor. II, 50). L'altra metà della retta s non può certo incontrare la retta r' (teor. II, 30 e conv. 28).

Se la retta s è per metà situata nel settore angolare $Y'_\infty AX_\infty$, l'altra metà incontra per la stessa ragione la retta r' in un punto del segmento $(A'X'_\infty)$. Nel primo caso, essendo l'angolo formato dal segmento (AA') con la parte di s compresa nel settore angolare $X_\infty AY_\infty$ minore di questo angolo, dà con l'angolo $X_\infty A'Y'_\infty$ una somma minore di due retti, perchè si ha:

$$X_\infty AY_\infty + X_\infty A'Y'_\infty = \pi \qquad \text{(teor. II, 52)}$$

Nel secondo caso, l'angolo formato dal segmento (AA') col raggio di s compreso nel settore $Y'_\infty AX_\infty$ dà coll'angolo $X_\infty A'Y'_\infty$ una somma maggiore di due retti. Il teorema è dunque pienamente dimostrato, ritenendo che uno dei raggi sia precisamente $(A'X_\infty)$ situato sulla retta r' LII).

§ 12.

Segmenti e distanze di un punto dai punti di una retta. Distanza di due rette parallele.

54. *Teor. I. In ogni triangolo rettangolo gli angoli opposti ai cateti sono acuti.*

Sia ABC il triangolo rettangolo. Da A si conduca la perpendicolare AX alla retta AB (coroll. I, teor. V, 47), ed X sia un punto situato dalla stessa parte di C rispetto alla retta AB. Essendo BC parallela ad AX, i punti B e C sono situati dalla stessa parte rispetto alla retta AX (teor. I, 50). Sia inoltre Y un punto della retta AB dalla stessa parte di A rispetto a B.

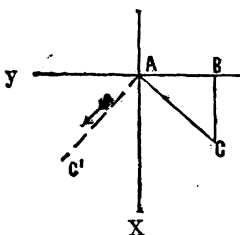



fig. 48

Se l'angolo $\widehat{BAC}$ fosse ottuso, il raggio AC dovrebbe essere contenuto a partire da A nel settore YAX, vale a dire si potrebbe scegliere su di esso un punto C' da parte opposta di C rispetto alla retta AX; e prolungato il raggio AC dalla parte opposta di A esso dovrebbe essere contenuto nel settore retto opposto a BAX e non nel settore adiacente. Dunque il segmento $(C'C)$ dovrebbe incontrare la retta AX in un punto diverso da A (coroll. III, teor. I, 50) e le due rette AX e AC avrebbero due punti comuni, ciò che non è possibile (teor. II, 30 e conv. 28).

Non può essere nemmeno che $\widehat{BAC}$ sia retto, perchè dal punto C si potrebbero condurre due perpendicolari alla retta AB, ciò che è pure assurdo (coroll. I, teor. V, 47) (fig. 48) LIII).

Def. I. Per *segmento normale* condotto da un punto R ad una retta r intenderemo quello determinato sulla perpendicolare passante per R alla retta r da R fino al suo punto d'incontro (*piede*) colla retta stessa.

Per *segmento obliquo* intenderemo ogni altro segmento determinato da un punto della retta r col punto R.

Teor. II. Il segmento normale di un punto da una retta è minore di ogni segmento obliquo.

Siano r la retta ed R il punto dati, (RM) il segmento normale, (RA) un seg-

---

LII) Nel campo finito basta usare altri punti invece dei punti all'infinito per la dimostrazione dei teor. I e II.

LIII) La dimostrazione del teorema I rimane tale e quale riferendosi agli stessi teoremi e all'ass. II', o usando l'ass. II anche al teor. III della nota XLIV e al teor. I, 14.

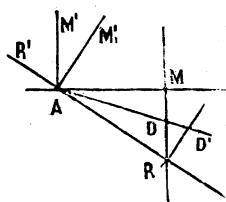



fig. 49

mento obliquo. Non può essere intanto $(RA) \equiv (RM)$, perchè il triangolo ARM sarebbe isoscele (def. III, 9) e congiungendo il punto di mezzo di (AM) con R si avrebbe un altra perpendicolare condotta da R alla retta r (teor. IV, 42), il che è assurdo (coroll. I, teor. V, 47).

Sia AD una retta che incontra (RM) in un punto D interno, e prolunghiamo il segmento (RA) in AR', e conduciamo da A i raggi perpendicolari AM', AM'_1 rispettivamente alle rette AM e AD, dalla stessa parte del segmento (AD) rispetto alla retta AR (def. II, 50). Siccome l'angolo MAR è acuto (teor. I), i due raggi AM' e AM'_1 sono contenuti nel settore angolare ottuso $\widehat{R'AM}$; dunque il raggio AM è contenuto nel settore angolare $\widehat{M'_1AD}$. Ma è $\widehat{R'AM} < \widehat{R'AD}$, perchè $\widehat{RAD} < \widehat{RAM}$ e $\widehat{R'AM} + \widehat{MAR} \equiv \widehat{R'AD} + \widehat{DAR} \equiv \pi$; vale a dire il raggio AM' è contenuto nel settore angolare $\widehat{R'AM'_1}$.

Conduciamo ora da R il segmento normale (RD') alla retta AD. Poichè AM', RM; AM'_1, RD' sono parallele (coroll. II, teor. V, 47), si ha:

$$\widehat{R'AM'_1} \equiv \widehat{ARD'}, \quad \widehat{R'AM'} \equiv \widehat{ARM} \qquad \text{(teor. I, 40 o II, 52)}$$

e quindi (RM) è contenuto nel settore angolare $\widehat{ARD'}$, dunque il punto D' è fuori del segmento (AD) (coroll. IV, teor. II, 50). Ora, se (RM) fosse maggiore di (AR), nel segmento (RM) vi sarebbe un punto D tale che $(RD) \equiv (AR)$ (teor. I, 8; int., def. I, 61 e b, 73), e perciò essendo isoscele il triangolo ARD, il punto medio di (AD) congiunto con R ci darebbe un'altra perpendicolare passante per R alla retta AD, il che è assurdo (coroll. I, teor. V, 47). Dunque ecc. (fig. 49).

Coroll. L' ipotenusa di un triangolo rettangolo è maggiore di ciascuno dei suoi cateti.

Teor. III. I segmenti obliqui da un punto ai punti di una retta, equidistanti dal piede della perpendicolare del punto alla retta, sono uguali.

Siano A e r il punto e la retta dati, (AM) il segmento normale alla retta r, (AB), (AC) due segmenti obliqui, pei quali B e C sono equidistanti da M. I triangoli BMA, CMA sono uguali per avere due lati e l'angolo compreso uguali, cioè (MA) comune, $(BM) \equiv (CM)$, $\widehat{BMA} \equiv \widehat{CMA}$ (teor. IV, 42) dunque $(AB) \equiv (AC)$ (teor. II, 42), come volevasi dimostrare (fig. 26).

Def. II. Il segmento (BM) compreso fra il piede M del segmento normale (AM) e il punto B sulla retta r di un segmento obliquo (AB) si chiama *proiezione ortogonale* o semplicemente *proiezione* del segmento (AB) sulla retta r.

Teor. IV. Le proiezioni di due segmenti obliqui uguali sono uguali.

Siano (AB) e (AC) i segmenti obliqui uguali; (BM), (CM) le loro proiezioni (def. III). Se B e C non sono equidistanti da M, sia $(MC_1) \equiv (MB)$ (coroll. I, teor. III, 4); il punto C_1 sarà dalla stessa parte di C da M. Si ha pure:

$$(AB) \equiv (AC_1) \qquad \text{(teor. III)}$$

e perciò essendo il triangolo CC_1A isoscele (def. III, 9), mentre C e C_1 sono dalla stessa parte di M, vi sarebbe un altra perpendicolare passante per A alla retta BC, il che è assurdo (coroll. I, teor. V, 47) (fig. 26).

Teor. V. Se due punti R e R' hanno la medesima distanza rispettivamente

da due rette r e r', i segmenti che essi determinano due a due coi punti di queste rette sono due a due uguali, e le figure così ottenute sono uguali.

Si stabilisca una corrispondenza d'identità fra le due rette r e r' nella quale siano corrispondenti i piedi M e M' delle normali condotte da R e R' alle rette r e r' (teor. VI, 15). Se A e A' sono due altri punti corrispondenti sulle due rette r ed r', i due triangoli rettangoli RAM, $R'A'M'$ sono uguali per avere i cateti uguali (teor. IV e I, 47), dunque $(AR) \equiv (A'R')$.

Dati due punti X e Y della figura (Rr), e se A e B sono i punti d'intersezione delle rette RX e RY colla retta r, i punti X' e Y' corrispondenti di X e Y sono situati sui raggi $R'A'$, $R'B'$ corrispondenti a distanze da R' e A', R' e B' uguali a quelle dei punti corispondenti, e poichè si ha:

$$\widehat{ARB} \equiv \widehat{A'R'B'}$$

si ha pure $\qquad (XY) \equiv (X'Y') \qquad$ (teor. II, 42).

Dunque le due figure (Rr) e $(R'r')$ sono identiche (teor. III, 15).

Coroll. I. Se due punti hanno la stessa distanza da una retta, le due figure da essi determinate colla retta sono uguali.

Coroll. II. Se due punti giacciono in una perpendicolare ad una retta nel piano e alla medesima distanza da essa, i segmenti che essi determinano con ogni punto della retta sono uguali.

Teor. VI. I punti di una retta hanno la medesima distanza da una retta ad essa parallela.

Siano r e r' due rette parallele e siano (MM_1), $(M'M'_1)$ due segmenti normali alle due rette. La figura $M'M_1\ M'_1M'_1$ è un rettangolo (coroll. II, teor. V, 47 e teor. I, 48), e quindi $(MM_1) \equiv (M'M'_1)$ (teor. I, 44) (fig. 36).

Def. III. La distanza normale di un punto di una retta da una retta parallela si chiama *distanza* delle due rette.

Teor. VII. Se aumenta la proiezione di un segmento obliquo di un punto ad una retta, aumenta anche il segmento stesso; e inversamente.

Siano A il punto e BC la retta dati, (AM) il segmento normale.

Supponiamo infatti che a partire da (AB) la proiezione (MB) aumenti da M verso B. Se il segmento obliquo rimanesse costante, scelti due segmenti uguali (AB), (AB_1), il triangolo BAB_1 essendo isoscele, fra B e B_1 cadrebbe il piede di un'altra perpendicolare condotta da A alla retta MB, ciò che è impossibile (coroll. I, teor. V, 47). Se il segmento (AB_1) fosse minore di (AB), siccome si avrebbe $(AB_1) < (AB) < (AM)$ (teor. II), fra B e M esisterebbe almeno un punto B_2 tale che $(RB_2) \equiv (RB_1)$ (coroll. I, def. I e teor. VII, 13), e quindi essendo isoscele il triangolo B_1AB_2, in (B_1B_2) cadrebbe il piede di un'altra perpendicolare del punto A alla retta MB, il che è assurdo (coroll. I, teor. V, 47). Dunque (RB_1) deve essere maggiore di (AB) (teor. I, 8 e int. *b*, 73).

Se invece aumenta (AB) in un dato verso a partire da M, deve aumentare pure la sua proiezione, perchè se questa diminuisce diminuirebbe per la dimostrazione precedente anche (AB), contro l'ipotesi (fig. 26) LIV).

LIV) Nel campo finito i teor. I, II, III, IV, V e VI si dimostrano nello stesso modo ricorrendo agli stessi teor. indicati nelle dimostrazioni e nelle note relative. Il teor. VI vale per ora nel piano (oss. II, nota XLVI). Il teor. VII si può dimostrare indipendentemente dal teor. VII del n. 13 (che può essere dato più tardi — vedi nota X), come sarà indicato nella nota LVII.

§ 13.

Altre proprietà dei triangoli.

55. *Teor. I. Ogni lato di un triangolo è minore della somma degli altri due.*

Sappiamo già che un lato non può essere uguale alla somma degli altri due (teor. IV, 17); qui avremo una conferma di tale proprietà.

Basta dare la dimostrazione per il lato maggiore, perchè ciascuno dei rimanenti è evidentemente minore della somma degli altri due. Sia ABC il triangolo, (AB) il lato maggiore; e supponiamo che (AB) sia uguale o maggiore della somma degli altri due. In tal caso vi sono nel segmento (AB) due punti C' e C'' (che nel primo caso coincidono) tali che $(AC) \equiv (AC')$, $(BC) \equiv (BC'')$. Se C' cadesse in $(C''B)$ allora si avrebbe $(AB) \equiv (AC') + (C'B)$ e $(C'B) < (C''B)$, e poichè $(C''B) \equiv (BC)$, (AB) sarebbe minore di $(AC) + (BC)$ contro l'ipotesi; dunque C' cade nel segmento (AC'').

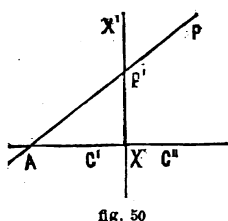



fig. 50

Per un punto X del segmento $(C'C'')$ (e nel primo caso pel punto C' stesso) conduciamo la perpendicolare XX' alla retta AB. In essa non vi è alcun punto il cui segmento con A sia uguale ad (AC') o minore di (AC') (teor. II, 54). Nè può esistere alcun punto P dalla parte opposta di A rispetto alla retta XX' pel quale il segmento (AP) sia uguale o minore di (AC'). Invero indicato con P' il punto d'incontro della retta (AP) con XX', P' è interno al segmento (AP) (coroll. III, teor. II, 50), e siccome $(AP') > (AX)$ (teor. II, 54), a maggior ragione è $(AP') > (AC')$ e $(AP) > (AC)$.

Così dicasi rispetto al punto B e al segmento (BC'') minore od uguale a (BX).

Ora, dato il triangolo ABC, il punto C o dovrebbe giacere sulla perpendicolare XX', o da una parte o dall'altra di questa perpendicolare. Sulla perpendicolare non può essere, come non può essere in nessuna delle parti del piano rispetto ad essa; e quindi è dimostrato che per l'esistenza del triangolo ABC, il lato (AB) deve essere sempre minore della somma degli altri due (fig. 50).

Coroll. Ogni lato di un triangolo è maggiore della differenza degli altri due:

Sia

$$(AB) \geqq (BC) \geqq (CA)$$

Se fosse

$$(CA) < (AB) - (BC)$$

si avrebbe

$$(CA) + (BC) < (AB)$$

ciò che è impossibile. Nè può essere

$$(CA) \equiv (AB) - (BC)$$

perchè sarebbe

$$(CA) + (AB) \equiv (BC)$$

il che è pure assurdo.

Teor. II. Due triangoli rettangoli che hanno un cateto e l'ipotenusa uguali sono uguali.

Se nei due triangoli rettangoli ARM, $A'R'M'$ in M e M', sono uguali i cateti (RM), $(R'M')$ e le ipotenuse (RA) e $(R'A')$, anche (AM) e $(A'M')$ devono essere uguali. Supponiamo che nella corrispondenza d'identità stabilita per la dimostrazione del teor. V del n. precedente, ad A non corrisponda A' ma bensì un'altro punto A'' situato dalla stessa parte di A' rispetto a M'. Si dovrà avere $(RA) \equiv (R'A'') \equiv (R'A')$. Ma è assurdo che sia $(R'A'') \equiv (R'A')$ (coroll. I, teor. V, 47), dunque A'' coincide con A'.

Teor. III. Due triangoli che hanno due lati e l'angolo opposto al maggiore uguali, sono uguali.

Sia SC la retta del terzo lato, (AC) il lato minore, $\widehat{ACS}$ l'angolo opposto al lato maggiore. Sia inoltre S il piede della perpendicolare condotta da A alla retta SC. Il lato dato (AB), maggiore di (AC) che è maggiore di (AS), è a più forte ragione maggiore di (AS) (int. *d*, 61), dunque vi devono essere due segmenti obliqui (AB) e (AB') uguali, i cui punti in SC sono a maggior distanza da S del punto C (teor. VII, 54 e teor. VII, 13). Un solo di questi segmenti è servibile, quello cioè il cui punto B in SC è da parte opposta di C rispetto ad S, nel caso che l'angolo ACS sia acuto; mentre nel caso che sia ottuso bisogna considerare l'altro segmento obliquo. Difatti tanto nell'uno come nell'altro caso l'angolo ACB' è supplementare dell'angolo dato.

Def. Anzichè dire che due triangoli che hanno dati elementi (lati ed angoli) uguali sono uguali, diciamo anche che vi è un solo triangolo che ha gli elementi dati, dimodochè il triangolo rappresenta così tutti i triangoli ad esso uguali.

Teor. IV. Dati due lati e l'angolo opposto al minore di essi, esistono due triangoli disuguali aventi questi elementi, nei quali gli angoli opposti all'altro lato sono supplementari, od un solo triangolo, se il segmento normale al terzo lato del vertice comune ai lati dati, è minore del minore di essi, od uguale.

Sia come prima SC la retta del terzo lato, (AC) il lato maggiore dei due dati, $\widehat{ACS}$ l'angolo opposto al lato minore, ed S il piede della perpendicolare condotta per A alla retta SC. Se il lato opposto all'angolo $\widehat{ACS}$ è maggiore di (AS) vi sono due segmenti obliqui (AB), (AB') uguali a questo lato (teor. VII, 54 e teor. VII, 13). Quello giacente dalla parte di AC rispetto ad AS deve avere il punto B' compreso nel segmento (SC), perchè $(AB') < (AC)$ per dato (teorema VII, 54), e i due triangoli ABC, $AB'C$ soddisfano alle condizioni del teorema. E siccome $\widehat{ABC} \equiv \widehat{AB'S}$, così $\widehat{ABC}$ e $\widehat{AB'C}$ sono supplementari.

Se il lato opposto all'angolo ACS è uguale ad (AS), vi è un solo triangolo; se invece è minore di (AS) non vi è alcun triangolo (def.).

Coroll. Due triangoli che hanno due lati e l'angolo opposto al lato minore uguali, sono uguali se gli angoli opposti all'altro lato sono tutti e due acuti od ottusi.

Perchè nel triangolo ABC l'angolo $\widehat{ABC}$ è acuto, mentre nel secondo $\widehat{AB'C}$ è ottuso.

Teor. V. Se in un triangolo due angoli sono uguali, il triangolo è isoscele.

Sia ABC il triangolo, $\widehat{ABC} \equiv \widehat{ACB}$, e sia inoltre (AM) una mediana del

triangolo (def. III, 42). I due triangoli ABM, ACM hanno il lato comune AM, e i due lati (BM), (CM) uguali, e di più uguali gli angoli opposti al lato comune AM. Tanto nel caso in cui (AM) è maggiore di (BM), o di (CM), quanto in quello nel quale è minore di (BM), o di (CM), i due triangoli sono uguali (teor. III e coroll., teor. IV), e perciò $(AB) \equiv (AC)$, vale a dire il triangolo ABC è isoscele (def. III, 9) (fig. 26).

Oppure anche, seguendo Euclide: se fosse $(AC) < (AB)$, sia (BD) in (BA) uguale ad (AC). I due triangoli CBD, BCA sono uguali per avere il lato comune (BC) e i lati (BD) e (AC) e gli angoli in B e C uguali (teor. II, 42). Dunque $\widehat{BCD}$ che è parte di $\widehat{BCA}$ sarebbe ad esso uguale, il che è assurdo (int. b', 61).

Teor. VI. In ogni triangolo all' angolo maggiore sta opposto il lato maggiore.

Sia ABC il triangolo dato, e sia

$$\widehat{CAB} > \widehat{ABC} \qquad (1)$$

dico che si ha

$$(BC) > (AC)$$

Si conduca (AD) che faccia con (AB) un angolo $\widehat{BAD}$ uguale ad $\widehat{ABC}$ e sia compreso nel settore $\widehat{CAB}$ (int. def. I, 61); ed essendo D il punto d'incontro di AD con BC, D è interno al segmento (BC) (coroll. IV, teor. II, 50). Il triangolo ABD è isoscele, e perciò $(BD) \equiv (AD)$ (teor. V). Ma nel triangolo ACD è $(AC) < (AD) + (DC)$ (teor. I), e quindi

$$(AC) < (BD) + (DC)$$

ossia

$$(AC) < (BC) \qquad \text{(int. } c\text{, 68 e def. II, 61).}$$

Coroll. A lati uguali in un triangolo si oppongono angoli uguali.

Questo corollario è una conseguenza del triangolo isoscele (teor. III, 42), ed è pure una conseguenza del teor. precedente quando si osservi che se gli angoli fossero disuguali i lati dovrebbero essere pure disuguali.

Teor. VII. Vale la proprietà inversa del teor. VI.

Se cioè

$$(BC) > (AC)$$

si deve avere

$$\widehat{CAB} > \widehat{ABD}$$

Se fosse $\widehat{CAB} \equiv \widehat{ABD}$ i lati opposti sarebbero uguali; nè può essere $\widehat{CAB} < \widehat{ABD}$, perchè il lato (BC) opposto al primo dovrebbe essere minore del lato (AC) opposto al secondo (teor. VI), contro l'ipotesi.

Teor. VIII. In due triangoli aventi due lati uguali, il terzo lato è maggiore in quello nel quale gli sta opposto l'angolo maggiore, e reciprocamente.

Se i due triangoli non avessero un lato comune potremmo sempre immaginare nel piano di uno di essi un triangolo uguale all'altro con un lato comune. Difatti siano ABC, $A'B'C'$ i due triangoli e sia:

$$(AB) \equiv (A'B'), \quad (BC) \equiv (B'C'), \quad \widehat{ABC} > \widehat{A'B'C'}$$

Indicando i due angoli $\widehat{ABC}$, $\widehat{A'B'C'}$ con β e β' si ha:

$$\beta > \beta.$$

Nel piano del triangolo ABC immaginiamo un raggio limitato in B, che formi col segmento (AB) l'angolo β' a partire dal segmento (AB) intorno al punto B nel verso dell'angolo $\widehat{ABC}$ (teor. II, 47). Il raggio così determinato giace evidentemente nel settore angolare $\widehat{ABC}$, essendo $\beta > \beta'$.

Sia D il punto d'incontro di questo raggio con (AC), che deve essere interno al lato (AC) stesso (coroll. IV, teor. II, 50). Consideriamo sul raggio BD il segmento $(BC'') \equiv (BC) \equiv (B'C')$; il triangolo ABC'' giace nel piano del triangolo ABC (coroll. II, teor. V, 46) ed è uguale al triangolo $A'B'C'$ per avere con esso due lati e l'angolo compreso uguali (teor. II, 42), e quindi $(AC'') \equiv (A'C')$.

Il punto C'' o cade nel punto D stesso, o sul prolungamento (BD), oppure entro di questo segmento.

fig. 51

Nel 1° caso la dimostrazione del teor. è subito data, perchè giacendo D entro il lato (AC) si ha:

$$(AD) \equiv (AC'') \equiv (A'C') < (AC). \quad \text{(int. def. I, 61)}$$

Nel 2° caso congiungiamo C'' con A e C. Il segmento (BC') giace nel settore angolare $\widehat{CC''A}$, perchè il punto D giace nell'interno di (AC); e d'altra parte il segmento (AC) giace nel settore BCC'', essendo il punto D un punto del segmento $(C''B)$, quindi nel triangolo $CC''A$ l'angolo $\widehat{ACC'}$ è minore di $\widehat{BCC'}$.

Il triangolo $C''BC$ è isoscele per essere $(BC'') \equiv (BC)$; dunque

$$\widehat{CC''B} \equiv \widehat{BCC''} \quad \text{(teor. IV, 42)}.$$

Ma $\widehat{CC'B}$ è parte dell'angolo $\widehat{CC''A}$, quindi a maggior ragione è

$$\widehat{ACC''} < \widehat{CC''A}$$

da cui

$$(AC'') < (AC) \quad \text{(teor. VI)}$$

e quindi

$$(A'C') < (AC).$$

Nel 3° caso i segmenti (AC''), (CC'') sono interni ai settori angolari $\widehat{CAB}$, $\widehat{BCA}$, perchè C' è interno al triangolo ABC (coroll. I, teor. I, def. I, 51) e quindi

$$\widehat{BCC''} < \widehat{BCA}.$$

Ma dal triangolo isoscele BCC'' si ha:

$$\widehat{BCC''} \equiv \widehat{CC''B}$$

Essendo E un punto del prolungamento di (BC) da B a C, gli angoli $\widehat{DC''C}$ e $\widehat{C''CE}$ sono supplementari degli angoli $\widehat{BCC''}$, $\widehat{CC''B}$, dunque

$$\widehat{DC''C} \equiv \widehat{C''CE}$$

Ma

$$\widehat{C''CA} > \widehat{C''CE}$$

dunque

$$\widehat{DC''C} > \widehat{C''CA} \quad \text{(int. } d\text{, 61)}.$$

L'angolo $\widehat{DC''C}$ è parte di $\widehat{AC''C}$, dunque nel triangolo $AC''C$ si ha:

$$\widehat{AC''C} > \widehat{C''CA}$$

da cui

$$(AC) > (AC'') \qquad \text{(teor. VI)}$$

ossia

$$(AC) > (A'C') \qquad \text{(int. def. II, 61).}$$

Inversamente, se si ha $(AC) > (A'C')$, vale a dire $(AC) > (AC'')$, gli angoli opposti a questi lati non possono essere uguali, perchè per ciò che precede, sarebbe $(AC) \equiv (A'C')$; dunque deve essere:

$$\widehat{ABC} > \widehat{A'B'C'} \qquad \text{(fig. 51).}$$

Teor. IX. In una delle parti in cui il piano è diviso da una sua retta non possono esistere due triangoli uguali aventi un lato comune sulla retta data.

Siano ABC, ABC' due triangoli coi vertici C e C' situati dalla stessa parte della retta AB. Gli angoli $\widehat{CAB}$, $\widehat{C'AB}$ sono per ipotesi uguali, e sono anche del medesimo verso a partire da AB. Ma il raggio AC' non può essere compreso nel settore $\widehat{CAB}$, come il raggio AC non può essere compreso nel settore $\widehat{C'AB}$, essendo il fascio di raggi semplicemente chiuso (teor. I, 30 e int. *b*, 36). Dunque $C'A$ dovrà coincidere con CA. Analogamente $C'B$ dovrà coincidere con CB, e quindi C' con C, perchè altrimenti AC e BC avrebbero due punti comuni, situati per di più dalla stessa parte di AB (teor. II, 30 e conv. 28).

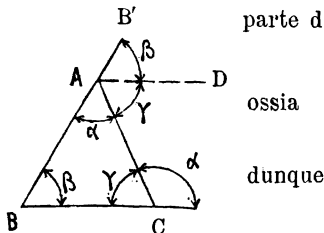
Teor. X. Due triangoli aventi un lato e gli angoli adiacenti ad esso uguali sono uguali.

Siano ABC, $A_1B_1C_1$ i due triangoli, e sia $(AB) \equiv (A_1B_1)$, $\widehat{CAB} \equiv \widehat{C_1A_1B_1}$, $\widehat{CBA} \equiv \widehat{C_1B_1A_1}$. Le metà del piano rispetto alle due rette AB e A_1B_1 ove giacciono i due triangoli sono uguali (coroll. I, teor. II, 50), e quindi si può stabilire in esse una corrispondenza d'identità in modo che ad A corrisponda A_1, B a B_1. Ad un raggio qualunque AX passante per A corrisponde un raggio A_1X_1 passante per A_1, i quali raggi devono formare coi raggi corrispondenti AB, A_1B_1 angoli uguali. Così pei raggi passanti per B e B_1. I raggi perpendicolari, condotti pei punti di mezzo M e M_1 di (AB) e (A_1B_1) a questi segmenti stessi, si corrispondono fra loro, e la corrispondenza dei raggi intorno ad A e A_1, così pure quella intorno a B e B_1, si stabilisce per es. mediante i segmenti uguali presi sui raggi perpendicolari a partire da M e M_1.

Supponiamo che al raggio C_1A_1 non corrisponda il raggio CA, ma un raggio $C'A$; questo deve formare con AB un angolo $C'AB$ uguale all'angolo $C_1A_1B_1$, e quindi anche all'angolo $\widehat{CAB}$. Ma ciò non è possibile, se non quando $C'A$ coincide con CA. Analogamente il raggio corrispondente a C_1B_1 deve coincidere con CB.

Al punto C d'incontro dei due raggi AC, BC corrisponde il punto C_1 d'incontro dei due raggi corrispondenti A_1C_1, B_1C_1. Difatti se (AC) non fosse uguale ad (A_1C_1), vi sarebbe in (AC) un punto C' differente da C tale che $(AC') \equiv (AC)$. Ma C' unito con B darebbe il raggio corrispondente a B_1C_1 che coincide con BC; bisognerebbe dunque che AC e BC si incontrassero in due punti C e C' dalla stessa parte di AB, il che è assurdo (teor. II, 30 e conv. 28).

Teor. XI. La somma degli angoli di un triangolo è uguale alla somma di due angoli retti.

Sia ABC il triangolo e AD la parallela condotta da A al lato BC. La retta AD non può essere situata nel settore angolare BAC altrimenti incontrebbe (BC) in un punto interno (coroll. IV, teor. II, 50), e prolungando BA dalla parte di A rispetto a B in AB', si ha:

$$\widehat{B'AD} \equiv \widehat{ABC},\ \widehat{DAC} \equiv \widehat{ACB} \quad \text{(teor. I, 52)}$$

ossia

$$\widehat{B'AD} + \widehat{DAC} + \widehat{CAB} \equiv \pi \quad \text{(conv. 52)}$$

dunque

$$\widehat{ABC} + \widehat{BCA} + \widehat{CAB} \equiv \pi. \quad \text{(fig. 52).}$$

fig 52

Coroll. Un angolo esterno di un triangolo è maggiore di ciascuno degli interni opposti LV).

LV) Il teor. I si dimostra nello stesso modo. Esso viene dato come assioma da Legendre, o viene dimostrato col teorema che un angolo esterno di un triangolo è maggiore di ciascun angolo interno opposto (Euclide) o colla proprietà che la somma degli angoli di un triangolo è uguale a due retti (ad es. De Paolis).

Si dimostra facilmente che la somma delle distanze di un punto interno al triangolo da due vertici di un lato è minore della somma degli altri due lati,

Questo teorema serve a dare un'altra dimostrazione del teor. VII del n. precedente, dal quale non dipende la dimostrazione del teor. I di questo numero. Dato il punto R e la retta r, si scelga nella perpendicolare RM un punto R' tale che $(RM) \equiv (MR')$. Dati due punti A e A_1 dalla stessa parte di M si ha:

$$(RA_1) \equiv (R'A_1);\ (RA) \equiv (R'A) \quad \text{(coroll. II, teor. V, 54)}$$

e supposto $(MA) < (MA_1)$, A è interno al triangolo $R'A_1R$. (teor. I e def. I, 51) e quindi $2(R'A) < 2(R'A_1)$, ossia $(R'A) < (R'A_1)$. Così non si fa uso del teor. VII del n. 13.

Il teor. II si dimostra nello stesso modo, ma finora vale pei soli triangoli rettangoli di un medesimo piano, perchè non si sa ancora se angoli retti di piani diversi siano uguali. (Vedi oss. III, nota XLVI).

Non volendo far uso qui del teor. VII del n. 13 (vedi nota X) bisogna posporre la dimostrazione dei teor. III e IV dopo le considerazioni sui punti d'intersezione di una retta con una circonferenza. Pel teor. V in questo caso bisogna dare la 2ª dimostrazione, e le stesse dimostrazioni per i teor. VII e VIII e così pei teor. rimanennenti IX, X e XI. Quest'ultimo teor. come si vedrà, è caratteristico pel sistema Euclideo. (Vedi cap. II e III e n. 27 e 28).

Legendre dimostra il teor. VI facendo uso del teor. I come assioma. Altri ad es. Euclide, Baltzer, Sannia e D'Ovidio, Faifofer, De Paolis ecc. dimostrano prima il teorema inverso, appoggiandosi sulla proprietà data dal coroll. del teor. XI, la quale viene dimostrata da Euclide indipendentemente dal teor. XI (prop. XVI, Lib. I), che vale, come dissi, nel sistema Euclideo. Le nostre dimostrazioni dei teor. I-X sono indipendenti da tale proprietà, e valgono quindi anche negli altri sistemi.

Non è poi a credere che la dim. di Euclide sia indipendente del tutto dal postulato delle parallele; la dim. della prop. XVI del libro 1° dovrebbe essere più accurata e tanto più in quei trattati nei quali questa proposizione precede il postulato delle parallele. Nella figura relativa a questa proposizione (vedi trad. di Betti e Brioschi) non basta che il punto F sia interno al settore angolare ABD per concludere che il raggio CF è interno al settore angolare ACD. Nel caso della 2ª forma Riemanniana in cui pure due rette del piano si incontrano in un solo punto (30), può darsi invece che il raggio CF cada fuori dell'angolo suddetto, e quindi l'angolo ACF sia maggiore dell'angolo ACD, e bisogna quindi dire perchè ciò non accade cogli assiomi premessi.

È da osservare inoltre che finora il teorema VIII si riferisce a triangoli del medesimo piano, mentre nel testo riguarda anche triangoli di piani diversi.

§ 14.

Figure simmetriche rispetto ad una retta XLVI).

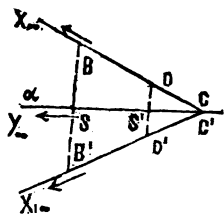
56. *Def. I.* Due punti B, B' situati in una perpendicolare ad una retta α nel piano si dicono *simmetrici rispetto alla retta* α, se hanno la stessa distanza dalla retta α (def. I, 54) che si chiama *asse di simmetria.*

Indicando con S il punto d'incontro della perpendicolare BB' colla retta α, B e B' sono simmetrici rispetto al punto S (def. II, 35).

E in generale due figure si dicono *simmetriche rispetto alla retta* α, se i punti corrispondenti A e A', B e B', C e C' ecc. di esse sono simmetrici rispetto alla retta α (fig. 53).

fig. 53

Coroll. Le parti in cui il piano viene diviso da una sua retta sono simmetriche rispetto alla retta i cui punti sono simmetrici di sè stessi (def. II, 50).

Teor. I. Un segmento rettilineo ha per figura simmetrica rispetto ad una retta un altro segmento uguale al primo. Le rette dei due segmenti si incontrano in un punto dell'asse di simmetria, e formano con esso il medesimo angolo.

Difatti sia dato un segmento (CB), e si consideri il segmento $(C'B')$ che unisce i due punti simmetrici C' e B' di C e B rispetto alla retta α. Se il punto C è in α, C' coincide con esso (def. I), sia S il punto d'intersezione di (BB') con α I due triangoli SBC, $SB'C_1$ sono uguali, perchè hanno il lato (SC) comune, $(BS) \equiv (B'S)$, e gli angoli in S retti (teor. IV e I, 47 e teor. II, 42).

Se sul segmento (BC) è dato un punto D, e si conduce da D la normale alla retta α, che incontra $(B'C')$ in un punto D', D' è il punto simmetrico di D. Invero, se S' è il punto d'intersezione della retta DD' con α, i due triangoli $DS'C$, $D'S'C$ sono uguali, perchè hanno il lato $(S'C)$ comune, gli angoli in S' retti, e gli angoli in C uguali, essendo $\widehat{SCB} \equiv \widehat{SCB'}$; quindi $(DS') \equiv (D'S')$ (teor. X, 55).

Dai due triangoli $DS'C$, $D'SC'$ si ha:

$$(DC) \equiv (D'C')$$

e perciò

$$(BD) \equiv (B'D') \qquad (\text{int. } g''', g^{\text{IV}}, 73)$$

dunque il segmento (BD) ha per simmetrico il segmento $(B'D')$ uguale ad esso, e le rette BD e $B'D'$ si incontrano in un punto C dell'asse di simmetria formando con esso angoli uguali (fig. 53).

Teor. II. Due figure simmetriche rispetto ad una retta sono uguali.

Difatti stabilita la corrispondenza fra i loro punti simmetrici, ad una coppia di punti qualunque di ciascuna di esse corrisponde una coppia di punti dell'altra colla medesima distanza (teor. III, 15).

XLVI) Questo paragrafo va trattato nello stesso modo.

§ 15.

Circonferenza e cerchio — Archi di circonferenza — Corrispondenza fra gli archi e gli angoli e i segmenti della retta all'infinito LVII).

57. *Def. I.* I punti dei raggi di un fascio ad una distanza data dal centro determinano un sistema ad una dimensione i cui versi sono dati da quelli del fascio generatore, che chiamasi *circonferenza* di cui il punto R è il *centro,* e il segmento o la distanza data è il *raggio.*

Coroll. I. La circonferenza è un sistema ad una dimensione semplicemente chiuso.

In ogni raggio del fascio vi è punto della circonferenza e per la definizione stessa ogni punto della circonferenza è situato in un raggio del fascio, mentre questo è un sistema semplicemente chiuso ad una dimensione rispetto al raggio come elemento (teor. I, 30 e int. def. I, 62, e def. II, 63).

Coroll. II. La retta limite all' infinito del piano è una circonferenza di raggio infinito (conv. 49).

Def. II. Il segmento determinato da due raggi opposti della circonferenza si chiama *diametro.* I due punti della circonferenza situati in un diametro sono i suoi *estremi.*

Def. III. I diametri determinano una parte del piano che si chiama *cerchio.* Il cerchio, eccettuata la circonferenza, si chiama *parte interna* del cerchio. I prolungamenti dei diametri eccettuati gli estremi determinano la parte *esterna* del cerchio.

La circonferenza si chiama anche *periferia* o *contorno* del cerchio.

Oss. 1. Quando non vi sarà luogo ad equivoci per *diametro* intenderemo anche una retta passante pel centro. Spesso colla parola cerchio si indica invece la circonferenza.

Def. IV. Ogni figura del piano i cui punti appartengono al cerchio (def. I, 2) si chiama *interna* al cerchio, altrimenti si chiama *esterna.*

Def. V. Un settore angolare (angolo) del fascio avente il suo centro nel centro della circonferenza si chiama *angolo al centro.*

Def. VI. Un segmento di circonferenza si chiama *segmento circolare* o *arco di circonferenza o di cerchio.*

Due punti della circonferenza determinano due archi che costituiscono la circonferenza (teor. I e int. *c*, 64). Per *arco* di due punti della circonferenza si considera sempre il minore, se non occorre tener conto anche del maggiore, e se essi non sono estremi di un diametro. In questo caso per determinare uno di questi archi bisogna dare un altro punto di esso.

LVII) Non volendo premettere per ragioni didattiche le considerazioni del n. 13, bisognerebbe darle qui, limitandole in modo da poter utilizzare per la retta e per la circonferenza il teor. VII di quel numero. Non occorre dare quindi la def. della linea semplice, basta far rilevare, come vedremo, che per la circonferenza valgono quelle proprietà sulle quali si appoggia la dim. di quel teorema. (Vedi la nota LVIII).

Def. VII. Se un arco di circonferenza si considera soltanto come sostituibile da un altro arco uguale in ogni relazione con altri archi di circonferenza, esso si chiama *lunghezza* dell'arco dato [1]).

Teor. I. Angoli al centro uguali, o di cui l'uno è maggiore dell'altro, determinano sulla circonferenza archi uguali, o di cui l'uno è maggiore dell'altro, e inversamente.

Difatti siano $\widehat{BAC}$, $\widehat{B'AC'}$ i due angoli al centro uguali; B e C, B' e C' i punti della circonferenza. I due triangoli BAC, $B'AC'$ sono uguali per avere due lati e l'angolo compreso uguali (teor. II, 42), quindi nei due archi circolari (BC) e $(B'C')$ determinati dai due angoli si può stabilire una corrispondenza mediante gli angoli uguali in cui si possono scomporre gli angoli $\widehat{BAC}$, $\widehat{B'AC'}$, tale che ai punti B e C corrispondano i punti B' e C', ad un punto X del primo un punto X' del secondo, che abbia distanze dai punti B' e C' uguali a quelle di X da B e C, vale a dire una corrispondenza d'identità fra i due archi, e quindi i due archi (BC) e $(B'C')$ sono uguali (teor. III e coroll. II, teor. II, 15).

Dati invece i due archi uguali (BC), $(B'C')$, i segmenti (BC) e $(B'C')$ sono uguali (teor. II, 15), e perciò sono uguali anche i due triangoli ABC, $A'B'C'$ (teor. III, 17), e quindi anche i due angoli $\widehat{BAC}$, $\widehat{B'AC'}$ (coroll. teor. I, 42, def. I e II, 38).

Ad una parte di angolo al centro corrisponde una parte di un arco della circonferenza, e inversamente (def. I, V e VI); il teorema è dunque dimostrato.

Coroll. I. Le circonferenze di ugual raggio sono uguali.

Difatti il teorema vale anche se i due angoli BAC, $B'AC'$ sono angoli al centro di due circonferenze di ugual raggio.

Teor. II. La circonferenza è un sistema ad una dimensione identico nella posizione delle sue parti, e continuo.

La prima parte deriva immediatamente dal teor. III del n. 47 e dal teor. I.

Per la continuità, osserviamo che dato un arco (BC) qualunque, in esso vi è sempre un punto della circonferenza, perchè tale è la proprietà del fascio generatore (def. I); ed ogni arco (XX') che diventa indefinitamente piccolo (oss. I, 13) determina un punto Y della circonferenza compreso fra X e X', perchè tale proprietà ha anche il fascio di raggi generatore (def. I; teor. III, 47 e def. I, 96 o def. I, 101).

Def. VIII. Il segmento determinato dagli estremi di un arco circolare si chiama *corda* (teor. II, 30 e def. I, 6).

Gli archi determinati dai due estremi diconsi *sottesi* dalla corda determinata dai detti estremi.

Coroll. Un diametro divide la circonferenza in due parti uguali (coroll. II, teor. I, 47).

Teor. III. Ad archi uguali o maggiori della circonferenza o di circonferenze uguali, corrispondono corde uguali o maggiori, e inversamente.

Difatti siano (AB) e $(A'B')$ le due corde di circonferenze uguali di centro R e R', e siano α e α' gli archi corrispondenti e $\alpha \geqq \alpha'$.

1) La lunghezza dell'arco di circonferenza è la grandezza intensiva dell'arco (int. def. II, a e c, 111).

Si ha pure $\widehat{ARB} \geqq \widehat{A'R'B'}$, e siccome i due triangoli ARB, $A'R'B'$ hanno i lati (RA), (RB); $(R'A')$, $(R'B')$ uguali, si ha $(AB) \geqq (A'B')$ (teor. VIII, 55). Se si ha invece $(AB) \geqq (A'B')$ si ricava $\alpha \geqq \alpha'$ LVIII).

58. *Teor. I. La circonferenza è una linea semplice.*

Difatti ad ogni punto della retta all'infinito (conv. 49) corrisponde un punto della circonferenza sul raggio che esso determina, e inversamente; e quando una serie di punti sulla retta all'infinito ha un punto limite X_∞, la serie di raggi corrispondenti del fascio col centro nel centro della circonferenza ha un raggio limite RX, e su di esso si ha un punto X della circonferenza; ma poichè l'arco e la corda diminuiscono indefinitamente coll'angolo (int. def. I, 95; teor. II e teor. III, 57), X è un punto limite della serie corrispondente dei punti della circonferenza (def. II, 10).

E come ogni raggio del fascio è raggio limite di una serie di raggi in uno e nell'altro verso a partire dal raggio dato, tale proprietà ha pure luogo per la ragione suddetta anche pel punto della circonferenza situato sul raggio dato rispetto alle serie di punti di essa situati sui raggi della serie corrispondente del fascio. La circonferenza è dunque una linea semplice (def. I, 13).

Oss. I. Come gli angoli intorno ad un punto R del piano servono alla misura degli archi di una circonferenza qualsiasi avente per centro il punto R (teor, I, 57) così gli archi di circonferenza servono a misurare gli angoli intorno al punto R, indipendentemente dalla grandezza del raggio della circonferenza di centro R (teor. I, 57).

Quindi ai segmenti della retta all'infinito, che ci hanno servito alla misura degli angoli (oss. III, 39 e conv. 49), possiamo sostituire gli archi di una circonferenza qualsiasi col centro nel vertice degli angoli.

Def. I. L'arco di una circonferenza corrispondente ad un'unità angolare (def. II, 40), chiamasi *unità circolare.*

Oss. II. L'unità circolare corrisponde all'unità infinita della retta, come questa all'unità angolare (def. II, 40), in modo che a due segmenti uguali all'infinito corrispondono due archi uguali della circonferenza, e inversamente. Ma la retta all'infinito è finita rispetto all'unità infinita, come il fascio rispetto all'unità corrispondente (conv. 28), dunque anche la circonferenza è finita rispetto all'unità circolare corrispondente.

Def. II. Per *unità circolare fondamentale* o per *unità circolare,* non avendo bisogno di considerarne altre, intenderemo quella rispetto alla quale la circonferenza è finita (oss. II).

Teor. II. Gli estremi di un arco infinitamente piccolo rispetto all'unità circolare hanno una distanza infinitamente piccola.

Difatti ad un arco circolare infinitamente piccolo rispetto all'unità circolare corrisponde un angolo infinitesimo rispetto all'unità angolare (oss. I e teor I, 57) e quindi un segmento rettilineo all'infinito infinitamente piccolo ri-

---

LVIII) Le definizioni e i teoremi di questo numero vanno dati ugualmente colle stesse dimostrazioni, appoggiandosi alle proprietà del fascio dimostrate nelle note XLIV e XLVI.

spetto all'unità delle distanze infinite (teor. III, 39). Ma essendo l'angolo al centro corrispondente infinitamente piccolo rispetto all'unità angolare, gli estremi del segmento circolare devono avere una distanza infinitamente piccola rispetto all'unità delle distanze del campo finito (coroll. I, teor. VIII, 39) LIX).

59. *Teor I. Una retta incontra la circonferenza in due, in uno o in nessun punto, secondochè la sua distanza dal centro è minore, uguale o maggiore del raggio.*

Intanto si osserva che non può avere tre punti ABC in comune colla circonferenza, perchè i triangoli ABR, ACR, BCR isosceli (def. III, 9) determinerebbero tre perpendicolari diverse condotte dal centro R alla retta data, perchè diversi sono per ipotesi i punti di mezzo dei segmenti (AB), (BC) e (AC) (teor. III, 42), ciò che è assurdo (coroll. I, teor. V, 47).

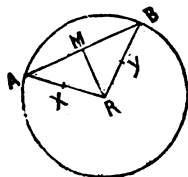



fig 54

Se il segmento normale (RM) alla retta data è minore del raggio, scelto un segmento obliquo (RA') maggiore del raggio, fra (RA')e (RM) vi è un segmento uguale al raggio (teor. VII, 54 e coroll. I, def. I e teor. VII, 13). Un altro segmento obliquo uguale esisterà dall'altra parte di RM (fig. 54).

Se invece (RM) è uguale al raggio non vi è alcun segmento obliquo ad esso uguale (teor. II, 54).

E finalmente se (RM) è maggiore del raggio a maggior ragione non vi è alcun segmento obliquo uguale al raggio. Dunque ecc.

Coroll. I. Una retta, che ha un punto interno al cerchio incontra la periferia di esso in due punti.

Difatti sia P il punto interno, R il centro della circonferenza; (RP) è minore del raggio (def. III, 57). Se (RP) è il segmento normale di R alla retta data, la retta incontra la circonferenza in due punti; se (RP) è un segmento obliquo, il segmento normale essendo minore di esso (teor. II, 54) vale la stessa proprietà.

Def. I. Se la retta incontra la circonferenza in due punti essa si chiama *secante*.

Quando la retta ha un solo punto comune colla circonferenza dicesi *tangente* ad essa, e il punto comune *punto di contatto* della tangente.

Coroll. II. In ogni punto della circonferenza la retta perpendicolare al raggio è tangente in esso alla circonferenza.

Ciò risulta evidentemente dalla dimostrazione del teor. stesso.

Coroll. III. Ogni retta passante per un punto della circonferenza, e che non è tangente ad essa, la incontra in un altro punto.

Sia r una retta qualunque passante per un punto A della circonferenza

---

LIX) Secondo la nota LVIII si può dimostrare il teor. I nello stesso modo, limitando l'oss. I alla prima parte, dando la def. I e tralasciando l'oss. II, la def. II e il teor. II. Non volendo dare in un trattato elementare la def. della linea semplice (def. I, 13) perchè non necessaria, il teor. I dovrebbe esprimere le proprietà di questa linea relativamente alla circonferenza, in base alle quali si può dimostrare sia per la retta come per la circonferenza il teor. VII, 13.

e che non sia nè tangente in A nè coincida col diametro passante per A, il quale incontra già la circonferenza nel punto opposto di A.

Sia (RM) il segmento normale alla retta r, che non può coincidere con (RA), altrimenti la tangente in A e la retta r avendo una normale comune coinciderebbero. contro l'ipotesi (teor. II, 26 e coroll. II, teor. V, 47).

Ma nel triangolo rettangolo AMR in M si ha $(RM) < (RA)$ (coroll. teor. II, 54), dunque la retta r incontra la circonferenza in un altro punto a distanza da M uguale a quella di A da M (teor. I).

Coroll. IV. Tutte le rette equidistanti da un punto del piano sono tangenti ad una circonferenza, i cui punti di contatto sono i piedi delle perpendicolari condotte ad esse dal punto dato, che è il centro della circonferenza.

Teor. II. Una tangente al cerchio giace nella sua parte esterna.

Infatti sia s la tangente, A il suo punto di contatto colla circonferenza di centro R e di raggio r. Sia X il punto d'intersezione di un raggio RB con la retta s (coroll. II, teor. III, 46), essendo B un punto della circonferenza. Si ha sempre $(RB) < (RX)$ (teor. II, 54 e def. III, 57).

Teor. III. La perpendicolare condotta dal centro ad una corda la divide per metà.

Difatti se A e B sono gli estremi della corda, R il centro; il triangolo ARB è isoscele, e la perpendicolare condotta da R alla retta, essendo unica (coroll. I, teor. V. 47), passa pel punto di mezzo di essa (teor. IV, 42).

Coroll. Un diametro divide la circonferenza e il cerchio in due parti simmetriche rispetto al diametro.

Difatti ogni corda perpendicolare al diametro viene divisa da esso per metà (def. I, 56).

Teor. IV. La perpendicolare condotta nel punto di mezzo della corda alla corda stessa passa pel centro.

Sia (AB) la corda. Se il centro C non fosse situato sulla perpendicolare MX condotta pel punto di mezzo M di (AB) ad AB, esso sarebbe situato da una parte o dall'altra di essa, per es. dalla parte di A (def. II, 50). Indicato con Y il punto d'incontro del segmento (BC) colla retta MX (coroll. II, teor. III, 46) i triangoli ACB, AYB sono isosceli, e quindi:

$$\widehat{ABC} \equiv \widehat{BAY} \equiv \widehat{BAC}$$

vale a dire AC deve coincidere con AY (teor. I, 30) e quindi anche C deve coincidere con Y (teor. II, 30).

Oppure: siccome è $(BY) \equiv (AY)$ e $(AC) \equiv (BC)$ si avrebbe nel triangolo AYC $(AY) + (YC) \equiv (AC)$, ciò che è impossibile (teor. IV, 17 o teor. I, 55).

Teor. V. Tre punti non situati in linea retta determinano nel piano di essi una circonferenza, la quale è determinata da tre qualunque dei suoi punti.

Se A,B,C sono i tre punti dati, le perpendicolari nei punti medî di (AB) e (BC) si incontrano sempre in un punto M, nè possono essere parallele, perchè tali dovrebbero essere anche le corde (AB) e (BC) (teor. II, 48), il che non è. I due triangoli AMB, BMC sono isosceli, e perciò M è equidistante dai tre punti dati, vale a dire è il centro di un cerchio che passa pei tre punti.

Ma la perpendicolare condotta nel punto di mezzo della corda (AC) passa

per lo stesso centro M (teor. IV), e d'altra parte immaginando un altro cerchio passante per i tre punti dati, le perpendicolari innalzate nei punti di mezzo delle tre corde (AB), (BC), (AC) si devono incontrare anche nel centro del nuovo cerchio (teor. IV), che è quindi M. (teor. II, 30 e conv. 28).

Evidentemente, scelti altri tre punti $A'B'C'$ della circonferenza, le perpendicolari nei punti di mezzo delle corde $(A'B')$, $(A'C')$ passano per M (teor. IV); dunque il teorema è dimostrato.

Def. II. Un triangolo che ha i suoi vertici sulla circonferenza dicesi *inscritto* alla circonferenza.

Dicesi invece *circoscritto* se i suoi lati sono tangenti alla circonferenza.

Teor. VI. Una corda è interna al cerchio.

Difatti se (AB) è la corda, R il centro; il triangolo ABR è isoscele, e poichè se M è il punto medio di (AB), (MR) è il segmento normale di R alla corda, mentre (RA) e (RB) sono segmenti obliqui, ogni altro segmento obliquo compreso nell'angolo $\widehat{ARB}$, è minore di (RA) e di (RB) (teor. VII, 54), e quindi è interno al cerchio (def. III e IV, 57) (fig. 54).

Teor. VII. Un segmento cogli estremi interni al cerchio o sulla circonferenza è interno al cerchio.

Siano X e Y i due punti: congiungiamoli col centro R. I due raggi (RA), (RB) che essi determinano, e sui quali essi giacciono, sono situati nell'interno del cerchio (def. III, 57). Il triangolo ARB è interno al cerchio imperocchè la parte interna del triangolo è data da uno dei suoi settori angolari, ad es. $\widehat{ARB}$ limitato dal lato opposto (AB) (teor. I e def. I, 51), che è interno anche al cerchio (def. IV, 57), ma il segmento (XY) è interno al triangolo (coroll. III, teor. I, 51), dunque esso è anche interno al cerchio (int. *a*, 13) (fig. 54).

Teor. VIII. Tutti i segmenti che congiungono un punto interno O al cerchio coi punti di esso, contengono tutti i punti della parte interna al cerchio.

Difatti essi sono interni al cerchio (teor. VII), e congiunto il punto O con un altro punto interno si ottiene una corda della circonferenza stessa, che contiene due dei segmenti suddetti (coroll. teor. I).

Coroll. Un triangolo i cui vertici sono sulla circonferenza o interni al cerchio stesso è interno al medesimo.

Sia $A'B'C'$ il triangolo, la parte interna di esso è data dai raggi del settore angolare, ad es. $\widehat{A'B'C'}$ limitato dal lato $(A'C')$, i quali sono tutti interni al cerchio (teor. VII e def. IV, 57).

Teor. IX. Un triangolo rettangolo è inscritto in una circonferenza che ha per diametro l'ipotenusa.

Sia ABC il triangolo rettangolo in A. Dal punto di mezzo M di un cateto, ad es. (AB), conduciamo la parallela all'altro cateto, la quale incontrerà l'ipotenusa nel suo punto di mezzo (coroll. I, teor. IV, 44). Dunque le perpendicolari condotte dai punti di mezzo dei cateti si incontrano nel punto di mezzo dell'ipotenusa, ed il teorema è dimostrato.

Teor. X. La bissettrice dell'angolo di due raggi di un cerchio passa pel punto d'incontro delle due tangenti al cerchio negli estremi di essi.

Siano (CR), $(C'R)$ i due raggi, A, A' i punti d'intersezione della bissettrice del settore angolare $\widehat{CRC'}$ colla circonferenza. Le due semicirconferenze determinate dai punti A, A' sono simmetriche rispetto al diametro AA' (coroll. teor. III). La tangente in C ha per simmetrica la tangente in C'. Ma due rette simmetriche rispetto ad una retta si incontrano in questa retta (teor. I, 56), dunque ecc.

Teor. XI. La distanza di un punto dai punti della circonferenza ha per minimo la distanza del punto dall'estremo ad esso più vicino del diametro passante pel punto dato, e per massimo la distanza dall'altro estremo.

Vi sono due punti della circonferenza pei quali la distanza dal punto dato ha un valore dato compreso fra il massimo e il minimo.

Sia (AB) il diametro passante pel punto dato P, A il punto più vicino e B il più lontano. La circonferenza è simmetrica rispetto alla retta AB (coroll. teor. III), e quindi basta occuparsi delle distanze del punto P dai punti di una delle due semicirconferenze. Non può essere che vi sia un altro punto A_1 tale che sia $(PA) \equiv (PA_1)$, perchè il triangolo PAA_1 sarebbe isoscele, e la retta condotta pel punto di mezzo della corda (AA_1) passando in tal caso pel centro R, le due rette PA_1 e PR avrebbero due punti in comune, il che è assurdo (teor. IV; teor. II, 30 e conv. 28).

fig. 55

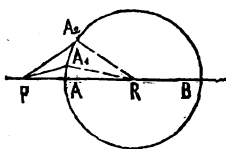
Per la stessa ragione non vi possono essere due punti A_1, A_2 (supposto anche che A_2 coincida con B) tali che sia $(PA_1) \equiv (PA_2)$.

Dato dunque sulla semicirconferenza AA_1B un punto qualunque A_1, che può coincidere anche con A o con B, non vi è nessun altro punto X per il quale sia $(PA_1) \equiv (PX)$. Che essendo γ una distanza compresa fra (PA) e (PB) vi sia un punto X (e per la dimostrazione precedente uno solo) pel quale sia $(PX) = \gamma$ (def. I, 5) risulta dal teor. I, 58 e dal teor. VII del n. 13.

Teor. XII. La tangente in un punto A alla circonferenza è retta limite della secante AX, quando X è un punto della circonferenza ed ha per punto limite in essa il punto A; ed è retta limite della tangente nel punto X.

Se l'arco (AX) diminuisce in un dato verso diminuisce anche la corda corrispondente (teor. III, 57). Se Y è il punto d'intersezione del raggio RX passante per X colla tangente in A, siccome (RA) è normale alla tangente (coroll. II, teor. I), è $(RY) > (RA)$, e quando l'arco (AX) diventa indefinitamente piccolo tale diventa l'angolo ARY, e quindi anche (AY), perchè il fascio può essere generato da R e dalla tangente in A (coroll. II, teor. II, 46). Dunque quando l'arco e la corda diminuiscono indefinitamente, decresce indefinitamente anche la differenza fra $(RX) \equiv (RA)$ e (RY) (ass. IV) vale a dire (XY) diventa indefinitamente piccolo.

Sia inoltre M il punto di mezzo della corda (AX), il raggio RM è la bissettrice dell'angolo ARX (teor. IV, 42); dunque l'angolo ARM diminuisce a più forte ragione indefinitamente col decrescere indefinito dell'angolo ARX e quindi dell'arco (AX). Ma $\widehat{ARM}$ è, come si vede facilmente, uguale all'angolo del raggio AX col raggio della tangente situato dalla stessa parte di AR (teor. VI, 47), dunque l'angolo della secante colla tangente diminuisce indefinita-

mente quando tale proprietà ha pure l'arco (AX); e perciò la prima parte del teorema è dimostrata (def. I, 12).

Similmente si dimostra la stessa proprietà per la tangente in X, osservando che il punto Z d'incontro di essa colla tangente in A è sulla bissettrice dell'angolo ARX, e quindi Z è interno al segmento (AY) (coroll. IV, teor. II, 50), e d'altra parte l'angolo YZX, che è l'angolo delle due tangenti, essendo uguale all'angolo ARX (teor. VI, 47), diventa con esso indefinitamente piccolo.

Oss. I. La proprietà del teor. XII ci dice appunto che la circonferenza è una linea intuitiva perchè soddisfa alle particolarità di queste linee (oss. emp. 36).

Oss. II. Se A' è un punto della circonferenza infinitamente vicino ad A nel verso di (AB), vale a dire se la corda (AA') è infinitamente piccola, essa è nulla rispetto all'unità finita (int. b', 91), e perciò essa, rispetto a questa unità, si confonde con la tangente stessa in A. Una tangente alla circonferenza si può dunque ritenere relativamente all'unità finita come una retta che unisce due punti infinitamente vicini della circonferenza. Se A, A' sono questi due punti nel verso determinato nell'arco infinitesimo (AA'), la retta AA' si dice tangente in A, mentre nel verso opposto è tangente in A'.

Sotto questo aspetto la circonferenza può quindi ritenersi come un poligono di infiniti lati infinitesimi rispetto all'unità finita, e tale che i lati consecutivi formano fra loro un angolo pure infinitesimo. Non si può invece dire che una tangente unisce due punti indefinitamente vicini, perchè la tangente in un punto dato A è una retta costante nelle nostre considerazioni, mentre che di due punti indefinitamente vicini uno almeno è variabile (int, def. I, 95) LXX).

§ 16.

Punti comuni di due circonferenze nel piano. Soluzione di problemi con la retta e il cerchio LXXI).

60. *Teor. I. Se due circonferenze hanno un punto comune ne hanno un altro simmetrico al primo rispetto alla retta che congiunge i due centri* (asse centrale).

Le due circonferenze sono simmetriche rispetto all'asse centrale RR', essendo R e R' i due centri (coroll. teor. III, 59); quindi se hanno un punto comune A, esse hanno pure in comune il punto A' simmetrico di A rispetto alla retta RR'.

Se A cade nell'asse centrale, A' cade in esso, e le due circonferenze hanno in tal caso la tangente in A comune, che è perpendicolare come si sa all'asse centrale (coroll. II, teor. I, 59).

Def. I. Quando le due circonferenze hanno due punti comuni coincidenti

---

LXX) Le proprietà di questo numero, tranne l'oss. II che va tralasciata, vanno trattate nella stessa guisa, riferendosi pei teoremi sui quali si appoggiano le dimostrazioni a quelli delle note relative.

LXXI) A questo paragrafo bisogna aggiungere:

Identità dei fasci e dei piani, perchè in queste note (vedi oss. III, nota XLVI) fu soltanto dimostrata l'identità dei fasci di un piano, ma non quella dei fasci in piani diversi.

situati sull' asse centrale, si dice che esse si *toccano* nel punto A, che è il loro *punto di contatto.*

Se le due circonferenze nel caso suddetto sono dalla stessa parte della tangente comune si dice che esse si toccano *internamente; esternamente* se sono da parti opposte.

Teor. II. Se due cerchi si toccano internamente, quello che ha il raggio maggiore contiene quello di raggio minore.

Difatti siano A e B i due centri, C il punto di contatto. Sia inoltre $(BC) < (AC)$. Essendo B situato sul raggio (AC), il minimo dei segmenti che hanno per estremi il punto B e un punto della circonferenza di centro A, è precisamente (BC), che è il raggio del secondo cerchio; e siccome tutte le corde del primo cerchio passanti per B determinano il cerchio (teor. VIII, 59), ne consegue che il secondo cerchio di centro B e di raggio (BC) è interno al primo cerchio (def. IV, 57).

Teor. III. Se d è la distanza dei centri di due circonferenze di raggi r e r' $(r' \geqq r)$.

1° *se si toccano esternamente si ha* $d = r + r'$;

2° *se si toccano internamente si ha* $d = r' - r$;

3° *se si tagliano si ha* $r + r' > d > r' - r$;

4° *Se non hanno alcun punto comune è* $r' - r > d$ *o* $d > r' + r$.

E inversamente, se la distanza dei centri soddisfa alle relazioni 1, 2, 3 *e* 4, *i cerchi si toccano esternamente, internamente, si tagliano in due punti, ovvero non hanno alcun punto comune.*

Siano C e C' i centri delle due circonferenze, che indicheremo con le lettere stesse dei centri. L'asse centrale CC' taglia la circonferenza C nei due punti A e B. Rispetto alla posizione del punto C' possono darsi tre casi diversi:

1° esso giace nella circonferenza C, per es. in A;

2° esso giace fuori del segmento (AB), per es. dalla stessa parte di A da C;

3° esso è interno al segmento (AB) dalla stessa parte di A da C.

Nel primo caso potrebbe giacere invece in B, come negli altri due casi potrebbe essere dalla stessa parte di B da C; ma si vede chiaramente che questi casi si riducono ai primi tre.

Nel 1° caso si ha $d = r$, e quindi in ogni caso $d < r + r'$. Vi sono due corde passanti per C simmetriche rispetto all' asse centrale uguali al raggio r', purchè sia però $r' \leqq 2r$ (teor. XI, 59), e quindi le due circonferenze hanno due punti comuni che coincidono in B se $r' = 2r$, ossia si toccano *internamente*; e perciò se $r' \leqq 2r$ si ha $d \geqq r' - r$ essendo in tal caso $d = r$.

Nel 2° caso i segmenti di C' dai punti X di una delle due semicirconferenze di C simmetriche rispetto all'asse centrale, crescono dal segmento $(C'A)$ al segmento $(C'B)$, in modo che per una di esse vi è uno ed un solo segmento $(C'X)$ uguale al raggio r', purchè sia:

$$(1) \qquad (C'A) \leqq r' \leqq (C'B) \qquad \text{(teor. XI, 59).}$$

Se $(C'A) < r' < (C'B)$ le due circonferenze hanno due punti comuni simmetrici rispetto all'asse centrale e non coincidenti.

Se invece $r' = (C'A)$, oppure $r' = (C'B)$, esse hanno due punti coincidenti comuni in A o in B. Nel primo di questi casi le due circonferenze sono situate da parte opposte rispetto alla tangente comune, vale a dire si toccano esternamente; nel secondo caso si toccano internamente (def. I).

Nel 3° caso, cioè quando C' è interno al segmento (AC), se le due circonferenze si toccano, esse si toccano internamente, perchè C' è interno al cerchio C.

Nel 2° caso si ha:

$$(C'A) = d - r, \quad (C'B) = d + r$$

e nel 3° caso $(C'A)$ è sempre minore di r', perchè C' è compreso nel segmento (CA) e per ipotesi è $r' > r$.

Nel 2° caso si ha da (1)

$$d - r \leqq r' \leqq d + r \text{ oppure } r + r' \geqq d \geqq r' - r$$

e nel 3° caso

$$r' \leqq d + r$$

e quindi

$$d \geqq r' - r$$

d è in questo caso sempre minore di $r + r'$, essendo d minore di r.

Se i due cerchi non si tagliano nel 1° caso si deve avere:

$$r' > 2r$$

e quindi essendo $d = r$:

$$d < r' - r$$

Nel 2° caso $(C'A) > r'$ oppure $(C'B) < r'$, ossia $d > r' + r$ o $d < r' - r$. Nel 3° caso deve essere $(C'B) < r'$ che ci dà $d < r' - r$.

Per la proprietà reciproca osserviamo che se ha luogo una qualunque delle quattro relazioni 1, 2, 3, 4, essa esclude le altre tre, e quindi se ha luogo una di esse i due cerchi devono essere nella posizione cui corrisponde la relazione data.

Oss. I. Questa dimostrazione si appoggia sul teor. XI del n. 59, sulla proprietà che la circonferenza è una linea semplice (teor. I, 58) e sulle proprietà del triangolo isoscele. Essa è dunque indipendente da quella che un lato del triangolo deve essere maggiore della somma degli altri due, e perciò il teor. III stesso serve a dare un'altra dimostrazione di questa proprietà fondamentale della geometria.

Teor. IV. Da un punto esterno al cerchio si possono condurre ad esso due tangenti.

Sia infatti C' il punto dato, C il centro del cerchio, ed r il suo raggio. Se t è una tangente passante pel punto C' e T è il suo punto di contatto, essa è perpendicolare al raggio CT (coroll. II, teor. I, 59). E se esiste una tangente t ne esiste un'altra simmetrica rispetto alla retta CC' (coroll. teor. III, 58). Il triangolo $C'TC$ è dunque rettangolo in T, e quindi è inscritto in una circonferenza di

diametro CC' (teor. IX, 59). Indicando con M il punto di mezzo di (CC'), si ha $(MC) = r'$. Siccome r' è anche la distanza d dei due centri, si ha

$$r + r' > r' > r' - r \quad \text{o} \quad r + r' > r' > r - r'$$

quindi la circonferenza di raggio r' e di centro M incontra la circonferenza data nei due punti di contatto delle due tangenti (teor. III).

Oss. II. È chiaro invece per lo stesso teor. III che le due circonferenze suddette non si incontrano, se C' è situato nell'interno del cerchio C. LXXII).

Oss. III. Nelle applicazioni pratiche della geometria non si possono scegliere naturalmente le distanze all'infinito per la misura degli angoli o degli archi di circonferenza, ma bensì si prendono in generale questi per la misura degli angoli, e quindi anche per le distanze all'infinito, se si supponesse l'esistenza effettiva dell'infinito secondo le nostre ipotesi nel mondo esterno (oss. emp. I). E ciò perchè, ammesso l'assioma pratico II, per la costruzione della circonferenza si ha un istrumento semplicissimo, cioè il *compasso*. Ma quello che non è possibile fare nella pratica, è però possibile astrattamente, ed è perciò permesso, anzi utile, come abbiamo visto e

---

LXXII) I teor. di questo numero si dimostrano nello stesso modo. Si dà poi il teor. *Fasci in piani diversi sono uguali.*

Siano R e R' i centri dei due fasci, r e r' due raggi di essi. Si considerino in r e r' due segmenti uguali (RB), $(R'B')$. Da una o dall'altra parte di RB e $R'B'$ nei piani dei due fasci vi sono i triangoli RAB, $R'A'B'$ i cui lati (RA), $(R'A')$ (AB) e $(A'B')$ sono uguali, perchè i cerchi di raggi (RA) e (BA), $(R'A')$ e $(B'A')$ e di centri R e B, R' e B' nei due semipiani considerati, si incontrano in due punti A e A'. Ma i due triangoli ARB, $A'R'B'$ sono uguali per avere i tre lati uguali (teor. III, 17 e nota XII), dunque $\widehat{ARB} \equiv \widehat{A'R'B'}$; e siccome i due fasci sono determinati rispettivamente da R e AB, da R' e $A'B'$, (teor. III, 46 e nota XLV), essi sono dunque uguali (teor. III, coroll. II, teor II, 15 e nota XII).

Coroll. Tutti i piani sono identici.

Difatti lo sono due fasci qualunque di essi (teor. III, 15 e nota XII).

I trattati elementari che non danno un postulato speciale (e parliamo dei migliori che noi conosciamo), ammettono senz'altro che una linea chiusa avente un punto interno e un punto esterno alla circonferenza o ad un'altra linea chiusa, di cui non si dà in nessun luogo la definizione, debba necessariamente incontrare questa linea. Evidentemente questa è una nuova proprietà che non deriva immediatamente dalla def. di parte interna e di parte esterna. Siano infatti P_1 e P_2 il punto interno ed esterno; se la prima linea è nna retta e la linea chiusa è una circonferenza, o bisogna dimostrare che tutte le rette che uniscono P_1 coi punti della circonferenza nel piano sono *tutte* le rette del piano che passano per P_1, e quindi allora anche la retta P_1P_2 incontra la circonferenza in un punto; oppure bisogna dimostrare che la distanza del centro C dai punti della retta P_1P_2, essendo $(CP_1) < r$, $(CP_2) < r$ vi è sempre almeno un punto X di P_1P_2 tale che $(CX) = r$ (teor. I, 58).

Si dice che una linea *divide* una superficie quando un punto mobile sulla superficie non può passare da un lato all'altro della linea senza prendere la posizione di uno dei suoi punti. A parte che questa definizione è astrattamente indeterminata, perchè non si è data prima la definizione della superficie e della linea; se un sistema di punti determina nel piano due parti di esso, l'una interna l'altra esterna, ciò non significa che abbia luogo la proprietà che un punto mobile per passare da una all'altra debba prendere la posizione di un punto del sistema, o in altre parole che se una linea ha un punto interno ed uno esterno al sistema dato, essa debba avere un punto almeno in comune con questo sistema. E se le due parti suddette di piano contengono tutti i punti del piano occorre una dimostrazione.

vedremo meglio nei libri successivi, di scambiare l'un metodo di misura con l'altro.

Siccome nella pratica importa inoltre di risolvere i problemi della geometria cogli istrumenti di cui possiamo disporre, dei quali i più semplici sono la riga e il compasso, così è necessario a questo scopo di imparare anche a risolverli con gli elementi del campo finito. Ma non è detto per questo che ciò sia necessario anche per le dimostrazioni delle proprietà sulle quali si basa la soluzione di questi problemi.

I teoremi testè dimostrati servono appunto alla risoluzione grafica di molti problemi. Per es. a dividere per metà un segmento dato, a condurre la perpendicolare ad una retta da un suo punto o da un punto fuori di essa, e quindi per costruire la parallela ad una retta data; a costruire nel piano, dato un raggio, un altro raggio che formi col primo un angolo dato; a costruire un triangolo dati i lati; la bissettrice di un angolo, e va dicendo LXXIII).

§ 17.

Versi degli angoli, dei triangoli e dei fasci del piano. Versi del piano.

61. *Oss. I.* I versi del fascio (Rr) e dei suoi settori angolari o angoli (def. I, II, 38) sono determinati dai versi della retta direttrice, e inversamente (def. I, 30). D'altra parte ogni fascio può essere generato dal suo centro e dalla retta all'infinito del piano (conv. 49).

Teor. I. Due angoli opposti al vertice (ab), $(a'b')$ hanno il medesimo verso, mentre due angoli adiacenti sono di verso opposto.

I due angoli determinano sulla retta all'infinito due segmenti opposti $(A_\infty B_\infty)$, $(A'_\infty B'_\infty)$ che sono diretti nel medesimo verso (conv. 49), mentre sono di verso opposto i due segmenti $(A_\infty B_\infty)$, $(A'_\infty B_\infty)$ (teor. III, 29).

Teor. II. Se due angoli (ab), $(a'b')$ hanno un lato comune a e gli altri due lati sono situati dalla stessa parte o da parti opposte del lato comune, i due angoli sono dello stesso verso o di verso opposto.

Infatti essi appartengono al medesimo fascio, perchè hanno il vertice comune, e nel primo caso determinano lo stesso verso e nel secondo versi opposti del fascio (int. f''', 63).

Oss. II. Dato un triangolo ABC, il suo perimetro è un sistema di punti ad una dimensione semplicemente chiuso, ed ha i due versi ABC e ACB (int. def. I, 62 e def. II, 63) Si sa che BCA, CAB determinano lo stesso verso di ABC, mentre CBA, BAC determinano il verso opposto (int. d, d' 64).

LXXIII) A questo scopo nei trattati di geometria elementare si tratta della circonferenza e dei punti d'intersezione di due circonferenze abbastanza presto. Euclide, ad es. fa uso del cerchio fin dalla prima proposizione (vedi pref.), ma l'uso pratico della circonferenza deve essere accompagnato dal rigore geometrico delle dimostrazioni delle sue proprietà. Però anche seguendo il nostro indirizzo svolto in queste note, la trattazione del cerchio non viene di molto ritardata, e si possono poi trattare, come è indicato nell'oss. II, i problemi relativi alle proprieta già dimostrate, come fa anche Legendre dopo il secondo libro dei suoi Elementi.

D'altra parte è da osservare che se ciò avesse da avere un gran peso nella geometria elementare, e non l'ha certamente nelle scuole classiche ove l'indirizzo dell'insegnamento deve essere più razionale che pratico, bisognerebbe pure insegnare a costruire le figure dello spazio.

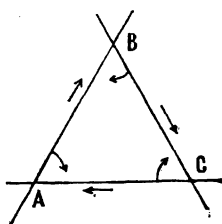



fig. 56

Col verso del perimetro restano determinati anche i versi degli angoli del triangolo. Se il perimetro è percorso nel verso ABC gli angoli in A, B e C sono percorsi nel verso determinato da quello dei lati opposti, cioè:

$$\widehat{BAC},\ \widehat{CBA},\ \widehat{ACB} \quad \text{(fig. 56).} \qquad (1)$$

Def. I. Siccome gli angoli in A, B e C percorsi nel verso (1) determinano il medesimo verso del perimetro, possiamo dire che sono *dello stesso verso*, perchè i versi degli angoli suddetti possono sostituirsi uno all'altro nella determinazione del verso del perimetro, e rispetto a questa determinazione i versi di essi sono uguali (int. def. VI, 8; def. I e IV, 9) [1].

Se invece due angoli del triangolo determinano versi opposti del perimetro, diremo che sono di *verso opposto.*

Teor. III. In ogni triangolo ABC gli angoli $\widehat{ABC}$, $\widehat{BCA}$, $\widehat{CAB}$ sono diretti nello stesso verso, mentre $\widehat{CBA}$, $\widehat{ACB}$, $\widehat{BAC}$ sono dello stesso verso fra loro e di verso opposto rispetto ai primi tre.

Difatti gli angoli $\widehat{CBA}$, $\widehat{BAC}$, $\widehat{ACB}$ determinano il verso del contorno del triangolo ABC opposto a quello determinato dai primi tre (oss. II e def. I).

Def. II. I due versi in cui sono percorsi gli angoli del triangolo o il perimetro si chiamano *versi del triangolo.*

Teor. IV. Il verso ABC del triangolo determinato dai suoi angoli $\widehat{ABC}$, $\widehat{BCA}$, $\widehat{CAB}$ è opposto al verso ABC del perimetro.

Difatti gli angoli suddetti determinano il verso ACB del perimetro (oss. II, def. I e II).

Teor. V. I simboli ABC, BCA, CAB determinano lo stesso verso tanto per gli angoli come per il perimetro del triangolo di vertici A, B, C; mentre ACB, CBA, BAC determinano il verso opposto.

Difatti gli angoli $\widehat{ABC}$, $\widehat{BCA}$, $\widehat{CAB}$ sono dello stesso verso, mentre sono di verso opposto gli angoli $\widehat{ACB}$, $\widehat{CBA}$, $\widehat{BAC}$ (teor. III e IV).

Teor. VI. I versi di due fasci del piano sono uguali o sono opposti.

Difatti gli angoli $\widehat{BAC}$, $\widehat{ACB}$ determinano ciascuno uno dei versi dei fasci di centro A e C, e questi versi sono uguali, perchè uguali sono i versi degli angoli che li determinano nello stesso modo (int. f''', 63 e a'', 60). I versi opposti dei due fasci sono pure uguali perchè tali sono i versi degli angoli $\widehat{CAB}$, $\widehat{BCA}$. Ma A e C sono due punti qualunque del piano, dunque ecc.

Coroll. In fasci dello stesso verso o di verso opposto, gli angoli sono dello stesso verso o di verso opposto.

E inversamente.

Angoli di verso uguale o di verso opposto determinano lo stesso verso o versi opposti nei fasci a cui appartengono.

Difatti il verso di un fascio determina in modo unico il verso di ogni suo settore angolare (int. f'', 63).

La proprietà inversa dipende dallo stesso fatto che un verso di un set-

---

1) Non vi è dunque alcuna contraddizione colla nota del n. 9 dell'introduzione.

tore angolare determina in modo unico il verso del fascio a cui appartiene (def. I, 38 e int. f'', 63).

Teor. VII. I versi di due fasci, uguali (od opposti) al verso di un terzo fascio, sono uguali.

Ciò deriva dal teor. *e*, 8 dell'introduzione.

Oppure anche: Siano α, β, γ i tre fasci, e indichiamo con a e a', b e b', c e c' i loro versi. Se è $a = c$, $b = c$ si ha $a = b$.

Difatti A, B, C siano i centri dei tre fasci, i versi dei tre fasci determinano i versi degli angoli del triangolo ABC (coroll. teor. VI). Ma se gli angoli in A e B sono di verso uguale a quello dell'angolo in C, e se questo è ad es. $\widehat{ACB}$, i versi degli angoli in A e B sono $\widehat{BAC}$, $\widehat{CBA}$, che sono uguali fra loro (teorema III).

Da ciò risulta pure: se $a' = c'$, $b' = c'$ si ha $a' = b'$.

I versi dei due primi fasci opposti a quello di centro C sono a' e b', e solamente a' e b', i quali sono uguali; dunque il teorema è dimostrato.

Coroll. I versi di due fasci, l'uno uguale e l'altro opposto al verso di un terzo fascio, sono opposti.

Secondo le indicazioni precedenti a e b' (opp. a' e b) sono l'uno uguale e l'altro opposto al verso c del terzo fascio, e sono opposti.

Teor. VIII. Se due angoli $\widehat{ABC}$, $\widehat{A'B'C'}$ di due triangoli ABC, $A'B'C'$ sono dello stesso verso o di verso opposto, i due triangoli sono dello stesso verso o di verso opposto.

Difatti il verso dell'angolo $\widehat{ABC}$ e il verso dell'angolo $\widehat{A'B'C'}$ determinano nello stesso modo i versi ABC, $A'B'C'$ (def. I), e poichè i versi dei due angoli sono uguali, sono uguali anche i versi dei due triangoli (int. def. I, 9).

Def. III. Se si considerano due fasci di centri R e R' e dello stesso verso o di verso opposto, diremo anche che *il piano è dello stesso verso* o *di verso opposto intorno ai due punti* R e R', oppure anche che *il verso del piano intorno al punto R è uguale od opposto al verso del piano intorno al punto R'.*

I versi del piano intorno ai suoi punti essendo uguali od opposti li possiamo chiamare *versi del piano.*

Teor. IX. I versi del piano sono determinati da quelli di uno dei suoi angoli.

Difatti i versi del piano sono determinati da quelli dei suoi fasci (def. III), e siccome questi sono determinati da quelli di un solo fascio (teor. VI e VII) e quelli di un solo fascio da quelli di uno dei suoi angoli (coroll. teor. VI), il teor. è dimostrato.

Coroll. Un verso del piano determina uguali versi dei suoi angoli.

Difatti se il verso dato determinasse versi opposti in due dei suoi angoli, a questi dovrebbero corrispondere versi opposti del piano, e non il medesimo verso (def. III).

Teor. X. Due triangoli ABC, $A'BC$ con un lato comune BC sono dello stesso verso o di verso opposto, secondochè i vertici A e A' sono situati dalla stessa parte o da parti opposte del lato BC.

Difatti se A e A' sono situati dalla stessa parte rispetto a BC (def. II, 50),

gli angoli $\widehat{ABC}$, $\widehat{ABC}$ sono diretti nello stesso verso, e perciò lo sono anche i due triangoli. Avviene il contrario se A e A' sono situati da parti opposte rispetto al lato (BC) (teor. II e teor. VIII).

Coroll. I. Se i lati di due angoli $\widehat{BAC}$, $\widehat{BA'C}$ *si incontrano in due punti* B *e* C *di una medesima retta, sono dello stesso verso o di verso opposto, secondochè i loro vertici sono situati dalla stessa parte o da parti opposte rispetto alla retta* BC.

Coroll. II. Un verso della retta determina lo stesso verso nei fasci coi centri situati da una stessa parte di essa, e versi opposti in quelli coi centri situati da parti opposte (coroll. I e coroll. teor. VI).

Coroll. III Due angoli (ab), $(a'b')$, *i cui lati sono paralleli dello stesso verso o di verso opposto, sono dello stesso verso.*

Se invece due dei lati sono paralleli dello stesso verso e gli altri due di verso opposto, i due angoli sono di verso opposto.

Difatti nel primo caso o hanno lo stesso segmento comune all'infinito od hanno sulla retta all'infinito (conv. 49) segmenti opposti che sono diretti nello stesso verso (teor. III, 29). Nel secondo caso i due segmenti all'infinito dei due angoli sono di verso opposto, essendo adiacenti (def. III, 29).

Coroll. IV. Due triangoli ABC, $AB'C'$ *con un vertice comune* A *e con due lati* (BC) *e* $(B'C')$ *sopra una medesima retta e dello stesso verso o di verso opposto, sono dello stesso verso o di verso opposto.*

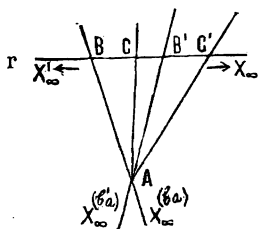



fig. 57

Un verso della retta BC determina il verso del fascio $A.BC$ (coroll. II e teor, VIII) (fig. 57).

Coroll. V. Se due lati di due angoli col vertice comune incontrano una retta in due segmenti (BC) *e* $(B'C')$ *diretti nello stesso verso o in verso opposto, essi sono dello stesso verso o di verso opposto.*

Teor. XI. Se due triangoli ABC, $A'B'C'$ *hanno i lati* (BC), $(B'C')$ *sopra una medesima retta* r *dello stesso verso o di verso opposto, i due angoli* $\widehat{BAC}$, $\widehat{B'A'C'}$ *(e perciò anche i due triangoli), sono delle stesso verso nel 1° caso e di verso opposto nel 2°, se i loro vertici* A *e* A' *sono situati dalla medesima parte della retta.*

Viceversa, se A *e* A' *sono situati da parti opposte di* r.

Nel primo caso gli angoli $\widehat{B'AC'}$, $\widehat{B'A'C'}$ sono dello stesso verso (coroll. I, teor. X). Ma lo sono anche $\widehat{BAC}$ e $\widehat{B'AC'}$ (coroll. IV, teor. X), quindi anche $\widehat{BAC}$ e $\widehat{B'A'C'}$ (teor. VII e coroll. teor. VI) e i triangoli ABC, $A'B'C'$ (teor. VIII).

Analogamente si vede che sono di verso opposto se (BC) e $(B'C')$ sono di verso opposto.

Se A e A' sono situati invece da parti opposte rispetto alla retta r (def. II, 50), gli angoli $\widehat{B'AC'}$, $\widehat{B'A'C'}$ sono di verso opposto (coroll. I, teor. X), e perciò anche gli angoli $\widehat{BAC}$ e $\widehat{B'A'C'}$ (coroll. IV, teor. X, teor. VII e coroll. teor. VI), e i triangoli ABC, $A'B'C'$ (teor. VIII) LXXIV).

LXXIV) Si può seguire lo stesso metodo anche non facendo uso della retta all'infinito. Che due angoli opposti al vertice (ab), $(a'b')$ sono dello stesso verso risulta

§ 18.

Figure congruenti e simmetriche nel piano LXXV).

62. *Teor. I. La corrispondenza d'identità di due figure uguali nel piano è determinata da due angoli corrispondenti.*

Se $ABCD....M$, $A'B'C'....M'$.... sono due figure identiche, esse si corrispondono in modo che i segmenti delle coppie di punti corrispondenti, ad es. (AB), $(A'B')$, sono uguali (teor. II, 15).

Siano (ab), $(a'b')$ i due angoli corrispondenti di vertici C e C', e perciò uguali. Scegliendo sui lati a e b del piano due punti A e B, e i punti A' e B' sui lati del secondo a distanze da C' uguali a quelle di A e B da C, i due triangoli ABC, $A'B'C'$ sono uguali (teor. III, 16). Sia D un punto della prima figura, e congiungiamolo col punto C, la retta CD incontra la retta AB in un punto E, e supponiamo che E sia ad es. interno di (AB). Nel segmento $(A'B')$ corrispondente vi è un solo punto E' interno ad $(A'B')$ tale che $(AE) \equiv (A'E')$. Se sulla retta $C'E'$ si considera un punto D' che abbia da C' ed E' le stesse distanze di D da C ed E (teor. I, 8), che è uno solo (ass. II, a, int. def. I, 61), il punto D' corrisponde al punto D. Costruendo un'altra coppia di punti corrispondenti M e M', i due triangoli DCM, $D'C'M'$ sono uguali per avere due lati, l'angolo compreso in C uguali, e perciò

$$(DM) \equiv (D'M')$$

e le figure rettilinee così costruite sono identiche teor. III, 15). E poichè la costruzione dei punti corrispondenti è a senso unico e reciproca la figura $A'B'....M'$.... così costruita coincide colla seconda figura data (fig. 58).

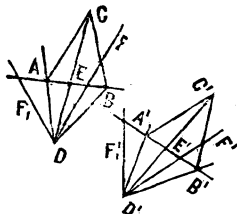



fig. 58

Coroll. I. La corrispondenza d'identità di due figure uguali nel piano è determinata da due triangoli corrispondenti di esse.

Siano infatti ABC, $A'B'C'$ i due triangoli, gli angoli $\widehat{ABC}$, $\widehat{A'B'C'}$, sono corrispondenti ed uguali, e perciò la corrispondenza d'identità delle due figure è pienamente determinata (fig. 58).

---

dal fatto che b è compreso in una delle parti del piano rispetto alla retta aa' e quindi (ab), (ba'), $(a'b')$, $(b'a)$ sono diretti nello stesso verso.

Per dimostrare il coroll. III del teor. X basta darlo come coroll. del teor. XI. Si taglino i due angoli di vertici R e R' con una retta parallela alla retta dei due vertici; essendo (AB), (A_1B_1), i segmenti d'intersezione dati dai lati paralleli dello stesso verso si ha

$$(AB) \# (RR') \# (A_1B_1)$$

e (AB) e (A_1B_1) sono dello stesso verso e quindi anche (AA_1), (BB_1) (teor. II, 35).

Se a_1 e b_1 sono di verso opposto di a e b, basta coinsiderare l'angolo opposto al vertice che è dello stesso verso, e applicare la dimostrazione precedente (teor. VII, e coroll. teor. VI). Se a_1 è dello stesso verso di a, e b_1 di verso opposto di b, basta coinsiderare l'angolo adiacente $(a_1b'_1)$ che è dello stesso verso dell'angolo (ab) e di verso opposto dell'angolo (a_1b_1), e quindi (ab) e (a_1b_1) sono di verso opposto (teor. VII).

LXXV) Questo paragrafo va dato tale e quale tranne il teor. II.

Coroll. II. Due figure identiche non possono avere tre coppie di punti corrispondenti comuni non situati in linea retta.

Se avessero infatti tre coppie di punti corrispondenti coincidenti ad es.: A, A'; B, B': C, C', per la costruzione precedente coinciderebbero tutti gli altri punti corrispondenti delle due figure.

Teor. II. Nella corrispondenza tra i punti del piano determinata da due delle sue figure uguali, la retta all'infinito corrisponde a sè medesima.

Difatti ad una distanza infinita della prima figura corrisponde una distanza infinita della seconda (teor. I, 34 e conv. 49).

Teor. III. Le figure rettilinee determinate da due gruppi di quattro punti $ABCD$, $A'B'C'D'$ nel piano sono uguali, se i segmenti rettilinei che hanno per estremi i quattro punti dati sono ordinatamente uguali.

Di questo teor. che è un caso particolare del teor. VII del n. 17 diamo qui un'altra dimostrazione [1]).

Siano dati due punti X e Y della prima figura; le rette AX e AY incontrano la retta BC in due punti Z e W. Costruiti i punti corrispondenti Z' e W' nella retta $B'C'$, i raggi $A'Z'$, $A'W'$ contengono i punti corrispondenti X' e Y' le cui distanze da A' e Z', A' e W' sono quelle dei punti X e Y rispettivamente dai punti A e Z, A e W. I triangoli ABC, $A'B'C'$ sono per dato uguali per avere i tre lati uguali (teor. III, 17), e quindi:

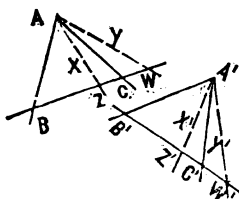



fig 59

$$\widehat{ABC} \equiv \widehat{A'B'C'},\ \widehat{ACB} \equiv \widehat{A'C'B'},\ \widehat{BAC} \equiv \widehat{B'A'C'}.$$

I triangoli ABZ, $A'B'Z'$ sono uguali per avere due lati e l'angolo compreso uguale (teor. II, 42), quindi $(AZ) \equiv (A'Z')$. Per la stessa ragione si ha $(AW) \equiv (A'W')$. E siccome $(ZW) \equiv (Z'W')$ i triangoli ZAW, $Z'A'W'$ sono uguali per avere i tre lati uguali (teor. III, 17) e perciò: $\widehat{ZAW} \equiv \widehat{Z'A'W'}$. Dunque i due triangoli XAY, $X'AY'$ sono uguali per avere due lati e l'angolo compreso uguali, vale a dire $(XY) \equiv (X'Y')$. Dunque ecc. (teor. III, 15).

Teor. IV. Le figure rettilinee piane determinate da due gruppi di m punti sono uguali, se i segmenti rettilinei di m–3 di essi dai tre rimanenti sono ordinatamente uguali.

I due triangoli formati dai tre punti rimanenti siano ABC, $A'B'C'$, che per avere i tre lati uguali sono uguali (teor. II, 17). Ad un punto X qualunque nella corrispondenza d'identità determinata dai due triangoli suddetti (coroll. I. teor. I) corrisponde un punto X'. Sia invece X'_1 il punto corrispondente ad X nella seconda figura data, che ha per dato le stesse distanze da $A'B'C'$ di X da ABC. Le due figure $A'B'C'X'_1$, $A'B'C'X'$, sono identiche (teor. III) dunque devono coincidere avendo tre coppie di punti corrispondenti coincidenti (coroll. II, teor. I), vale a dire X' coincide con X'_1. Ripetendo lo stesso ragionamento per gli altri m–4 punti, il teorema resta dimostrato.

Oss. I. Come pei segmenti uguali sulla retta (int. oss. I, 112) è anche qui da osservare che l'identità di due figure nel medesimo piano o in piani diversi è indi-

1) Vedi nota 2, 17.

pendente dai versi del piano o dei piani in cui sono situate, senza che ciò significhi che nella corrispondenza d'identità delle due figure non si tenga conto dell'ordine nel quale si seguono i loro punti corrispondenti.

Teor. V. Gli angoli corrispondenti di due figure identiche in un medesimo piano sono diretti nel medesimo verso o in verso opposto, se lo sono due qualunque di essi.

Siano $\widehat{ACB}$, $\widehat{A'C'B'}$ i due angoli corrispondenti, e supponiamo siano diretti nel medesimo verso. Siano dati inoltre altri due angoli corrispondenti $\widehat{F_1DF}$, $\widehat{F'_1D'F'}$; si vuol dimostrare che anche questi angoli sono diretti nel medesimo verso. Congiungiamo C con D, e C' con D'. L'angolo ACD è diretto nello stesso verso o in verso opposto dell'angolo ACB. La stessa cosa succede dell'angolo $\widehat{A'C'D'}$ rispetto all' angolo $\widehat{A'C'B'}$, perchè le due figure sono uguali ed uguali perciò debbono essere i loro angoli corrispondenti, vale a dire se il raggio CD è interno o esterno all'angolo $\widehat{ACB}$, anche il raggio corrispondente $C'D'$ è interno od esterno all'angolo $\widehat{A'C'B'}$. Si ha dunque che $\widehat{ACD}$, $\widehat{A'C'D'}$ sono in ogni caso diretti nel medesimo verso, perchè lo sono $\widehat{ACB}$, $\widehat{A'C'B'}$ (coroll. teor. VI e teor. VII, 61).

Congiungiamo D con A, D' con A'. I triangoli ACD, $A'C'D'$, sono dello stesso verso, perchè lo sono $\widehat{ACD}$, $\widehat{A'C'D'}$ (teor. VIII, 61) e quindi anche gli angoli $\widehat{ADC}$, $\widehat{A'D'C'}$ (teor. III, 61).

Gli angoli $\widehat{FDA}$, $\widehat{F'D'A'}$ sono ambidue dello stesso verso o di verso opposto di $\widehat{CDA}$, $\widehat{C'D'A'}$, quindi essendo questi del medesimo verso lo saranno anche $\widehat{FDA}$, $\widehat{F'D'A'}$. Finalmente gli angoli $\widehat{FDF}$, $\widehat{F'D'F'_1}$ sono ambidue dello stesso verso o di verso opposto degli angoli $\widehat{FDA}$, $\widehat{F'D'A'}$; ma questi sono dello stesso verso, dunque lo sono anche $\widehat{FDF_1}$, $\widehat{F'D'F'_1}$.

Essendo dimostrata la prima parte del teor. rimane dimostrata anche la seconda.

Def. I. Diremo che due figure identiche che hanno due angoli diretti nel medesimo verso o in verso opposto e quindi anche tutti gli altri. (teor. V) *sono dello stesso verso o di verso opposto.* Nel primo caso le due figure si chiamano anche *congruenti* e nel secondo *simmetriche.*

Oss. II. **Badiamo però che il verso di una figura, che non è un triangolo, non dà in generale un verso del piano (def. III, 61), perchè essa può contenere degli angoli diretti in verso opposto.**

Coroll. I. Due figure congruenti o simmetriche ad una terza sono congruenti fra loro (def. I, teor. V; teor. VII e coroll. teor. VI, 61).

Coroll. II. Due figure l' una congruente e l' altra simmetrica ad una terza figura sono simmetriche fra loro.

Teor. VI. Due figure congruenti aventi due coppie di punti corrispondenti comuni coincidono.

Indichiamo i due punti comuni delle due figure con A e B, oppure con A' e B', secondochè si considerano come appartenenti alla prima o alla seconda figura. Sia C un altro punto della prima; il punto corrispondente C' è tale che il triangolo $A'B'C'$ è congruente al triangolo corrispondente ABC (teor. V). Il punto C' non può essere dalla parte del piano rispetto alla retta AB ove trovasi C (teor. IX, 55); neppure può essere situato dalla parte op-

posta perchè B' dovrebbe coincidere col punto simmetrico di C rispetto alla retta AB, e il triangolo $A'B'C$ sarebbe di verso opposto al triangolo ABC, dunque ecc.

Coroll. Se due figure simmetriche hanno una coppia di punti corrispondenti in comune, esse sono simmetriche rispetto alla retta congiungente i due punti.

§ 19.

Sistemi continui ad una dimensione di figure invariabili nel piano.

63. *Def. I.* Dai sistemi continui di segmenti invariabili sulla retta all'infinito (conv. 49 e def. IV, 36) si ottengono intorno ad ogni punto R del piano dei sistemi continui di angoli invariabili di centro R (teor. I, II e coroll., 39 e def. III, 36). Chiameremo un tale sistema, *sistema circolare di settori angolari o di angoli*, di cui R è il *centro*, e i settori augolari o gli angoli, *settori angolari* o *angoli al centro.*

Teor. I. Il centro del sistema corrisponde a sè stesso.

Difatti scelti due angoli corrispondenti (ab), $(a'b')$, il vertice di (ab), che è R, corrisponde al vertice di $(a'b')$, che è pure R (def. II, III, 36 e teor. I, 16).

Teor. II. Gli angoli al centro di un sistema circolare sono congruenti.

Difatti tali sono i segmenti sulla retta all'infinito del sistema in essa determinato dal sistema circolare (def. I, teor. I, 36), ricordando che un verso della retta all'infinito dà il verso degli angoli al centro del sistema (oss. I, 61).

Coroll. I. Due angoli simmetrici di vertice comune non possono appartenere ad un sistema circolare (coroll. teor. I, 36),

Coroll. II. I lati corrispondenti di due angoli al centro del sistema circolare formano lo stesso angolo.

Ciò deriva dalla proprietà analoga dei segmenti all'infinito (teor. III, 36 e teor. I, 39).

Teor. III. Due angoli al centro di un sistema circolare non possono avere una coppia di punti corrispondenti comuni, distinti dal vertice.

Se avessero una coppia di punti corrispondenti comuni, distinti dal vertice R, avrebbero in comune anche i raggi RA, RA', perchè R corrisponde a sè stesso, dunque i segmenti all'infinito dei due angoli che sono congruenti avrebbero una coppia di punti corrispondenti comuni. il che è assurdo (def. I e teor. I, 35).

Teor. IV. Data una figura qualunque si può costruire un sistema continuo di figure invariabili colla data le cui linee corrispondenti siano circonferenze col centro in ogni punto dato R.

Scelto per es. un triangolo ABC, si congiungano i suoi vertici con R, e sia RC compreso nell'angolo $\widehat{ARB}$. Sia dato inoltre il sistema circolare di angoli uguali ad $\widehat{ARB}$. Se in un angolo qualunque $\widehat{A_1RB_1}$ del sistema si costruisce il raggio corrispondente ad RC, i tre punti corrispondenti A_1, B_1, C_1 di A, B,

C hanno rispettivamente le stesse distanze da R, e danno un triangolo identico ad ABC, essendo $(AB) \equiv (A_1B_1)$, $(AC) \equiv (A_1C_1)$, $(BC) \equiv (B_1C_1)$ (teor. III, 17).

Così se è data un'altra figura, a due punti dell'una corrispondono colla costruzione suddetta due punti colla stessa distanza, e perciò le figure corrispondenti sono identiche (teor. III, teor. I e coroll. II, teor. II, 15), e d'altra parte i punti corrispondenti nella corrispondenza d'identità delle due figure sono tali anche nel sistema continuo così costruito (def. III, 36).

Def. II. Un sistema di figure identiche che soddisfa al teor. IV lo chiameremo *sistema circolare di figure invariabili*, del quale è caso particolare il sistema circolare di angoli già definito (def. I).

Coroll. Il centro R di un sistema circolare qualunque corrisponde a sè stesso.

Difatti la linea dei suoi punti corrispondenti nel sistema si riduce al punto R stesso.

Teor. V. Le figure di un sistema circolare sono congruenti.

Se (AB), (A_1B_1) sono due segmenti corrispondenti di due figure del sistema, i due angoli $\widehat{ARB}$, $\widehat{A_1R_1B_1}$ sono congruenti (teor. II), e perciò lo sono anche i due triangoli ARB, A_1RB_1, (teor. VIII, 61 e def. I, 62).

Indichiamo con a e b, a_1 e b_1 i raggi del fascio R passanti per A e B A_1 e B_1; e siano BC, B_1C_1 due altre rette corrispondenti delle due figure, essendo i due punti C e C_1 situati sulle rette a e a_1. I due triangoli ABC, $A_1B_1C_1$ sono congruenti perchè lo sono gli angoli $\widehat{RAB}$, $\widehat{RA_1B_1}$ ossia $\widehat{CAB}$, $\widehat{C_1A_1B_1}$ (teor. VIII, 61); dunque sono dello stesso verso anche gli angoli $\widehat{ABC}$, $\widehat{A_1B_1C_1}$ (teor. III, 62). Ma $\widehat{ABC}$, $\widehat{A_1B_1C_1}$ sono due angoli corrispondenti delle due figure del sistema, dunque esse sono congruenti (def. I e teor. V, 62) (fig. 60).

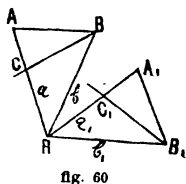



fig. 60

Oss. I. Due segmenti simmetrici rispetto ad un punto sulla retta non possono appartenere ad alcun sistema continuo di segmenti sulla retta (coroll. teor. I, 36), ma possono appartenere ad un sistema circolare del piano.

64. *Def. I.* Considerando un sistema continuo di segmenti invariabili sulla perpendicolare alla direzione di un fascio di rette parallele si ha un sistema di striscie invariabili (def. X, 38, def. II e teor. IV, 48). Chiameremo un tale sistema, *sistema parallelo di striscie*, e la direzione delle rette del fascio *direzione* del sistema.

Teor. I. Le striscie di un sistema parallelo sono congruenti e simmetriche.

Perchè riguardando i lati di esse come raggi di un fascio di rette parallele di centro X_∞, esse sono dello stesso verso o congruenti perchè tali sono anche i segmenti sulla retta perpendicolare direttrice del sistema (def. I e coroll. II, teor. X, 61).

Se invece i lati di una striscia sono considerati nel verso di X_∞ e quelli dell'altra nel verso del punto X'_∞, che coincide con X_∞ rispetto all'unità Euclidea, esse sono di verso opposto.

Coroll. I. Due striscie del sistema parallelo non possono avere una coppia di punti corrispondenti in comune.

Perchè se ciò fosse, avrebbero in comune un raggio del fascio di centro

X_∞, e quindi anche i segmenti corrispondenti sulla retta perpendicolare avrebbero due punti corrispondenti comuni (def. I), il che è assurdo (teor. I, 36 e teor. II, 35).

Oss. I. Tutta la striscia piana (ab) non determina alcun verso del piano appunto perché il punto X_∞ rispetto all'unità Euclidea si può considerare tanto da una parte come dall'altra rispetto ad una retta perpendicolare alla direzione del sistema.

Oss. II. Se indichiamo con α e α', β e β' i raggi di due rette parallele del sistema, limitati da due punti A e B di una perpendicolare r ad essi, in modo che α e β, α' e β' siano diretti nel medesimo verso (def. II, 33), le due semistriscie $(\alpha\beta)$, $(\alpha'\beta')$ sono simmetriche rispetto alla retta r e quindi $(\alpha\beta)$. $(\beta'\alpha')$ sono congruenti.

Teor. II. Data una figura qualunque vi è un sistema continuo di figure invariabili colla data, tali che le linee dei punti corrispondenti sono rette perpendicolari ad una retta data, e le rette corrispondenti sono parallele fra loro.

Si consideri un segmento (AB) cogli estremi nei lati a e b della striscia (ab), e da A e B conduciamo le normali ai suoi lati fino ad incontrare in A_1 e B_1 i lati a_1 e b_1 della striscia (a_1b_1) uguale alla prima. Il segmento (A_1B_1) è uguale ad (AB) (teor. I, 44).

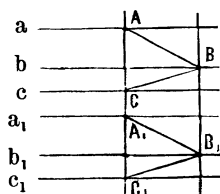
Se è data una figura $ABCD....M....$, si può dunque immaginare un sistema continuo di figure identiche alla prima in modo che le parti corrispondenti nel sistema siano pure identiche.

Def. II. Un sistema di figure identiche che soddisfa al teor. II si chiama *sistema parallelo di figure invariabili*, o più semplicemente *sistema parallelo*, di cui il precedente (def. I), è un caso particolare (fig. 61).

fig. 61

Teor. III. Le figure di un sistema parallelo sono congruenti.

Siano infatti $\widehat{ABC}$, $\widehat{A_1B_1C_1}$ due angoli corrispondenti delle due figure, e i punti A e C, A_1 e C_1 siano sulla medesima perpendicolare alla direzione del sistema.

Le striscie piane (ac), (a_1c_1) i cui lati passano rispettivamente per A e C, A_1 e C_1 sono congruenti quando sono considerate dallo stesso punto X_∞ (teor. I), ossia dalla stessa parte di una perpendicolare comune ai lati, e quindi anche i segmenti (AC) e (A_1C_1) (coroll. V, teor. X, 61). I punti B e B_1 sono situati da una stessa parte di ogni perpendicolare, perchè la retta BB_1 è essa pure perpendicolare alla direzione del sistema, e due perpendicolari ad una terza sono parallele fra loro (coroll. II, teor. V, 47 e teor. I, 50). Dunque gli angoli $\widehat{ABC}$, $\widehat{A_1B_1C_1}$ sono congruenti (teor. XI, 61), e quindi anche le due figure corrispondenti a cui appartengono (teor. V e def. I, 62).

65. *Def. I.* Se un sistema continuo ad una dimensione di figure invariabili (def. III, 36) è situato nel piano, il sistema si chiama *sistema piano continuo ad una dimensione di figure invariabili.*

Teor. I. Due figure di un sistema piano continuo ad una dimensione di figure invariabili sono congruenti.

Difatti due angoli corrispondenti e consecutivi (def. III, 36) devono avere i lati e i vertici consecutivi, e quindi i punti all'infinito dei lati determinano due segmenti uguali e consecutivi. Ma questi sono diretti nello stesso verso (int.

a, 99), quindi lo sono pure i due angoli considerati (coroll. II, teor. X, 62), e perciò anche le due figure consecutive considerate (teor. V, 62). Ma il sistema si può ritenere composto da una serie di figure consecutive (def. I, def. II e III, 36), dunque due figure qualunque del sistema sono pure congruenti.

Coroll. Due figure simmetriche non possono appartenere ad un sistema continuo di figure invariabili nel piano.

Teor. II. Data una figura e una linea nel piano, la figura appartiene ad un sistema continuo ad una dimensione di figure invariabili del quale la linea data è una linea di punti corrispondenti.

Sia (A) la figura data, l la linea data, R un punto di l, che può appartenere eventualmente alla figura stessa. Consideriamo un segmento (RR_1) di l e scomponiamo (RR_1) in segmenti quanto piccoli si vuole (RR'), $(R'R'')\dots(R^{(m)}R_1)$, in modo che i segmenti rettilinei (RR'), $(R'R'')\dots(R^m R_1)$ siano più piccoli di un segmento dato s (def. I, 36). Per l'identità del piano intorno ai suoi punti R e R' (coroll. II, teor. II, 47) possiamo costruire intorno a R' una figura (A') identica ad (A), e in modo che quando (RR') diventa indefinitamente piccolo tale diventi la distanza di due punti corrispondenti qualunque di (A) e (A'). A tale scopo se A è un punto di (A), conduciamo il raggio RA, e sia $R'A'$ un raggio che abbia per limite RA, quando R' ha per limite R (def. I, 36). Ciò è possibile, basta ad es. che il punto A'_∞ di $R'A'$ si accosti indefinitamente al punto limite A_∞ assoluto di RA (def. I, 12, conv. 49). La stessa cosa facciamo per ogni altro punto X della figura (A), in modo che i segmenti all'infinito degli angoli $\widehat{ARX}$, $\widehat{A'R'X'}$ siano uguali, vale a dire che i due angoli siano uguali, ossia ancora che i segmenti $(A_\infty X_\infty)$, $(A'_\infty X'_\infty)$ facciano parte di un sistema continuo di segmenti invariabili sulla retta all'infinito.

Sul raggio $R'X'$ corrispondente a RX costruiamo il punto X' alla stessa distanza da R' del punto X da R, in modo che ogni altro punto Y' del raggio $R'X'$ si accosta indefinitamente ad un punto Y alle stesse distanze da R e X di Y' da R' e X' (coroll. II, teor. IV, 12).

Si ha che $(AX)\equiv(A'X')$, essendo $(AR)\equiv(A'R')$ $(XR)\equiv(X'R')$ e $\widehat{ARX}\equiv\widehat{A'R'X'}$ (teor. II, 42), e se Y e Y' sono due altri punti corrispondenti di (A) e (A') si ha pure $(AY)\equiv(A'Y')$; e si vede facilmente che $\widehat{XAY}\equiv\widehat{X'A'Y'}$, e quindi ancora $(XY)\equiv(X'Y')$. Dunque le due figure (A) e (A') sono identiche, e la corrispondenza d'identità di esse si confonde colla corrispondenza del sistema costruito pel tratto (RR') della linea l, e quindi ripetendo la stessa costruzione per ogni segmento successivo si ha il sistema richiesto (def. III, 36).

Oss. I. Il teor. II si appoggia sulla esistenza della linea l. Astrattamente noi abbiamo stabilita l'esistenza della retta e della circonferenza e quindi delle linee poligonali composte con tratti di esse; empiricamente il teorema vale per tutte le linee intuitive che vengono rappresentate graficamente nel piano da linee materiali (oss. emp. 36). Ma provata l'esistenza di una linea che soddisfi alla def. I, 36 vale il teorema suddetto anche per essa [1]).

Def. II. Un sistema continuo ad una dimensione di sistemi invariabili con-

---

1) Noi vediamo dunque che per i sistemi continui di figure invariabili e quindi congruenti (teor. I) non occorrono tutte le condizioni della linea intuitiva per le linee corrispondenti di punti del sistema (def. II, 36 e nota relativa).

tinui ad una dimensione di figure invariabili si chiama sistema continuo di figure invariabili a *due dimensioni*, e così via.

Oss. II. Evidentemente le proprietà di questi sistemi si deducono da quelle dei sistemi ad una dimensione, e due figure qualunque dei nuovi sistemi sono sempre congruenti LXXVI).

§ 20.

Movimento reale delle figure nel piano. LXXVII).

66. *Teor. I. Una figura che si muove liberamente nel piano descrive un sistema continuo.*

Nel movimento di una figura ogni suo punto descrive una linea intuitiva, compresa nella def. I del n. 36 (oss. II, 36), e ad ogni posizione di un suo punto corrisponde una posizione della figura stessa (ass. II, pr.).

Se $AA_1A_2 \dots A^m$, $BB_1B_2 \dots B^m \dots$ ecc. $XX_1X_2 \dots X^m \dots$ ecc. sono posizioni diverse dei punti A, B, ecc. X ecc. della figura, non escluso il caso che esse coprano più volte una linea o un segmento di linea, e se (AA_1) è il tratto di traiettoria percorsa dal punto A in un dato tempo, il punto B percorre nello stesso tempo un tratto (BB_1), e ai punti del segmento (BB_1) devono corrispondere i punti del tratto (AA_1) (ass. II, pr.), quindi vi è la corrispondenza univoca e del medesimo ordine, e perciò il teorema è dimostrato (def. II, 36).

Teor. II. Una figura può muoversi nel piano rimanendo invariabile.

Difatti costruito un sistema continuo di figure invariabili ed essendo (A), (B), (C), (X) .... le linee intuitive dei punti corrispondenti che passano pei punti A, B, $C \dots X \dots$ della figura data (teor. II e oss. III, 62), si possono obbligare i punti .... $A, B, C, \dots X \dots$ della figura data a muoversi lungo le linee di punti corrispondenti, in modo che i punti corrispondenti delle linee suddette siano posizioni corrispondenti dei punti della figura data (ass. II, pr.).

Oss. I. Evidentemente, se il piano non godesse la proprietà di possedere dei sistemi continui ad una dimensione di figure invariabili, come fu dimostrato nel paragrafo precedente, una figura non potrebbe muoversi senza deformazione (def. II, 37).

Coroll. Due figure, posizioni di una figura, che si muove rimanendo invariabile, sono congruenti.

Perchè tale è la proprietà di due figure di un sistema continuo di figure invariabile (teor. I, 65).

LXXVI) La definizione del sistema circolare bisogna appoggiarla sulle proprietà del fascio, essendo esso un sistema identico nella posizione delle sue parti, ripetendo per esso le stesse considerazioni fatte per la retta (36). Nella dimostrazione del teor. I e del teor. II di questo numero basta osservare senza ricorrere all'infinito che due angoli consecutivi devono essere dello stesso verso perchè tali sono i segmenti che essi tagliano sopra una retta che lascia dalla stessa parte i loro vertici (coroll. II, teor. X, 61 e int. *a*, 69).

LXXVII) Questo paragrafo va trattato ugualmente; si tralascino il teor. III e il suo coroll. Come abbiamo avvertito nella prefazione, limitandoci in queste note al solo piano Euclideo, non accompagneremo più oltre il testo con queste note speciali.

Def. I. Se il sistema è circolare (63) il movimento dicesi *movimento di rotazione intorno al centro* del sistema, che si chiama *centro* del movimento di rotazione.

Oss. II. Nel movimento di rotazione le traiettorie dei punti sono circonferenze col centro in quello del movimento, perchè le linee dei punti corrispondenti sono in tal caso circonferenze col centro nel centro del movimento (teor. IV, 63).

Teor. III. Il centro del movimento di rotazione rimane immobile.

Difatti il centro del sistema circolare corrisponde a sè stesso (teor. I, 63).

Def. II. Se il sistema è parallelo (64) il movimento dicesi di *tralazione*. La direzione del sistema si chiama *direzione* del movimento.

Oss. III. Le traiettorie nel movimento di traslazione sono rette perpendicolari alla direzione del sistema (teor. II, def. I, 64).

Teor. IV. Una retta nel movimento di traslazione si mantiene parallela a sè stessa.

Perchè tale è la proprietà delle rette corrispondenti di un sistema parallelo (teor. II, 64).

Teor. V. Il movimento di traslazione è un movimento di rotazione infinitesima rispetto all' unità infinita delle distanze.

Difatti le rette parallele alla direzione del sistema parallelo sono circonferenze col centro nel punto all'infinito del sistema (teor. II, 32).

Coroll. Nel movimento di traslazione rimangono fissi due punti, l' uno in senso relativo, l' altro in senso assoluto. Il primo giace all' infinito nella direzione del movimento, il secondo è il centro del movimento.

Difatti il centro di rotazione è fisso in senso assoluto (def. I, 37), perchè ogni sua posizione coincide con esso (teor. I), mentre sappiamo che nel movimento di rotazione non vi è altro punto fisso, vale a dire ogni punto all'infinito si muove in tal caso di un segmento finito rispetto all'unità finita e quindi infinitesimo rispetto all'unità infinita.

67. *Teor. I. Due figure congruenti si possono trasportare l' una sull' altra mediante un movimento di rotazione.*

Le due figure siano dapprima due triangoli ABC, $A_1B_1C_1$. Si conducano pei punti di mezzo di (AA'), (BB') le perpendicolari alle rette AA', BB'. Se queste perpendicolari coincidono in una retta α, esse passano pel punto d'incontro S dei due segmenti (AB), $(A'B')$, che sono simmetrici rispetto alla retta α (def. I, 56). Si ha $\widehat{ASA'} \equiv \widehat{BSB'}$, essendo angoli opposti al vertice o coincidenti, e quindi anche del medesimo verso (teor. I, 61). Quando (AB) ruota intorno a S, il punto C si porta in un punto C'_1 tale che forma con $A'B'$ un triangolo congruente con ABC, e quindi anche con $A'B'C'$ (coroll. I, teor. V, 62), e perciò C'_1 coincide con C' (def. I, 62; teor. X, 61 e teor. IX, 55).

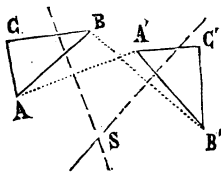



fig. 62

Se le due perpendicolari non coincidono e si incontrano in un punto S, i due triangoli ASB, $A'SB'$ sono uguali per avere i tre lati uguali, e quindi si ha $\widehat{ASB} \equiv \widehat{A'SB'}$. Questi angoli sono pure del medesimo verso, altrimenti, come

si vede facilmente le perpendicolari suddette dovrebbero coincidere, e si cadrebbe nel caso precedente. Ora, $A'SB'$ non può essere tutto contenuto nell'angolo ASB o inversamente, quindi $A'SB'$ o è in parte interno ad ASB, oppure è tutto esterno a questo angolo. In ogni caso gli angoli $\widehat{ASA'}$, $\widehat{BSB'}$ sono uguali e del medesimo verso, e quindi come nel caso precedente si dimostra che ruotando il triangolo ABC intorno ad S finchè A si porta in A', i punti B e C si portano in B' e C'. Se il punto S cade all'infinito, si ha un movimento di traslazione (fig. 62).

La dimostrazione, vale anche nel caso di due figure piane qualunque.

Oss. I. Nella corrispondenza d'identità di due figure congruenti qualunque nel piano vi è dunque un punto S che corrisponde a sè medesimo.

Non è difficile vedere che nel caso di due figure simmetriche vi è invece una retta s che corrisponde a sè medesima.

Teor. II. Due figure simmetriche nel medesimo piano non possono trasportarsi l'una sull'altra con un movimento senza deformazione.

Difatti se ciò fosse possibile esse farebbero parte di un sistema di figure invariabili (def. II, 37), ciò che non è possibile (coroll. teor. I, 65).

Oss. II. Sembra vi sia un caso che contraddica a questo teorema, vale a dire il caso delle due semistriscie $(\alpha\beta)$, $(\alpha'\beta')$ dell'oss. II, del n. 65.

Ma se è vero che una parte finita della semistriscia $(\alpha\beta)$ può trasportarsi sulla semistriscia $(\alpha'\beta')$, non significa però che tutta la semistriscia possa essere trasportata sull'altra, e quindi il teorema è vero in qualunque caso considerando tutto il piano.

Teor. III. Una figura non può muoversi nel piano se si tengono fissi due dei suoi punti.

Difatti due posizioni della medesima figura sono congruenti (coroll. teor. II, 66), e avendo due coppie di punti corrispondenti comuni, coincidono (teor. VI, 62).

Teor. IV. Due figure simmetriche possono muoversi nel piano fino ad essere simmetriche rispetto ad una retta qualunque data di esso.

Siano (A) e (A') le due figure, r la retta data. Rispetto alla retta r consideriamo la figura (A'') simmetrica alla figura (A) (def. II, 56); essa è congruente alla (A') (teor. VI, 62) e quindi la (A') potrà trasportarsi sulla (A'') (teor. I).

Capitolo II.

Il piano completo (o di Riemann).

§ 1.

Determinazione del piano completo — Ip. VII.

68. *Def. I.* Tutte le rette complete di un fascio (def. III, 27), considerando il punto come elemento, determinano una figura che si chiama *piano completo.*

Oss. I. Per l'ip. V il piano completo è il piano Riemanniano (oss. I, 26, def. I, 27).
Due rette parallele del campo Euclideo, considerate nel campo completo, sono infinitamente vicine (teor. I, 24 e teor. II, 31 ; def. II, 26 e conv. 28). In senso assoluto esse s'incontrano in due punti opposti (teor. II e def. II, 30).

Oss. II. In questo capitolo quando nomineremo il piano senz' altro, intenderemo quello completo.

Teor. I. Ogni punto opposto di un punto del piano completo giace nel piano.

Difatti la retta del fascio generatore che passa pel punto dato passa anche pel punto opposto (teor. II e def, II, 30 e def. I).

Oss. III. Consideriamo un fascio (Rr) nel campo finito Euclideo e misurate le sue rette coll'unità infinita (conv. 28), i punti limiti assoluti di esse rispetto al punto R (def. II, 32) sono situati in una linea σ_∞ che per molte sue proprietà comuni con la retta abbiamo chiamata *retta all'infinito* del fascio (Rr) suddetto, senza alcun nocumento alle proprietà del fascio Euclideo stesso (49), avendo fatto uso soltanto delle sue proprietà comuni colla retta. Ma non sappiamo se σ_∞ sia effettivamente una retta, anzi per le considerazioni svolte al n. 49 noi dobbiamo ritenere fino a prova contraria che essa possa non essere una retta compatibilmente colle ipotesi I-VI stabilite precedentemente. Se ciò fosse, il fascio (Rr) e il fascio (Rr_∞), essendo r_∞ una retta limite assoluta di R, non sarebbero identici, e quindi la figura rettilinea determinata da due raggi passanti pel punto R nel campo Euclideo non si manterrebbe la stessa in questo solo campo considerando anche i punti all'infinito dei raggi stessi; ma essa sarebbe parte di un' altra figura rettilinea ottenuta applicando la costruzione della def. I del n, 9; la quale figura sarebbe pure determinata dagli stessi due raggi nel campo Euclideo.

La considerazione dei punti all'infinito dei raggi suddetti equivarrebbe dunque ad una costruzione mediante la quale si otterrebbe da essi un' altra figura rettilinea nel campo Euclideo intorno al punto R, di cui la prima sarebbe parte. Ma poichè noi possiamo trattare la geometria del campo finito indipendentemente dalle nostre ipotesi sull'infinito e sull'infinitesimo, come abbiamo mostrato per il piano nelle note contrassegnate dai numeri romani, e d'altronde i due raggi colla costruzione della def. I del n. 9 determinano una sola figura (rettilinea, la quale, indipendentemente dai due raggi (oss. V, 15) é il piano (coroll. III, teor. V, 46)), così diamo la seguente ipotesi, con cui stabiliamo l'indipendenza del campo finito intorno ad un punto dato S dai campi infiniti e infinitesimi intorno ad esso, cioè:

Ip. VII. **La figura rettilinea determinata da due rette qua-**

lunque passanti pel punto S in ogni campo finito intorno ad S rimane la stessa relativamente all' unità di questo campo anche considerando i punti nei campi all' infinito o nei campi infinitesimi intorno allo stesso punto S sulle due rette.

Teor. II. L' ipotesi VII vale per ogni punto (dello spazio generale).

La dimostrazione si dà come pel teor. II del n. 31 appoggiandosi al teor. I dello stesso numero.

Coroll. La linea limite assoluta di un punto R del piano Euclideo è una retta (ip. VII e teor. II).

Oss. IV. Con questo coroll. non occorre più tener conto della conv. del n. 49.

Teor. III. Una retta che ha due punti non opposti comuni col piano completo giace nel piano, e viene incontrata da tutte le rette del fascio generatore del piano.

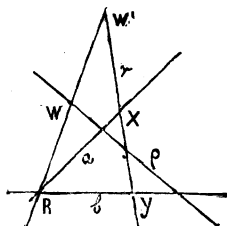



fig. 63

Sia $(R\rho)$ il fascio generatore del piano, e sia ρ la retta limite assoluta di R, la quale divide i raggi del fascio nei punti limiti assoluti di R (def. II e teor. III, 32); e sia r un' altra retta che incontri due raggi a e b del fascio $(R\rho)$ in due punti X e Y all' infinito rispetto alla unità Euclidea (conv. 28).

Ogni retta del fascio $(R\rho)$ è una retta del fascio determinato dai raggi a e b nel campo Euclideo intorno ad R (coroll. teor. II). Il fascio (Rr) dà pure luogo allo stesso piano Euclideo determinato dai raggi a e b (ip. VII e teor. II), e quindi ogni retta RW del fascio $(R\rho)$ coincide relativamente all' unità fondamentale (conv. 28) con una retta del fasciò (Rr), e quindi in senso assoluto ogni retta del fascio Euclideo (ab) rappresenta due rette dei fasci $(R\rho)$, (Rr), che se non coincidono in senso assoluto sono infinitamente vicine (def. e teor. IV, 22). Ma se sono tali rispetto all' unità fondamentale coincidono anche rispetto all' unità infinita (ip. IV e teor. II, 31), dunque è dimostrato che ogni retta del fascio $(R\rho)$ incontra la retta r relativamente all' unità infinita, e inversamente (fig. 63) [1]).

Oss. V. La stessa cosa vale se la retta r incontra uno o tutti e due i raggi a e b del fascio di centro R in un punto infinitamente vicino ad R. Limitandoci come faremo in seguito ai soli campi Euclideo e completo relativamente alle unità di essi, non avremo bisogno dei campi infinitesimi rispetto a quello dell' unità fondamentale (conv. 28).

Oss. VI. Dalla dimostrazione stessa risulta che non si può dire che il teor. III valga in senso assoluto, ma soltanto relativamente all' unità infinita o Riemanniana (def. I, 28), il che ci basta per le ulteriori ricerche. Se si vuole che valga in senso assoluto, o bisogna dare una dimostrazione, o non potendolo colle ipotesi precedenti, bisogna che l' ip. VII valga in senso assoluto anzichè relativamente alle unità dei campi intorno ad S.

---

1) Avremmo preferito di dimostrare direttamente questa proprietà come abbiamo fatto pel piano Euclideo coll' aiuto del teor. I del n. 45, perchè in fondo crediamo che gli assiomi I-V e l' ip. V siano sufficienti a determinare completamente le proprietà del fascio Riemanniano, indipendentemente anche dalla proprietà dell' ip. VI, come sono sufficienti per il piano Euclideo; ma non siamo riusciti a dare una dimostrazione diretta. Non abbiamo fatto però molti tentativi in proposito (Vedi anche cap. III).

Dando una tale dimostrazione non occorrerebbe invocare l' p. VII in questo caso, come ci sembra dover fare per stabilire che la linea σ_∞ all' infinito del piano Euclideo è una retta.

Però non volendo trattare la geometria assoluta che per meglio stabilire il passaggio tra il sistema Riemanniano ed il sistema Euclideo relativi (def. I e oss. III, 27) possiamo supporre che due rette coincidenti rispetto alle due unità di questi sistemi lo siano anche in senso assoluto, eccettochè non sia stabilito che sono distinte in senso assoluto.

Teor. IV. Ogni punto del piano completo è centro di un fascio che contiene tutti i punti del piano.

Sia $(R\rho)$ il fascio generatore del piano (def. I), A un suo punto. Ogni punto di qualunque retta r passante per A nel piano (teor. III) è situato in una retta del fascio $(R\rho)$, e inversamente ogni retta di questo fascio incontra la retta r (teor. III), quindi il fascio di centro A copre interamente il piano.

Coroll. Due rette del piano si incontrano in due punti.

Siano r ed s le due rette, e siano A e B due punti di esse. Le rette del fascio di centro A incontrano tutte le rette del fascio di centro B e quindi la retta s in un punto, e perciò anche nel punto opposto (teor. I).

Teor. V. Tre punti qualunque non in linea retta determinano il piano completo, che è determinato da tre qualunque dei suoi punti non in linea retta.

Siano A, B, C i tre punti dati; il piano del fascio $A.BC$ contiene tutte le rette che uniscono due punti qualunque delle rette del fascio (teor. III), e quindi contiene tutte le rette dei fasci $B.AC$, $C.AB$. Ogni piano poi che contiene i tre punti A, B, C contiene anche le rette del primo, perchè contiene le rette del fascio $A.BC$, e inversamente il piano $A.BC$ contiene le rette di qualunque piano passante per i punti A, B, C. Difatti ogni altra retta di questo piano incontra in due punti opposti ad es. le due rette AB, BC (coroll. teor. IV), che sono situate in ambedue i piani, e quindi la retta data è situata anche nel piano $A.BC$ (teor. III).

Teor. VI. Se una figura del piano è incontrata da ogni retta del piano in due punti opposti, essa è una retta.

Dim. analoga a quella del teor. VI, 48.

§ 2.

Elementi polari e perpendicolari.

69. *Def. I.* Diremo che due punti del piano completo sono *coniugati* quando sono estremi di un segmento retto (def. IV, 29).

Teor. I. I punti coniugati di un punto (che lo sono anche del suo opposto) sono situati in una retta.

Sia R il punto dato, ed X e Y due punti del piano, coniugati di R.

La retta XY è situata nel piano (teor. III), ed i suoi punti determinano con R un segmento retto (teor. I, 31). Che la retta XY abbia la stessa proprietà rispetto al punto opposto di R risulta dalla definizione stessa di punti opposti (def. III, 6 e def. II, 30).

Def. II. La retta del teor. I si chiama *retta polare* o *polare* del punto dato o del suo opposto, e questi si chiamano *poli* della retta.

Oss. I La retta polare è una retta limite assoluta del punto dato nello spazio generale (def. II e oss. III, 2 e teor. III, 32).

Coroll. I. Le polari di due punti coniugati passano rispettivamente pei due punti.

Coroll. II. La polare di un punto della retta polare di un altro punto dato, passa per questo punto.

Difatti un punto qualunque della retta α polare di A è coniugato di A.

Coroll. III. Ogni retta passante per un punto A è retta polare di un punto B della retta polare di A.

Se X è uno dei punti d'intersezione della retta passante per A colla retta α polare di A, e (XB) è un segmento retto, il punto B ha per retta polare la retta data AX (teor. I e def. II).

Coroll. IV. La retta polare di un punto R divide il fascio di centro R e di centro R' opposto al primo in due parti identiche.

Perchè sono figure opposte (teor. III, 30).

Teor. II. Ogni retta ha due poli opposti.

Difatti le polari di due punti B e C della retta α data si incontrano in due punti opposti A e A' (coroll. teor. IV, 68), i quali sono còniugati di B e C e quindi la retta α è polare di A e A'.

Coroll. I. La retta congiungente i poli di due rette è la polare dei punti d'intersezione delle due rette.

Difatti essa ha due poli pei quali passano le polari dei suoi punti (coroll. II, teor. I).

Def. III. Due rette ciascuna delle quali contiene i poli dell'altra si dicono *coniugate.*

Teor. III. Un punto A è vertice di infiniti triangoli i cui lati sono le polari dei vertici opposti.

Se B e C sono punti coniugati della retta polare di A, il che è possibile per ogni punto della retta in due modi (def. I), la polare di B passa per A e C, e quella di C per A e B.

Def. IV. Un triangolo che soddisfa al teor. III si chiama *coniugato polare*, o semplicemente *polare.*

Coroll. I. I lati di un triangolo polare sono due a due coniugati ed uguali ad un segmento retto.

Coroll. II. Due triangoli polari sono uguali in sei maniere diverse.

Difatti se ABC, $A'B'C'$ sono i due triangoli, BCA, CAB, ACB, BAC sono uguali al triangolo ABC, perchè hanno sempre i lati uguali (teor. III, 17), e perciò anche al triangolo $A'B'C'$. In altre parole si possono stabilire sei corrispondenze d'identità fra i due triangoli (oss. III, 15).

Teor. IV. I segmenti di una retta del piano completo servono a misurare gli angoli intorno ai suoi poli.

Difatti ai segmenti uguali della retta corrispondono angoli uguali intorno ai suoi poli, perchè i triangoli che ne risultano sono uguali per avere i tre lati uguali (teor. III, 17) e quindi anche gli angoli corrispondenti (teor. I, 42), e inversamente; mentre a segmenti disuguali corrispondono angoli che stanno nella stessa relazione di disuguaglianza.

Coroll. I. Le rette che congiungono un punto con due punti coniugati della polare di esso, sono ad angolo retto.

Difatti due punti coniugati sono estremi di un segmento retto (def. I e def. VIII, 38).

Coroll. II. Gli angoli di due rette hanno rispettivamente due rette bisettrici perpendicolari fra loro.

Dim. analoga a quella del teor. VII, 41; basta sostituire alla retta all'infinito la polare dei vertici degli angoli delle due rette.

Teor. V. Due rette coniugate sono perpendicolari, e inversamente.

Siano A e A', B e B' i poli delle due rette α e β, per dato A e A' sono situati in β; B e B' in α (def. III). Il segmento (AB) é dunque retto, e le due rette sono perciò perpendicolari nel loro punto d'intersezione,

Inversamente due rette perpendicolari α e β sono tagliate dalla polare dei loro punti d'incontro (coroll. teor. IV, 68) negli estremi di un segmento retto (teor. IV), i quali sono rispettivameute i poli di α e β, dunque ecc. (def. III).

Coroll. I lati di un triangolo polare sono perpendicolari fra loro.

Perchè sono due a due conjugati (coroll. I, teor. III).

Teor. VI. Le rette passanti per un punto A sono perpendicolari alla retta polare di A, e inversamente.

Sia A il punto dato, α la sua polare, β una retta passante per A che deve incontrare α in due punti opposti C, C', (coroll. I, teor. IV, 68). I poli B e B' di β sono situati in α (coroll. III, teor. I), e quindi sono estremi con A di un segmento retto, e perciò la retta β è perpendicolare in C e C' alla retta α (teor. IV).

E inversamente, ogni perpendicolare ad una retta α è coniugata con questa retta (teor. V), e quindi essa passa pei poli di α (def. III).

Coroll. I. Le polari dei punti di una retta sono perpendicolari a questa retta.

Difatti le polari dei punti di una retta sono rette passanti pei poli di questa retta (coroll. II, teor. I).

Coroll. II. Per ogni punto passa una sola perpendicolare ad una retta che non sia la polare del punto.

È la retta che congiunge il punto coi poli della retta (teor. II; teor. II, 30).

Coroll. III. Due rette del piano completo hanno una perpendicolare comune.

È la retta che congiunge i poli delle due rette (teor. II; teor. II, 30).

§ 3.

Identità del piano intorno ai suoi punti.

70. *Teor. I. Tutti i fasci completi sono identici.*

Difatti siano R e R', ρ e ρ' i punti e le loro rette polari nei due piani $(R\rho)$, $(R'\rho')$; per l'identità delle rette ρ e ρ' (teor. I, 8 e ip. III) e per le distanze uguali dei punti R e R' dalle loro polari, si può stabilire mediante il teor. III dei n. 17 e 16 una corrispondenza d'identità fra le due figure $(R\rho)$ e $(R'\rho')$,

facendo corrispondere R a R' e i punti di ρ ai punti di ρ'. Dunque le due figure $(R\rho)$, $(R'\rho')$ sono identiche (teor. III e coroll. II, teor. II, 15).

Coroll. I. Tutti i piani completi sono identici (def. I, 68).

Teor. II. Ogni fascio completo è identico nella posizione delle sue parti, e continuo.

Difatti tale è la proprietà della retta polare dei centri del fascio (teor. IV, 69).

Coroll. I. Ogni retta di un fascio lo divide in due parti identiche.

Perchè i suoi punti d'incontro colla polare dei vertici del fascio sono punti opposti (coroll. teor. IV, 68).

Coroll. II. Il piano è identico nella posizione delle sue parti intorno ad ogni suo punto.

§ 4.

Parti del piano completo rispetto ad una sua retta. Parte interna ed esterna di un triangolo.

71. *Teor. I. Ogni retta divide il piano in due parti uguali. I punti di una parte hanno per punti opposti quelli dell'altra.*

Difatti la retta data ρ ha due poli R e R'. Le figure $(R\rho)$, $(R'\rho)$ costituiscono l'intero piano (def. I, 68). Ogni punto X di ciascuna di esse, per es. $(R\rho)$, ha, come si vede facilmente, il suo punto opposto nella seconda, le figure $(R\rho)$ e $(R'\rho)$ sono dunque figure opposte (def. II, 30) e perciò uguali (teor. III, 30).

Def. I. Le parti di piano date da quelle di un fascio di centri R e R' determinate dalla loro retta polare ρ, si chiamano *parti del piano rispetto alla retta* ρ.

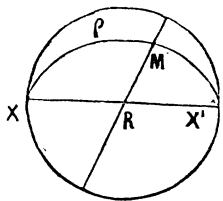



fig. 64

Oss. I. La retta polare ρ di un punto R può essere rappresentata da una circonferenza nel campo finito Euclideo, il cui raggio dobbiamo supporre corrisponda ad un segmento retto (def. IV, 29). La metà $(R\rho)$ del piano completo nella quale è situato il punto R viene rappresentata dal cerchio stesso (fig. 64).

Se r è una retta qualunque del piano completo, essa incontra la retta ρ in due punti opposti X e X' (coroll. teor. IV, 68), e la retta RX deve passare anche pel punto X'. Le metà delle rette passanti per R nella parte di $(R\rho)$ possiamo rappresentarle mediante i diametri. Scelto un punto M della retta r, il punto M' opposto giace nella parte opposta, che non è rappresentata nel disegno.

La circonferenza suddetta può quindi rappresentare anche la retta all'infinito del piano Euclideo. È escluso in questa rappresentazione che la circonferenza possa essere considerata come la prima circonferenza all'infinito, perchè una retta che unisce due punti all'infinito del campo Euclideo è tutta all'infinito, e quindi il campo Euclideo è in questa rappresentazione il campo infinitesimo intorno al punto R stesso.

Coroll. Una retta non può essere tutta situata dalla stessa parte rispetto ad una retta.

Sia ρ la retta che divide il piano in due parti, R e R' i suoi poli. Se M

è un punto di un'altra retta r situato in una delle parti suddette, ad es. $(R\rho)$, il punto opposto M' giace nella parte opposta $(R'\rho)$.

Teor. II. Una retta giace per metà nelle parti opposte del piano rispetto ad ogni retta di esso.

Se colle indicazioni precedenti X e X' sono i punti d'intersezione della retta r colla retta ρ (coroll. teor. IV, 68), ed M è un punto di r situato nella metà $(R\rho)$ del piano (teor. I), la metà della retta XMX' è tutta situata in questa parte. Basta osservare che tutti i punti della metà $(R\rho)$ del piano formano con R un segmento minore di un retto, se non sono situati sulla retta ρ stessa (def. I, teor. I e def. II, 69). Se un punto M_1 della metà (XMX') della retta r fosse ad una distanza maggiore di un retto, in (MM_1) vi dovrebbe essere un altro punto Y, distinto quindi da X e X', tale che (RY) sarebbe un segmento retto (teor. VII, 13), vale a dire il punto Y sarebbe situato sulla retta ρ (teor. I e def. II, 69), ossia le due rette r e ρ avrebbero oltre X e X' il punto Y (e quindi anche l'opposto) in comune; il che è assurdo (teor. II, 30 opp. teor. II, 14) (fig. 64).

Oss. II. Possiamo immaginare rappresentato nel disegno tutto il piano completo come indica la fig. 65. Se S e S' sono due punti opposti σ la loro polare; la metà delle rette situate nella parte $(S\sigma)$ (teorema II) la indichiamo con tratto continuo, quella situata dalla parte opposta con tratto interrotto, in modo che si veda che due rette si incontrano in due punti opposti, ad es. A e A', come indica la figura.

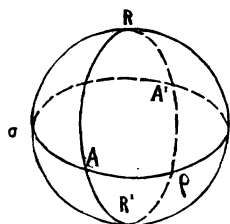



fig. 65

Def. II. Quando due punti sono situati da parti opposte rispetto ad una retta nel piano si dice che sono *separati* da questa retta.

Coroll. I. Due punti opposti nel piano sono separati da una retta qualunque che non passa per essi.

Oss. III. Vale il coroll. III del teor. II, 50 coll'analoga dimostrazione tenendo conto del coroll. teor. IV, 68.

Coroll. II. Un settore angolare può essere generato congiungendo il vertice C coi punti di ogni segmento i cui estremi sono sui lati del settore.

La dimostrazione è analoga a quella data nel piano Enclideo (coroll. IV teor. II, 50).

72. *Teor. I. Le parti di piano determinate dai settori angolari di un triangolo limitate dai lati opposti coincidono.*

Come nel piano Euclideo (teor. I. 51).

Oss. I. Valgono le stesse def. I e II del n. 51. Valgono pure i coroll. I, II, III e IV del teor. I, 51 colle stesse dimostrazioni. È da osservare che nel piano completo tre rette determinano non sette regioni ma otto, e che queste sono tutte dei triangoli. Indicando con $A'B'C'$ i punti opposti d'intersezione delle tre rette due a due, e considerando che i lati di un triangolo sono sempre i segmenti minori (def. II, 9), e quindi per la formazione del triangolo non sono nemmeno uguali alla metà della retta (teor. II, 30) gli otto triangoli sono:

$$ABC,\ A'BC,\ AB'C,\ ABC'$$
$$A'B'C',\ AB'C',\ A'BC',\ A'B'C$$

che sono due a due opposti ed uguali (def. I e teor. III, 30).

Teor. II. Ai punti interni di un triangolo sono opposti i punti interni del triangolo opposto.

I due triangoli ABC, $A'B'C'$ sono uguali (teor. III, 30), e quindi ad un punto E del lato (BC) è opposto un punto E' del lato $(B'C')$ (teor. IV, 29), e perciò al segmento (AE) è opposto il segmento $(A'E')$ (def. II, 29) situato nel settore $\widehat{B'A'C'}$. Dunque se D è un punto interno del triangolo ABC in (AE), il suo opposto D' giace in $(A'E')$ (teor IV, 29) nell'interno del triangolo $A'B'C'$ (def. I, 51 e oss. I).

Coroll. Se un punto D è esterno ad un triangolo e non è interno al triangolo opposto, una sola delle tre rette che lo congiungono coi vertici incontra il lato opposto in un punto interno.

Vale l'analoga dimostrazione del coroll. V, del teor. I del n. 51.

Teor. III. Se una retta del piano di un triangolo che non passa per alcuno dei vertici incontra un lato in un punto interno (e in uno esterno) incontra gli altri due l'uno in un punto interno (e in uno esterno) e l'altro in punti esterni.

Vale la stessa dim. del teor. analogo del piano Euclideo (teor. II, 51), ricordando che una retta non può mai incontrare il lato di un triangolo in due punti interni, perchè bisognerebbe che questo lato fosse maggiore della metà della retta, contrariamente a ciò che fu stabilito (def. I, 9 e def. II e oss. 6).

Oss. II. Valgono pure colla stessa dimostrazione il coroll. I del teor. II, il teorema III e il relativo corollario del n. 51.

Teor. IV. I lati di un triangolo polare dividono il piano in otto triangoli polari.

Difatti i tre lati si incontrano due a due in 6 punti due a due opposti, cioè A,A'; B,B'; C,C', e i triangoli ABC, $A'BC$, $AB'C$, ABC'; $A'B'C'$, $AB'C'$, $A'BC'$, $A'B'C$ sono *polari* per avere i tre lati uguali ad un segmento retto (coroll. I, teor. III, 69).

§ 5.

Segmenti e distanze normali.
Proprietà dei triangoli rettangoli.

73. *Def. I.* La perpendicolare condotta da un punto P ad una retta r la incontra in due punti opposti M e M'; i segmenti (PM) e (PM') si chiamano i *segmenti normali* del punto P alla retta r; M e M' i *piedi* di essi o della perpendicolare.

Le distanze (PM) e (PM') si chiamano distanze *normali* di P alla retta r, od anche semplicemente *distanze*. Gli altri segmenti, o le altre distanze, date con P dagli altri punti di r si chiamano segmenti, o distanze, *obliqui*.

Oss. I. Se la retta r è la polare di P, tutti i suoi punti danno con P un segmento retto (teor. I e def, II, 69), e sono normali ad r (teor. VI, 69). Parlando dunque senz'altro di segmenti normali e obliqui di un punto P ad una retta intenderemo evidentemente che non si tratti della polare di P.

Teor. I. I segmenti normali da un punto ad una retta sono supplementari, e se sono uguali ad un segmento retto, la retta è polare del punto dato.

Difatti per le indicazioni precedenti MPM' è metà della retta (def. III, 6). Se $(PM) \equiv (PM')$, ossia se (PM) e (PM') sono segmenti retti, la polare π di P passa per M e M', e le due rette r e π sono ambidue perpendicolari alla retta PM in M e M', ciò che è impossibile se sono distinte (coroll. II, teor. VI, 69).

Teor. II. Dei segmenti normali di un punto P ad una retta r il minore è il minimo e il maggiore è il massimo tra i segmenti obliqui. Di due segmenti obliqui è maggiore quello che ha il suo punto in r più lontano dal piede del segmento normale minimo, o più vicino a quello del segmento normale massimo, e inversamente.

Siano X e X' i punti d'incontro della retta r colla polare π di P; (PX) e (PX') sono segmenti retti (teor. I e def. II, 69). I punti X e X' sono i poli della retta PM normale alla retta r, perchè la retta PM e la retta r sono coniugate (teor. V, 69).

fig. 66

Sia (PM) il segmento normale minimo; se nel segmento (MX) vi fosse un punto A tale che $(PA) < (PM)$, in (AX) vi sarebbe un punto A_1 tale che (PA_1) sarebbe uguale a (PM) (teor. VII, 13), perchè (PX) essendo retto è maggiore di (PM) (teor. I), e quindi anche di (PA) (int. d, 61). Ma il triangolo PMA_1 sarebbe isoscele e quindi per P passerrebbe un'altra perpendicolare alla retta r (teor. IV, 42), il che è assurdo (coroll. II, teor. VI, 69).

Se (PM) è il minimo, evidentemente (PM') è il massimo. Facilmente si vede che sussiste anche la seconda parte del teorema (vedi dim. teor. VII, 54) (fig. 66).

Teor. III. I segmenti obliqui di un punto ai punti di una retta, equidistanti dai piedi della normale del punto alla retta, sono uguali e formano lo stesso angolo colla perpendicolare.

Come nel campo Euclideo (teor. III, 54).

Oss. II. Vale la stessa def. II del n. 54.

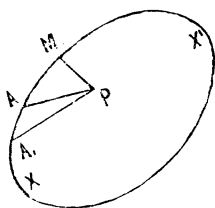
Teor. IV. Le proiezioni di due segmenti obliqui uguali sono uguali.

Come nel campo Euclideo (teor. IV, 54).

Oss. III. Vale pure nel piano completo colla stessa dimostrazione il teor. V del n. 54 coi suoi corollari. Non vale invece qui il teor. VI dello stesso numero (oss. I, 26).

Teor. V. Non vi può essere nel piano completo un quadrangolo coi quattro angoli retti.

Supponiamo che vi sia, e sia $ABA'B'$. Le rette AA', BB' essendo perpendicolari ad AB devono passare per i poli R e R' di AB, ed essendo pure perpendicolari alla retta $A'B'$, esse passano pei poli di $A'B'$ (teor. VI, 69). Ma i poli delle due rette AB, $A'B'$ sono distinti come lo sono le due rette (teor. II, 69), dunque le rette AA', BB' avrebbero quattro punti comuni, il che è assurdo (teor. II, 30).

Oss. IV. Osserviamo che questa dimostrazione è indipendente dalla somma degli angoli di un triangolo.

Teor. VI. Due triangoli rettangoli che hanno un cateto e l'ipotenusa uguali sono uguali.

Come nel campo Euclideo (teor. II, 55).

Oss. V. **È da osservare soltanto che vi sono anche dei triangoli rettangoli nei quali un cateto è maggiore dell'ipotenusa. Infatti se r ed R sono una retta e un punto fuori di essa ed (RM) è il segmento normale massimo, preso un punto A della retta r, ARM è un triangolo rettangolo in M, ma (RA) che è l'ipotenusa è minore del cateto (RM) (teor. II).**

Def. II. Se α e β sono due rette e AB la perpendicolare comune (coroll. III, teor. VI, 69) C e C', D e D' i punti d'intersezione di AB con α e β, questi punti determinano in AB quattro segmenti consecutivi, due a due opposti e due a due supplementari. Essi si chiamano segmenti *normali* delle due rette.

Teor. VII. Due rette hanno due segmenti normali supplementari, che sono il segmento minimo e il segmento massimo fra i loro estremi rispetto all'una e all'altra retta, e che misurano gli angoli delle due rette.

Se (CD) è il segmento normale minore alle due rette α e β, (CD) è la distanza minima di C rispetto alla retta β, e di D rispetto alla α.

Vi sono certo dei segmenti (EF) minori di (CD) i cui estremi sono in α e β, perchè le rette si incontrano in due punti (coroll. teor. IV, 68), ma (EF) non può essere insieme per E e per F il segmento minimo dalle rette β ed α. Se il punto d'intersezione si considera come due punti E ed F coincidenti sulle due rette, in questo caso il segmento (EF) è nullo, ma non si ha più la retta EF.

Che poi i segmenti normali misurino l'angolo delle due rette è chiaro per il fatto che se X è uno dei punti d'intersezione delle due rette, CD è la retta polare del punto X (teor. IV, 69).

Coroll. I. Due semirette hanno un solo segmento normale, che dà la distanza minima o massima tra i punti delle due semirette secondochè il segmento normale è minore o maggiore di un retto.

Coroll. II. I segmenti normali di due rette coniugate sono segmenti retti, e inversamente.

Difatti le due rette sono perpendicolari (teor. V, 69).

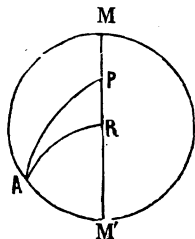
Inversamente, se un segmento normale a due rette è retto, esse sono perpendicolari (teor. IV, 69) e quindi sono coniugate (teor. V, 69).

Oss. VI. **Il teor. I del n. 54 va sostituito col seguente:**

Teor. VIII. Se in un triangolo rettangolo un cateto è minore di un segmento retto, l'angolo opposto è acuto; è ottuso se il cateto è maggiore di un segmento retto.

Sia AMP il triangolo rettangolo in M, e sia M' il punto opposto di M, $(PM') > (PM)$. Il punto R medio di (MM') è situato nel segmento (PM'), ed R è un polo della retta MA (teor. I).

fig. 67

Ora, la retta RA è perpendicolare alla retta MA (teor. VI, 69), e siccome è $(MP) < (MR)$, il segmento (AP) è interno al settore $\widehat{MAR}$ (coroll. II, teor. II, 71), e perciò $\widehat{MAP}$ è minore dell'angolo retto $\widehat{MAR}$. Nel triangolo PAM', che è rettangolo in M', ove (PM') è maggiore di un segmento retto, l'angolo PAM' è invece ottuso (fig. 67).

Coroll. Se il cateto di un triangolo rettangolo è un segmento retto, anche l'ipotenusa è un segmento retto. Gli angoli che il cateto e l'ipotenusa formano con l'altro cateto sono retti.

Difatti il secondo cateto è la polare del vertice opposto (teor. I; teor. VI, 69).

§ 6.

Figure simmetriche rispetto ad una retta nel piano completo.

74. *Oss. I.* Con dimostrazioni analoghe valgono i teor. IX e X del n. 55.

Oss. II. Vale la stessa definizione di figure simmetriche data nel piano Euclideo rispetto a una retta α (def. I, 56).

È da osservare che due punti A e A' rispetto ad una retta α sono doppiamente simmetrici, cioè rispetto ai due punti d'intersezione della retta AA' con la retta α.

Teor. I. Un segmento ha per figura simmetrica rispetto ad una retta un altro segmento uguale al primo. Le rette dei due segmenti si incontrano in due punti dell'asse di simmetria, e formano con esso angoli uguali.

La dim. è analoga a quella del teor. I del n. 56.

Oss. III. Vale pure colla stessa dimostrazione il teor. II del n. 56.

§ 7.

La circonferenza — Punti comuni di due circonferenze.

75. *Oss. I.* Vale anche nel piano completo la definizione della circonferenza data nel campo Euclideo intorno ad un punto di esso (def. I, 57). È soltanto da notare che i punti di una circonferenza distano ugualmente anche dal punto opposto del centro, e che quindi una circonferenza nel piano completo ha due centri, e perciò anche due raggi e due cerchi.

Conv. I. Per centro e per cerchio di una circonferenza intenderemo sempre quelli rispetti ai quali il raggio è minore.

Oss. II. Se il raggio è uguale ad un segmento retto, la circonferenza, diventa come si sa, la retta polare del centro (teor. I, def. I, 69).

Teor. I. I punti di una circonferenza sono equidistanti dalla retta polare del centro.

La distanza infatti di ogni punto della circonferenza dalla polare del centro è misurata sul raggio della circonferenza passante pel punto dato, che è perpendicolare alla polare anzidetta (teor. VI, 69), quindi è uguale alla differenza del raggio da un segmento retto (teor. I, def. II, 69).

Oss. III. Nel piano Euclideo vale la stessa proprietà rispetto alla retta all'infinito del piano, che si può ritenere come retta limite assoluta del centro (oss. I, 39).

Oss. IV. Valgono con analoghe dimostrazioni tenendo conto della def. I, i teoremi dati sulla circonferenza e sui punti comuni di due circonferenze dei n. 57-60, salvo che invece della retta all'infinito, laddove di essa si fa uso, si adoperi la polare del centro della circonferenza. Non vale però il teor. IX e non occorre qui il teor. XII del n. 59. Nè fa bisogno il teor. III del n. 57 che si appoggia al teor. VIII, 55 e che

abbiamo ancora da dimostrare [1]). Il teor. I, 58 si può dimostrare però indipendentemente dal suddetto teorema riferendosi al teor. II, 57.

Oss. V. Ad una circonferenza di centro C e di raggio r corrisponde un'altra circonferenza dello stesso raggio e col centro nel punto opposto di C, che contiene i punti opposti della prima. Una retta che incontra una delle due circonferenze in un punto incontra l'altra nel punto opposto ed una tangente in un punto, all'una è pure tangente all'altra nel punto opposto, e rispetto ad essa le due circonferenze giacciono da parti opposte.

§ 8.

Altre proprietà dei triangoli del piano completo.

76. *Teor. I. In ogni triangolo la somma di due lati è maggiore del terzo.*

Sia ABC il triangolo, (AB) il lato maggiore. Per gli altri due lati il teorema è evidente. Supponiamo che sia $(AB) > (AC) + (BC)$. I due cerchi di centri A e B e di raggi (AC) e (BC) si incontrerebbero in un punto C, mentre essendo $(AB) \equiv d$, $(AC) = r$, $(BC) = r'$, si avrebbe:

$$d > r + r'$$

ciò che è impossibile (oss. IV, 57 e teor. II, 60). Se $(AB) = (AC) + (CB)$, C è sulla retta AB (teor. IV, 17); dunque bisogna che sia $(AB) < (AC) + (CB)$.

Coroll. Ogni lato del triangolo è maggiore della differenza degli altri due.

Oss. I. Valgono colle stesse dimostrazioni i teor. VI e coroll., teor. VII, teor. VIII del n. 55.

Def. I. Dato un triangolo ABC, i poli A_1, B_1, C_1 dei suoi lati situati dalla stessa parte dei vertici opposti ai lati determinano un triangolo che chiameremo *triangolo reciproco* o *supplementare* del triangolo dato.

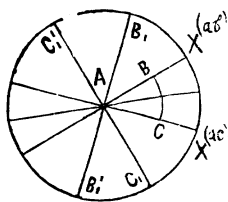



fig. 68

Teor. II. Un triangolo è reciproco del suo reciproco.

Difatti A, B, C sono i poli dei lati B_1C_1, C_1A_1, A_1B_1 del triangolo reciproco (coroll. II, teor. I, 69), e ad es. A è situato dalla stessa parte di A_1 rispetto a B_1C_1, perchè A_1 è dalla stessa parte di A rispetto a BC, e quindi è situato nella parte $A\ \alpha$, ossia $A.B_1C_1$ del piano (fig. 68).

Oss. II. Nel disegno (fig. 68) i punti B e C sono situati nella parte $(A\alpha)$ del piano, ma la dimostrazione vale anche nel caso che uno o tutti e due siano situati nella parte opposta $(A'\alpha)$, essendo A' opposto di A.

Teor. III. Gli angoli di un triangolo sono misurati dai segmenti supplementari dei lati del triangolo reciproco.

Indichiamo con $X^{(ab)}$, $X^{(ac)}$, i punti d'incontro dei lati (AB), (AC) del triangolo ABC colla retta polare α di A, prolungati, se occorre, a partire da A. I poli B_1 e C_1 di AC e AB sono situati in α, e la loro distanza è supple-

1) Vedi oss. I, 76.

mentare di quella dei punti $X^{(ab)}$, $X^{(ac)}$. Difatti se l'angolo $\widehat{BAC}$ è acuto, allora $\widehat{B_1AC_1}$ comprende l'angolo BAC, se invece è ottuso allora $\widehat{B_1AC_1}$ è compreso nell'angolo BAC. Tanto nell'uno come nell'altro caso non si ha mai $(B_1C_1) \equiv (X^{(ab)}X^{(ac)})$, e quindi (B_1C_1) è supplementare di $(X^{(ab)}X^{(ac)})$ (fig. 68).

Teor. IV. Due triangoli che hanno gli angoli uguali sono uguali.

Siano ABC, $A'B'C'$ i due triangoli, e $A_1B_1C_1$, $A'_1B'_1C'_1$ i loro triangoli reciproci. Gli angoli dei primi sono misurati dai segmenti supplementari dei lati dei secondi, e quindi per l'ipotesi del teorema i due triangoli reciproci hanno i lati uguali e perciò sono uguali, e con essi i loro angoli corrispondenti che misurano i lati dei triangoli dati (teor. III, 17 e teor. III), dunque essendo uguali i lati di questi triangoli, i triangoli stessi sono uguali (teor. III, 17).

Oss. III. Questa è un'altra proprietà del piano completo che lo contraddistingue dal piano Euclideo, perchè in questo non basta l'uguaglianza degli angoli perchè i triangoli siano uguali, come risulta dal teor. I, 45 e dal teor. I del n. 40.

Teor. V. In ogni triangolo ciascun angolo aumentato di due retti è maggiore della somma degli altri due.

Difatti se ABC è il triangolo, $A_1B_1C_1$ il suo reciproco, si ha:

$$(A_1B_1) < (B_1C_1) + (C_1A_1) \qquad \text{(teor. I)}.$$

e quindi (teor. III)

$$\pi - \widehat{BCA} < 2\pi - (\widehat{ABC} + \widehat{CAB}).$$

da cui:

$$BCA + \pi > \widehat{ABC} + \widehat{CAB}.$$

Teor. VI. In ogni triangolo la somma dei tre lati è minore di quattro segmenti retti.

Si consideri il triangolo $A'BC$, ove A' è il punto opposto di A, si ha:

$$(A'C) + (BA') > (BC) \qquad \text{(teor. I)}$$

quindi $(BC) + (CA) + (AB) < (A'C) + (CA) + (AB) + (BA')$ (def. I, 5 e int. e, 99). Ma $(A'C) + (CA) \equiv (AB) + (BA') \equiv \pi$, dunque il teor. è dimostrato.

Teor. VII. In ogni triangolo la somma degli angoli è maggiore di due e minore di sei retti.

Difatti nel triangolo reciproco $A_1B_1C_1$ di ABC si ha:

$$(A_1B_1) + (B_1C_1) + (C_1A_1) < 2\pi$$

ossia (teor. III)

$$3\pi - (\widehat{ABC} + \widehat{BCA} + \widehat{CAB}) < 2\pi$$

vale a dire

$$\widehat{ABC} + \widehat{BCA} + \widehat{CAB} > \pi.$$

La seconda parte è evidente quando si consideri che nel triangolo nessuno dei suoi angoli può essere uguale a π.

Oss. IV. Mentre dunque nel piano Euclideo la somma degli angoli di un trian-

golo è uguale a due retti (teor. XI, 55), nel piano completo è sempre maggiore di due retti.

Teor. VIII. La somma degli angoli di un triangolo polare è uguale a tre angoli retti.

Perchè i tre lati sono due a due coniugati e perciò perpendicolari (coroll. I, teor. III e teor. IV, 69).

§. 9

I versi degli angoli dei triangoli e dei fasci del piano — Versi del piano — Figure congruenti e simmetriche — Sistemi continui di figure invariabili.

77. *Oss. I.* Valgono nel piano completo i teor. del n. 61, tranne il coroll. III del teor. X, colle stesse definizioni e dimostrazioni, tenendo però conto che un fascio ha due centri e un angolo due vertici, e che nei teoremi suddetti essi vanno considerati soltanto rispetto ad un centro e ad un vertice e che il fascio stesso, o il medesimo angolo, considerato da centri o vertici opposti, ha versi opposti. Pel teor. I basta ricorrere alla dimostrazione di esso data nella nota LXXIV. Abbiamo però nel piano completo quest' altro teorema:

Teor. I. Se in un triangolo si scambia un numero dispari di vertici coi punti opposti, si ottiene un triangolo di verso opposto; se invece si eseguisce un numero pari di scambi, si ottiene un triangolo dello stesso verso del triangolo dato.

Siano dati infatti due triangoli ABC, $A'B'C'$ opposti. Gli angoli $\widehat{BCA}$, $\widehat{BC'A}$ sono di verso opposto (coroll. I, teor. X, 61 e oss. I), quindi i due triangoli ABC, ABC' sono di verso opposto (teor. VIII, 61 e oss. I), così lo sono ABC' $A'BC'$, dunque ABC e $A'BC'$ sono dello stesso verso (teor. VII, coroll. teor. VI, teor. VIII, 61 e oss. I). Ma $A'BC'$ e $A'B'C'$ sono di verso opposto, dunque lo sono anche ABC, $A'B'C'$.

Coroll. Due triangoli opposti sono di verso opposto.

Oss. II. Valgono gli stessi teoremi sulle figure identiche, congruenti e simmetriche colle medesime dimostrazioni tranne il teor. II del n. 63. Vale però anche questo teorema:

Teor. II. Due figure opposte sono simmetriche.

Difatti due triangoli e quindi anche due angoli opposti corrispondenti sono di verso opposto, e perciò le figure opposte sono simmetriche (teor. V, def. I, 62 e oss. II).

Oss. III. Nel piano completo valgono pure le stesse proprietà dei sistemi continui di figure invariabili, date nel campo Euclideo del piano; soltanto manca il sistema parallelo che diventa nel piano completo un sistema circolare, e quindi anche si hanno le stesse proprietà del movimento reale delle figure piane senza deformazione, tranne il movimento di traslazione.

§ 10.

Piani limiti assoluti di un punto.

78. *Teor. I. Tre punti del campo limite assoluto di un punto A determinano un piano situato nel medesimo campo.*

Siano X_∞, Y_∞, Z_∞ i tre punti dati; le rette $X_\infty Y_\infty$, $X_\infty Z_\infty$, $Y_\infty Z_\infty$ sono situate tutte nel campo limite assoluto di A (teor. III, 32), e siccome tutte le rette del piano $X_\infty Y_\infty Z_\infty$ si appoggiano alle tre rette, ciascuna in due punti opposti (coroll. teor. IV, 68), così deriva che ognuna di queste è retta limite assoluta di A, e perciò ogni punto del piano $X_\infty Y_\infty Z_\infty$ è situato nel campo suddetto, vale a dire tutti i suoi punti determinano un segmento retto col punto A.

Capitolo III [1]).

Altre considerazioni sui sistemi di Euclide, di Lobatschewsky e di Riemann.

---

§ 1.

Assioma delle parallele nel sistema di Lobatschewsky. — Perpendicolare ad una retta, che la incontra e passa per un punto fuori della retta nei tre sistemi di geometria, indipendentemente dalle proprietà del fascio di raggi e del piano.

79. *Oss. I.* Oltre agli assiomi I-V che valgono nei tre sistemi di geometria (def, I 27), per caratterizzare il sistema di Lobatschewsky bisogna dare l'assioma delle parallele conformemente alla def. I del n. 27, come pel sistema Euclideo l'abbiamo data nella nota XVI, mantenendoci nel solo campo finito (nota, I) e indipendentemente dal piano [2]).

Ass. VI. La retta che unisce un punto X di una retta data r con un punto R fuori di essa ha una retta limite (def. I, 12), *allorquando il punto X percorre tutta la retta in uno dei suoi versi, ed ha un' altra retta limite distinta dalla prima allorquando la percorre nel verso opposto.*

Oss. II. Dai teor. I, 4, teor. VIII, 13 e dal coroll. I, della def. I, 13 risulta che la retta è aperta, e quindi vale per essa il teor. I, 14,

Def. I. Le due rette limiti suddette si chiamano *parallele* del punto R alla retta r.

80. *Oss. I.* Per assioma delle parallele nel senso Euclideo considereremo ora quello analogo al suddetto, ammettendo però che le due rette limiti coincidano, come abbiamo dimostrato, sia colla def. II, 26 sia coll' ass. della nota XVI (teor. II, 46 e nota XLIV).

Def. I. Fra i segmenti determinati dai punti X di una retta con un punto R fuori di essa si dice *massimo* (o *minimo*) ogni segmento (RA) pel quale i segmenti (RX), ove i punti X appartengono ad un segmento s sufficiente-

---

1) Di questo capitolo per le ragioni dette nell'oss. II del n. 27 non ci serviremo nella seconda parte del nostro libro.

2) Colle nostre ipotesi astratte è escluso il sistema di Lobatschewsky intorno ad un punto qualunque dello spazio generale (oss. II, 27 e teor. II, 31). Premettendo invece le ip. V e VI (27 e 30) e limitando le ip. I e II alle coppie di punti con una distanza della stessa specie o infinitesima di 1 ordine rispetto all'intera retta (int. def. I, 94) in modo che nel campo infinitesimo di 2 ordine intorno ad ogni punto S esista un solo punto per il quale passano delle rette assolute, è reso possibile in questi campi infinitesimi e in quelli di ordine superiore il sistema di Lobatschewsky. Ma in questo caso esisterebbero punti e rette di categorie diverse, di modo che non vi sarebbe la stessa uniformità come colle ipotesi adottate.

mente piccolo sulla retta da una parte e dall'altra di A e coll'estremo A, sono minori (o maggiori) di (RA).

Teor. I. Data una retta nei sistemi di Euclide e di Lobatschewsky, esiste una sola perpendicolare che la incontra e contiene un punto qualunque fuori di essa. Il segmento normale è il solo minimo.

Siano AB la retta ed R il punto dati. Considerando la retta AB in un dato verso, ad es. in quello dato dal segmento (AB) (int. ind. I, 64), vi è un raggio r' passante per R che è limite dei raggi che passano per R e incontrano la retta AB (ass. VI, oss. II, 78; oss, I). Similmente nel verso opposto si ha un raggio analogo r''.

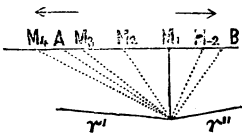



fig. 69

Quando un raggio RX, essendo X sulla retta, si accosta indefinitamente al raggio r', (RX) non può mantenersi costante, altrimenti X dovrebbe accostarsi indefinitamente ad un punto in r' ad ugual distanza da R (coroll. II, teor. IV, 12), il quale dovrebbe appartenere anche alla retta AB (teor. V, 10), il che per l'assioma delle parallele non è possibile. Nè può (RX) da un suo stato (RX_1) mantenersi minore di un segmento dato, perchè X avrebbe in r' un punto limite ad una distanza minore di (RX), e un tale punto sarebbe anche sulla retta AB. Dunque (RX) diventa indefinitamente grande, perchè deve diventare più grande di ogni segmento dato.

Scelto quindi un segmento (RA), da r' a (RA) il segmento (RX) diminuisce, mentre aumenta da (RA) verso r'', anche se da (RA) verso r'' diminuisce ancora. Vi deve dunque essere almeno un segmento minimo (def. 1). Infatti se (RB) è maggiore di (RA) (un tale segmento come abbiamo detto deve esistestere), se (RA) non è il minore dei segmenti (RX) il cui estremo X è in (AB), vi saranno altri punti $A_1, A_2, A_m,...$ pei quali $(RA) > (RA_1) > (RA_2) > ... > (RA_m) ...$ E se (RA_m) non è ancora un minimo, la serie $AA_1 ... A_m ...$ avrà un elemento limite Y che non può conincidere con B e tale che (RY) sarà minore dei segmenti precedenti e maggiore dei segmenti immediatamente seguenti, di quei segmenti almeno che hanno i loro punti X in un segmento (YY') in (AB) sufficientemente piccolo, eccetto che essi non siano tutti uguali in (YY') a (RY), il quale caso si presterebbe ancora meglio al nostro ulteriore ragionamento.

In segmenti sufficientemente piccoli (YY') e (YY'_1) da parti opposte di Y in AB vi devono essere almeno due punti X e X_1, tali che $(RX) \equiv (RX_1)$, perchè se per es. scelto il punto X in (YY') si avesse $(RX') > (RX)$ in (YB), essendo B un punto qualunque della retta AB nel verso del segmento (YY'), vi sarebbe un punto X_1 tale che $(RX_1) \equiv (RX)$ (coroll. I, def. I e teor. VII, 13). E un segmento $(RX') > (RX)$, per quanto si è detto, deve sempre esistere.

Il triangolo XRX' è isoscele, e perciò il punto medio M di (XX') dà una perpendicolare passante per R alla retta AB (teor. IV, 42 e nota XXXVI).

Se vi è un'altra perpendicolare, sia M_2 il suo piede e sia $(M_2M_1) \equiv (M_1M_{-2})$ (teor II, 4). Il punto M_{-2} è il piede di un'altra perpendicolare perchè i due triangoli M_2M_1R, $M_{-2}M_1R$ sono uguali per avere il lato (M_1R) comune, i lati uguali (M_2M_1) e $(M_{-2}M_1)$ e le coppie $M_2\dot{M}_1R$, $M_{-2}\dot{M}_1R$ uguali (teor. IV 42 e nota XXXVI).

Se $(M_3M_2) \equiv (M_2M_1)$ nel verso da M_2 a M_1, i due triangoli M_3M_2R, M_1M_2R sono ugnali per la stessa ragione, dunque $(RM_3) \equiv (RM_1)$, e (RM_3) è pure per-

pendicolare alla retta AB. Così costruendo i segmenti (M_3M_4), $(M_4 M_5)$ ecc. $(M_{n-1}M_n)$ uguali a (M_1M_2) si ha $(RM_n) \equiv (RM_1)$, e RM_n è perpendicolare alla retta AB. Ogni punto X della retta nel verso dato a partire da M_1 è compreso in un segmento $(M_{n-1}M_n)$ (ass. II, e oss. IV, 4), dunque (RM_n) ha per limite r' coll'aumentare indefinito di n, il che è impossibile essendo (RM_n) costante. Dunque è assurdo che vi siano due perpendicolari.

Si vede ora facilmente che il minimo (RY) deve coincidere con (RM_1). Difatti se Y non coincide con M_1, esso sia ad es. compreso in (AM_1). Scelto in un segmento $(YY') < (YM_1)$ un punto X dalla parte opposta vi è un pnnto X' tale che $(RX) \equiv (RX')$, e quindi essendo isoscele il triangolo XRX' il punto di mezzo di (XX') ci darebbe un'altra perpendicolare.

Teor. II. 1.° *Indipendentemente dall'assioma delle parallele se i punti di un segmento* (AB) *di una retta sono equidistanti da un punto* R *fuori di essa, tutti i punti della retta sono equidistanti dal punto* R*; ed ogni retta passante per* R *che incontra la retta* r *è perpendicolare a questa retta;*

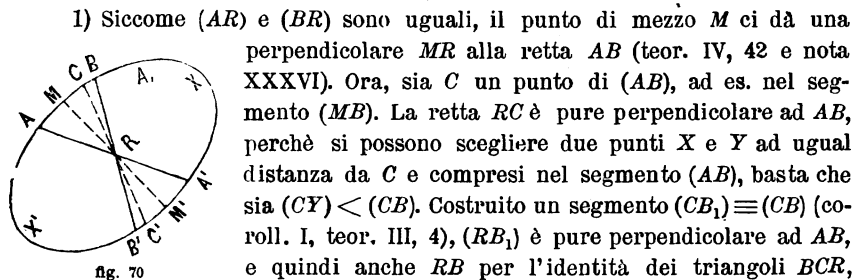
2.° *se la retta è chiusa, la distanza è un segmento retto se due punti opposti non determinano la retta, e la metà di essa se la determinano.*

1) Siccome (AR) e (BR) sono uguali, il punto di mezzo M ci dà una perpendicolare MR alla retta AB (teor. IV, 42 e nota XXXVI). Ora, sia C un punto di (AB), ad es. nel segmento (MB). La retta RC è pure perpendicolare ad AB, perchè si possono scegliere due punti X e Y ad ugual distanza da C e compresi nel segmento (AB), basta che sia $(CY) < (CB)$. Costruito un segmento $(CB_1) \equiv (CB)$ (coroll. I, teor. III, 4), (RB_1) è pure perpendicolare ad AB, e quindi anche RB per l'identità dei triangoli BCR, B_1CR. Similmente per RA.

fig. 70

Si consideri ora il segmento $(BA_1) \equiv (BA)$; dall'uguaglianza dei triangoli ARB, A_1RB si ha $(RA) \equiv (RA_1)$ (coroll. teor. III, 16). Così se Y è un punto qualunque di (BA_1), e si considera il segmento $(BY_1) \equiv (BY)$ nel segmento (BA), si ha $(RY) \equiv (RY_1)$. Dunque tutti i punti del segmento (BA_1) sono equidistanti da R, e le rette che li congiungono col punto R sono perpendicolari alla retta AB.

La stessa cosa vale per il segmento uguale ad (AB) che ha per secondo estremo A nel verso da A a B (teor. II, 4).

Ora, tanto nel caso che la retta sia aperta quanto in quello che sia chiusa (teor. I, 4), un punto qualunque della retta è punto di uno dei segmenti uguali ad (AB) consecutivi sulla retta a partire da A e da B, e perciò la prima parte del teor. è dimostrata.

2). Se la retta è chiusa e se due punti opposti non determinano la retta. (che è il caso da noi prescelto pel sistema assoluto Riemanniano (ip. V e VI)), allora la retta RA incontra la retta AB nel punto opposto A', e si ha $(RA) \equiv (RA')$; e poichè (ARA') è metà della retta, (RA) è un segmento retto (def. IV, 29).

Nel secondo caso del sistema Riemanniano nel quale due punti opposti determinano la retta, il punto A' coincide con A, e (RA) è metà della retta, che

si può chiamare anche in questo caso segmento retto, in relazione agli angoli del fascio di rette.

Oss. II. Vale pure indipendentemente dalle proprietà del piano il teor. I, 31.

Teor. III. Se un segmento normale da R ad una retta chiusa r è retto, tutti i punti di r sono equidistanti da R.

Sia (RM) il segmento normale uguale ad un segmento retto, esso è minimo o massimo, se i punti di r non sono a distanza costante da R, perchè il segmento supplementare del minimo (def. III, 29) è in tal caso un massimo.

I punti ad ugual distanza da M in r sono ugualmente distanti da R (teor. IV, 42, nota XXXVI e coroll. teor. III, 16). Essendo (RM) retto lo è anche il segmento supplementare (RM'), essendo M e M' punti opposti sulla retta (def. III, 6) indipendentemente che essi coincidano o no; e quindi se (RM) è per es. minore di (RA), (RA') è maggiore di (RM'). Ma se $(AM) \equiv (MB)$ in r, si ha $(RA) \equiv (RB)$, dunque fra B e A' vi è un punto X tale che $(RX) \equiv (RM)$, ed il teor. è dimostrato (teor. I, 31 e oss. II).

Teor. IV. Nel caso che la retta chiusa r non abbia un segmento normale uguale ad un segmento retto, per un punto R fuori di essa passa una sola normale che incontra la retta r.

La dimostrazione di questo teorema è analoga a quella del teor. I. Sia (RM_1) un segmento normale il quale dovrà essere minore di un segmento retto, e (RM'_1) il segmento opposto. Eseguendo la costruzione indicata pel teor. I nell'ipotesi che vi sia un'altra perpendicolare RM_2, si ha:

$$(M_1M_2)n < (M_1M'_1) < (MM_1)(n+1) \quad \text{(int. } c'\text{, 81 e oss. IV, 4)}$$

essendo $(RM_n) \equiv (RM_{n+1}) \equiv (RM_1)$ minori di un segmento retto. Ma (RM'_1) è maggiore di un segmento retto, e quindi in $(M_n M'_1)$, $(M'_1 M_{n+1})$ vi dovrebbero essere almeno due punti X e X_1 tali da essere (XR) e (RX_1) retti (coroll. I, def. I e teor. VII, 13), contro il dato (teor. I, 31 e oss. II). Dunque non può essere che vi siano due segmenti normali situati in rette distinte.

Nella stessa maniera che pei sistemi di Euclide e di Lobatschewsky (teor. I) si dimostra che il segmento normale minore di un segmento retto è il solo minimo, e quindi il segmento supplementare il solo massimo [1]).

---

1) Abbiamo dati questi teoremi, oltre che per dimostrare delle proprietà comuni ai tre sistemi di geometria indipendentemente dal piano, anche perchè forse con esse e con quella del teor. I, 43, opportunemente modificata, si ha la via per dimostrare la proprietà del teor. IV, 46 del piano in tutti i sistemi di geometria, come noi siamo riusciti a fare senz' altri assiomi per il sistema Euclideo, basandoci però sulle proprietà delle parallele di questo sistema (teor. I, 45).

Abbiamo però dimostrato le altre proprietà del piano di Riemann ed anche quella anzidetta ammettendo l'ip. VII per un solo punto. Per il piano di Lobatschewsky veggasi il n. seguente.

§ 2.

Osservazioni sul piano di Lobatschewsky — Altre proprietà che contraddistinguono il sistema Euclideo supponendo date le proprietà comuni dei tre piani. — La somma degli angoli del triangolo nel sistema di Lobatschewsky.

81. *Def. I.* Per *fascio di raggi incompleto* nel sistema di Lobatschewsky intendiamo il sistema ad una dimensione di raggi che uniscono i punti di una retta r con un punto R fuori di essa, compresi i raggi paralleli.

Oss. I. Mediante considerazioni analoghe a quelle svolte nella dimostrazione del teor. III della nota XLVI, ma più brevi, si dimostra che i due raggi limiti paralleli condotti da un punto ad una retta r formano lo stesso angolo colla perpendicolare che passa per R e incontra la retta r (teor. I).

Pel fascio incompleto vale anche il teor. I, 43, soltanto che la retta r' (fig. 27) non è una parallela alla retta r, ma una retta che non incontra la retta r (nota XVI). Le parallele condotte da R ad r lo sono anche alla retta r' per l'identità delle due figure Rr, Rr'.

Costruito un altro fascio incompleto col centro in R e con una trasversale (AB') che si appoggia alle due rette precedenti r e r', scelta in modo che sia $(RA) \equiv (RB) \equiv (RB')$ (teor. I, 80 e fig. 27), si ha un *fascio completo.* Il fascio completo ci dà il *piano* e resta da dimostrare la proprietà del teor. IV, 46 (def. I, 46), che quindi noi qui ammettiamo [1]).

Con considerazioni analoghe a quelle svolte per dimostrare il teor. III della nota XLVI e a quelle per la dimostrazione del teor. IV della stessa nota, si dimostra che il fascio completo di Lobatschewsky è identico nella posizione delle sue parti e continuo, donde si ricava che da un punto di una retta si può condurre nel piano una sola perpendicolare alla retta stessa (int. *b*, 99).

Per questa proprietà del fascio completo se ne dimostrano alcune della circonferenza, specialmente quella che riguarda le distanze di un punto dai punti di una circonferenza, come pure si può dimostrare la proprietà relativa ai punti d'intersezione di due circonferenze, in modo analogo a quello tenuto nel sistema Euclideo. Osserviamo anche qui che il teor. I, 58 non dipende dal teor. III dello stesso numero che si appoggia al teor. VIII, 55 che va dimostrato più tardi. Dall'ultimo teorema si deduce la costruzione di triangoli uguali con due vertici corrispondenti in punti qualunque dati nel medesimo piano e in piani diversi; da cui si deduce appunto l'identità di tutti i fasci completi e di tutti i piani (nota LXXII), come pure l'identità delle parti in cui un piano viene diviso dalle sue rette.

Così si dimostra la proprietà fondamentale che in un triangolo ogni lato è minore della somma degli altri due, sia col metodo seguito nel sistema Euclideo (teor. I, 55) sia con quello usato nel sistema Riemanniano. Nello stesso modo si dimostrano gli altri teoremi del n. 55 tranne il teor. XI, valendo però anche nel sistema di Lobatschewsky il suo coroll. che si può dimostrare indipendentemente de esso come fa Euclide e tenendo conto dell'oss. della nota LV.

Teor. I. Se un quadrangolo piano ha i quattro angoli retti, è esclusa l'ipotesi Riemanniana, e i suoi lati opposti sono uguali.

La prima parte del teorema fu già dimostrata trattando del piano completo (teor. V, 73), la quale proprietà vale anche nella seconda forma del si-

1) Vedi nota precedente.

stema Riemanniano; è escluso quindi che la retta sia chiusa, e perciò vale incondizionatamente la proprietà del coroll. del teor. XI del n. 55 (oss. I).

Sia AA_1BB_1 il quadrangolo, e supponiamo che sia $(AB) > (A_1B_1)$. Preso in (AB) il segmento $(AK) \equiv (A_1B_1)$, nel quadrangolo AA_1B_1K gli angoli in A e A_1 sono retti e perciò uguali, quindi $\widehat{AKB_1} \equiv \widehat{A_1B_1K}$ (teor. VI, 17). Ma l'angolo A_1B_1K è minore di un retto, mentre $\widehat{AKB_1}$, essendo esterno al triangolo KBB_1 dovrebbe essere maggiore di un retto, il che è assurdo. Dunque deve essere $(AB) \equiv (A_1B_1)$, e analogamente $(AA_1) \equiv (BB_1)$.

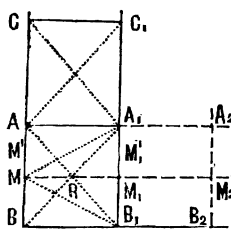



fig. 71

Teor. II. Se un quadrangolo piano ha quattro angoli retti, ogni quadrangolo piano che ha tre angoli retti ha anche il quarto angolo retto.

Sia ABA_1B_1 il quadrangolo con quattro angoli retti. La retta MM_1 che unisce i punti di mezzo di due lati opposti, ad es. (AB), (A_1B_1) è perpendicolare ai due lati (teor. VI, 17).

Il quadrangolo AMA_1M_1 ha pure quattro angoli retti, e quindi la retta che unisce i punti di mezzo di (AM) e (A_1M_1) riesce perpendicolare alle rette AB e A_1B_1. Dividendo dunque (AB) e (A_1B_1) per metà, e così via, le rette che congiungono i punti di divisione corrispondenti sono perpendicolari alle rette AB e A_1B_1. Con un procedimento analogo a quello usato nella dimostrazione del teor. I, 45 si dimostra che ogni retta che unisce due punti dei segmenti (AB) e (A_1B_1) ad ugual distanza da A e A_1 è perpendicolare alle rette AB e A_1B_1.

Costruendo poi sulle rette AB e A_1B_1 nei versi di B ad A, di B_1 ad A_1 il quadrangolo CC_1A_1A tale che sia $(AC) \equiv (A_1C_1)$, esso è identico al quadrangolo AA_1B_1B. Difatti i triangoli CAA_1, BAA_1, sono uguali (coroll. teor. III, 16), e quindi $(CA_1) \equiv (BA_1)$ e $\widehat{CA_1A} \equiv \widehat{BA_1A}$, e perciò anche $\widehat{CA_1C_1} \equiv \widehat{BA_1B_1}$. I triangoli BA_1B_1, CA_1C_1 sono uguali per avere i lati (A_1B_1), (C_1A_1); (BA_1), (A_1C) uguali e la coppia da essi compresa uguale, dunque l'angolo A_1C_1C è retto. Così è retto $\widehat{ACC_1}$ (teor. VI, 17), e quindi $(CC_1) \equiv (AA_1)$ (teor. I), dunque i due rettangoli BB_1AA_1, AA_1CC_1 sono uguali (teor. VII, 17).

Se N è un punto qualunque della retta AB, per es. dalla parte di C rispetto ad A, vi è sempre un numero n tale che

$$(AB)\, n > (AN)$$

Conducendo dunque da N la perpendicolare alla AB, essa è perpendicolare anche alla retta A_1B_1.

Ciò vale pure per le rette AA_1, BB_1.

Dato ora un quadrangolo qualunque $XX'Y'Y$ che abbia tre angoli retti, per es. quelli in X, Y e X', sulla retta AB sia $(AB) \equiv (XY)$, e si tirino per A e B da una parte del piano i segmenti normali (AA_1), (BB'_1) uguali ad (XX') e (YY'), e da A_1 il segmento normale (A_1B_1) ad AA_1 che è dalla stessa parte di AB. Il quadrangolo $AA_1B'_1B$ è uguale al quadrangolo $XX'Y'Y$, perchè i triangoli AA_1B, $XX'Y$; ABB'_1, XYY' sono uguali per avere due lati e la coppia compresa uguale (teor. III, 16), e quindi $(AB'_1) \equiv (XY')$, $(BA_1) \equiv (YX')$, e anche $\widehat{A_1BB'_1} \equiv \widehat{X'YY'}$, vale a dire i due triangoli $A_1BB'_1$, $X'YY'$ sono uguali,

e perciò $(A_1B'_1) \equiv (X'Y')$ (coroll. teor. III, 17), dunque i due quadrangoli suddetti sono uguali (teor. VII, 17).

Se il punto B'_1 non coincidesse col punto B_1, vale a dire se l'angolo in B'_1 del quadrangolo $AA_1B'_1B$ non fosse retto, dovendovi essere per la costruzione precedente un quadrangolo $AA'_1B'_1B$ coi quattro angoli retti, il punto A'_1 non coinciderebbe con A_1, e quindi neppure B'_1 con B_1, e perciò da B'_1 si potrebbero condurre due perpendicolari alla retta AA_1, contro il teor. I del n. 80 (fig. 71).

Teor. III. Se un quadrangolo piano ha quattro angoli retti, vale l'ipotesi Euclidea.

Nella figura descritta precedentemente possiamo riguardare le rette AB, A_1B_1 come due perpendicolari qualunque alla retta AA_1. La retta BA_1 forma con le due rette suddette i due angoli ABA_1, BA_1B_1 uguali, perchè sono uguali i triangoli BAA_1, A_1BB_1 per avere i tre lati uguali.

Ma la retta BA_1 si può considerare come una traversale qualunque alle due rette AB, A_1B_1, perchè è sempre diagonale di uno dei rettangoli precedentemente costruito di cui due lati sono sulle rette AB, A_1B_1.

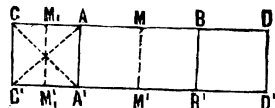
Di più, i triangoli ABA_1, BAB_1 sono uguali per avere due lati e la coppia compresa uguale, e perciò è $\widehat{BAB_1} \equiv \widehat{ABA_1}$, dunque il triangolo ARB è isoscele (teor. V, 55 e oss. I). Tale è per le stesse ragioni il triangolo A_1RB_1. I due triangoli ARB, A_1RB_1 sono uguali per avere i tre angoli e un lato uguali, e perciò $(AR) \equiv (RB_1)$, $(BR) \equiv (RA_1)$. Le due figure $R.AB$, $R.A_1B_1$ sono identiche, e quindi due punti corrispondenti X e X_1 in AB e A_1B_1 sono allineati con R e ad ugual distanza da R. Ma ciò vale per il punto di mezzo di ogni trasversale BA_1 delle due rette AB e A_1B_1, dunque la retta AB è parallela alla retta A_1B_1 nel senso di Euclide e secondo la forma dell'assioma dato nella nota XVI (fig. 71).

Data ora una retta r qualunque del piano ed un punto P pure qualunque fuori di essa, conduciamo da P il segmento normale (PP_1) alla retta r, e scegliamo un punto A tale che abbia rispetto alla retta A_1B_1 un segmento normale (AA_1) uguale a (PP_1). Basta a tal uopo condurre da A la normale ad A_1B_1 (teor. I, 80) e prendere $(AA_1) \equiv (PP_1)$. Le due figure $A.A_1B_1$ e Pr sono identiche (teor. V, 54 e oss. I), e quindi vi è una sola parallela per P alla retta r che corrisponde appunto alla parallela AB condotta da A alla retta A_1B_1. Il teor. è dunque dimostrato.

Teor. IV. Se tre punti di una retta data sono equidistanti da un'altra retta nel piano, vale l'ipotesi Euclidea.

Sia AB la retta data, A, B, C i tre punti di essa che in un piano passante per essa sono equidistanti da tre punti A', B', C' di un altra retta $A'B'$; in modo che per dato A', B', C' sono i piedi delle normali di A,B,C alla retta r', e $(AA') \equiv (BB') \equiv (CC')$.

fig. 72

Nel quadrangolo $AA'BB'$ si ha $\widehat{A'AB} \equiv \widehat{B'BA}$ (teor. VI, 17). Uno dei tre punti A, B, C deve essere contenuto nel segmento

degli altri due, e sia A compreso nel segmento (BC). Nei quadrangoli $AA'CC'$, $BB'CC'$ si ha:

$$\widehat{C'CA} \equiv \widehat{A'AC}; \quad \widehat{C'CB} \equiv \widehat{C'CA} \equiv \widehat{B'BC}$$

Ma si ha pure $\widehat{B'BC} \equiv \widehat{A'AB}$, dunque $\widehat{A'AB} \equiv \widehat{C'CA} \equiv \widehat{A'AC}$, vale a dire le rette $A'A$, $B'B$, $C'C$ sono perpendicolari alla retta AB.

Avendo il quadrangolo $AA'BB'$ quattro angoli retti, il teorema è dimostrato (teor. III) (fig. 72).

Teor. V. Se in un triangolo rettangolo la somma degli angoli è uguale a due retti, in ogni altro triangolo la somma è uguale a due retti, e vale la ipotesi Euclidea.

Difatti sia ABA_1 il triangolo rettangolo in A colla somma degli altri due angoli in B e A_1 uguale ad un retto. Si costruisca il triangolo BA_1B_1 in modo che $\widehat{BA_1B_1} \equiv \widehat{ABA_1}$, $\widehat{A_1BB_1} \equiv \widehat{BA_1A}$. I due triangoli BAA_1 e A_1B_1B sono uguali in tutti e tre i sistemi di geometria per avere un lato e i due angoli adiacenti uguali (teor. X, 55, oss. I, 74 e oss. I), e perciò si ha $(AB) \equiv (A_1B_1)$, $(AA_1) \equiv (BB_1)$, e $\widehat{BAA_1} \equiv \widehat{BB_1A_1}$.

Nel quadrangolo ABA_1B_1 gli angoli in A e in B_1 sono retti; così è retto l'angolo in A_1, perchè si ha per dato $\widehat{ABA_1} + \widehat{AA_1B} \equiv \pi$, e poichè $\widehat{ABA_1} \equiv \widehat{BA_1B_1}$, si ha $\widehat{B_1A_1B} + \widehat{BA_1A} \equiv \pi$. E per l'uguaglianza dei due triangoli ABB_1, B_1A_1A aventi i tre lati uguali, l'angolo in B è pure retto.

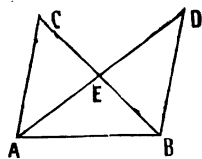
Ma in tal caso vale l'ipotesi Euclidea (teor. III), dunque il teor. è dimostrato (teor. XI, 55).

Oss. II. Senza ricorrere al teor. XI, 55 colla figura costruita nella dimostrazione del teor. II si proverebbe dapprima che in ogni triangolo rettangolo la somma è uguale a due retti, e poi in un triangolo qualunque ABC tirando da uno dei vertici A qualunque di esso la perpendicolare al lato opposto (BC).

Teor. VI. Nel caso della retta aperta la somma degli angoli di ogni triangolo è uguale o minore di due retti.

Sia ABC il triangolo e la somma degli angoli di esso sia $\pi+\alpha$. Si congiunga A col punto di mezzo E di (CB) e si prolunghi di $(ED) \equiv (AE)$. I due triangoli AEC, DEB, sono uguali e perciò la somma degli angoli del triangolo ABD è pure $\pi+\alpha$. L'angolo BAC è stato diviso nelle parti BAE, EAC, e nel triangolo ABD si ha $\widehat{BDA} \equiv \widehat{DAC}$, quindi l'angolo BAD o l'angolo BDA è minore della metà di BAC, od uguale a questa metà nel caso che il triangolo BAC sia isoscele, e CB la base (def. III, 9). Continuando la stessa operazione nel triangolo ABD, dividendo cioè per metà il lato opposto all'angolo minore, e così via nei nuovi triangoli ottenuti, nei quali la somma degli angoli è uguale a $\pi+\alpha$, si arriva ad un triangolo nel quale si trova un angolo più piccolo di $1/2\ \alpha$, e quindi la somma degli altri due dovrebbe essere maggiore di due retti, il che è assurdo per il coroll. I del teor. XI, 55, che vale indipendentemente dal teor. XI stesso e incondizionatamente nei sistemi di Euclide e di Lobatschewsky. Dunque α deve essere o nullo o negativo.

fig. 73

Coroll. La somma degli angoli del triangolo nel sistema di Lobatschewsky è minore di due retti.

Difatti la somma degli angoli non può essere maggiore di due retti (oss. II, 79). E se fosse uguale a due retti, tirando dal vertice dell'angolo maggiore la normale ad un lato si ha un triangolo rettangolo che, come si vede facilmente per la ipotesi fatta avrebbe pure la somma degli angoli uguale a due retti, contro il dato (teor. V).

Oss. III. Si dimostra senza difficoltà che dato un raggio e un punto P fuori di esso si può condurre per P un altro raggio che incontri il raggio dato e formi con esso un angolo più piccolo di ogni angolo dato, quando la retta è aperta. E considerando quindi tre rette due a due parallele nel sistema di Lobatschewsky senza che siano tutte e tre parallele fra loro, come lati di un triangolo coi vertici all'infinito, la somma degli angoli di un tale triangolo è uguale a zero.

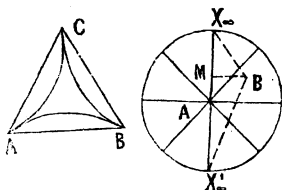



fig. 74

Oss. IV. Il triangolo di Lobatscheswky può essere rappresentato nel triangolo Euclideo nel modo indicato dalla fig. 74, mentre il piano di Lobatschewsky può essere rappresentato dai punti interni di una circonferenza in modo che si conservino gli angoli intorno al punto A centro della circonferenza, ed ogni corda, eccettuati gli estremi, rappresenti una retta nel piano di Lobatschewsky. I segmenti uguali in un raggio (BX_{∞}) sono rappresentati da segmenti che vanno diminuendo verso X_{∞}, e la serie di essi a partire da B ha per segmento limite il segmento (BX_{∞}).

LIBRO III.

LO SPAZIO A TRE DIMENSIONI.

CAPITOLO I.

Lo spazio Euclideo a tre dimensioni.

---

§ 1.

Costruzione della stella e dello spazio a tre dimensioni. Prime loro proprietà.

82. *Def. I.* Sia dato un piano π, e un punto P fuori di esso (oss. II, 2). Congiungiamo il punto P coi punti del piano π; le rette che così si ottengono, considerate quali elementi, determinano una figura che chiamasi *stella di* 1^a *specie*, o semplicemente *stella; P centro* e π *piano direttore* di essa.

La indicheremo col simbolo $(P\pi)$ [1].

Def. II. Se invece della retta si considera quale elemento il raggio limitato al punto P, la figura costituita da tutti i raggi limitati al punto P sulla retta suddetta conserva il nome di stella, e i suoi elementi si dicono *raggi* della stella.

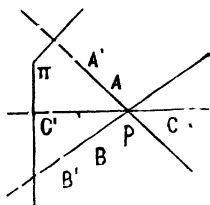



fig. 75

Oss. I. **Per la stessa definizione ogni retta ed ogni fascio e quindi ogni piano della stella determinano un punto e una retta del piano π.**

Teor. I. Due rette (o due raggi) di una stella determinano un fascio appartenente ad essa.

Difatti due punti del piano π determinano una retta r che giace nel piano (teor. IV, 46). Inoltre essendo il fascio determinato dal punto P con la retta (def. III, 27 o def. I, 30), e siccome ogni retta del fascio incontra la retta r (se è parallela la incontra all'infinito), ogni retta del fascio appartiene alla stella.

Def. III. Come il piano si è chiamato sistema a due dimensioni rispetto

---

1) Nel campo finito Euclideo bisogna tener conto anche delle rette parallele a quelle del piano π, eccetto che non s'introduca il punto all'infinito improprio (nota XLIV).

ai suoi punti (def. I, 46), altrettanto possiamo dire della stella di 1ª specie rispetto ai suoi raggi o alle sue rette.

Def. IV. Se nella stella consideriamo il punto quale elemento, la figura risultante si chiama *spazio a tre dimensioni* o semplicemente *spazio*. Lo indicheremo colla lettera **S** od anche col simbolo $(P\pi)$.

Def. V. Ogni retta di π determina con P un piano che appartiene allo spazio **S**. Diremo perciò che il piano è *situato* o *giace* nello spazio **S** e *passa* pel punto P. Tutte le rette di π determinano dunque tutti i piani di **S** passanti pel punto P. Inversamente, per definizione, ogni retta e ogni piano passante per P in **S** intersecano π rispettivamente in un punto e in una retta (oss. I).

Oss. II. I primi enti dello spazio sono dunque il punto, la retta e il piano, e si chiamano perciò enti fondamentali.

I punti e le rette li indicheremo in generale rispettivamente con lettere italiche maiuscole e minuscole, e i piani con lettere greche.

Teor. II. Una retta che ha due punti comuni con lo spazio vi giace per intero.

Infatti siano A e B i punti che la retta ha in comune con lo spazio **S**. Congiungiamo il punto P con A e B mediante due rette a e b che incontrano il piano π in due punti A', B' (oss. I); il piano PAB giace interamente nello spazio (def. V), e siccome la retta AB giace in questo piano (teor. IV, 46), giace anche nello spazio **S** (def. I, 2 e int. a, 13) (fig. 75) [1]).

Teor. III. Un piano che ha tre punti comuni con lo spazio non situati in linea retta vi giace per intero.

Siano A, B, C i tre punti che determinano il piano (coroll. II, teor. V, 46). Le rette AB, BC, CA giacciono nel piano e nello spazio **S** (teor. II). Una retta qualsiasi del piano incontra queste tre rette ciascuna in un punto che giace in **S** (coroll. II, teor. III, 46), e quindi essa stessa sarà situata interamente nello spazio **S** (teor. II); dunque in **S** giacerà anche l'intero piano (definizione V).

Coroll. I. Se i tre punti sono situati all'infinito, il loro piano giace tutto all'infinito.

Difatti le rette che congiungono due a due i tre punti giacciono all'infinito (coroll. teor. VII, 23 e oss. 31), come pure ogni altra retta che le incontra, vale a dire ogni altra retta del piano.

Teor. IV. Lo spazio può essere generato da un piano e da un punto qualsivogliano di esso, purchè il punto non giaccia nel piano.

Gli spazi $(P\pi)$, $(P'\pi)$ coincidono, perchè ogni retta che congiunge un punto di π con P' giace nello spazio $(P\pi)$ (teor. II), e perciò ogni punto di $(P\pi)$ (def. IV) è un punto dello spazio $(P\pi)$. E inversamente, P è un punto dello spazio $(P'\pi)$, perchè la retta PP' incontra il piano π in un punto P_1, essendo P' un punto dello spazio $(P\pi)$ (oss. I). Dato un punto R qualunque di $(P\pi)$, la retta

---

1) Servendoci della retta come forma fondamentale è evidente che bisogna dimostrare anche questo teorema, il quale fa intravedere da solo, e senza la oss. II e la def. II del n. 2, la possibilità degli spazî geometrici a più di tre dimensioni, ammettendo l'esistenza di un punto fuori del piano.

PR incontra π in un punto R_1 che può essere all'infinito. La retta $P'R$ nel piano PP_1R_1 incontra la retta P_1R_1 in un punto (coroll. II, teor. III, 46), dunque R è un punto dello spazio $(P'\pi)$, vale a dire ogni punto di $(P\pi)$ è un punto di $(P'\pi)$.

Lo stesso accade degli spazi $(P\pi)$, $(P\pi')$. Difatti se A', B', C' sono tre punti non in linea retta di π', le rette PA', PB', $P'C'$ incontrano il piano π in tre punti A,B,C perchè A',B',C' giacciono nello spazio $(P\pi)$, e perciò il piano π è contenuto nello spazio $(P\pi')$ (teor. III), ed ogni retta che congiunge P con un punto di π è situata tutta nello spazio $(P\pi')$ (teor. II). Si conclude che coincidono anche gli spazî $(P'\pi')$, $(P\pi')$ e perciò anche $(P\pi)$, $(P'\pi')$ (int. nota 2, 13).

Coroll. I. Quattro punti qualunque non situati in un piano determinano lo spazio a tre dimensioni, che viene determinato da quattro qualunque dei suoi punti non situati in un piano.

Difatti il piano π è determinato da tre dei suoi punti (coll. II, teor. V, 46 e def. IV).

Se $A'B'C'P'$ sono quattro punti qualunque dello spazio $(P\pi)$, lo spazio $P'.A'B'C'$ coincide col primo.

§ 2.

Intersezioni di rette e piani nello spazio.

83. *Teor. I. Una retta ed un piano dello spazio hanno un solo punto comune se la retta non giace nel piano.*

Siano π ed r il piano e la retta dati. Per costruire lo spazio basta scegliere il piano π e un punto P sulla retta r (teor. IV, 82). In tutte le rette dello spazio $(P\pi)$ passanti per P vi è anche la retta r, e siccome ogni retta di esso incontra il piano π in un punto (oss. I, 82), il teorema è dimostrato.

Teor. II. Due rette indipendenti non si incontrano.

Infatti esse sono determinate da due coppie di punti; e quattro punti indipendenti non sono situati in un piano, e perciò le due rette non si incontrano (int. def. II, 10; coroll. III, teor. V, 46).

Def. I. Due rette dello spazio non situate nel medesimo piano le chiameremo *sghembe*.

Teor. III. Due piani dello spazio si incontrano in una retta.

Questo teorema si dimostra in modo analogo al precedente o in quest'altro modo.

Siano σ, σ' i due piani. La figura comune ad essi viene incontrata da una retta qualunque di σ in un punto, nel punto cioè d'intersezione della retta col piano σ' (teor. I), dunque è una linea retta (teor. VI, 48).

Teor. IV. Tre piani che non hanno una retta comune si incontrano in un solo punto.

Siano σ, σ', σ'' i tre piani; i due primi incontrano σ'' in due rette, le quali hanno un punto comune (coroll. II, teor. III, 46), che appartiene ai tre piani (int. a, 13).

Oss. I. I tre piani possono anche avere una retta comune,

Teor. V. Da un punto si può condurre una sola retta trasversale che incontri due rette sghembe date.

Il punto determina con le due rette due piani che si intersecano in una retta (teor. III), la quale incontra le due date e passa pel punto dato. È chiaro che se il punto fosse situato sopra una delle due rette vi sarebbero infinite trasversali comuni alle due rette, vale a dire tutte le rette congiungenti il punto dato coi punti dell'altra retta.

Teor. VI. Tre rette due a due sghembe hanno un sistema ad una dimensione di trasversali comuni, che corrisponde univocamente e nel medesimo ordine alla retta.

Infatti per ogni punto di ciascuna di esse passa una sola retta che sega le altre due (teor. V, ass. II, a e ip. I; int. def. I, 62 e def. III, 42).

Def. II. Le figure formate da tutti i piani che uniscono una retta r coi punti di un'altra retta s che non la incontra, riguardando il piano come elemento, si chiama *fascio di piani*, la retta r il suo *asse*, s la sua *direttrice*.

I *versi* del fascio sono dati da quelli della retta direttrice.

Teor. VII. Tutti i piani dello spazio passanti per ogni sua retta r determinano un solo fascio.

Vale a dire se s è la retta direttrice, data un'altra retta qualunque s', essa dà un altro fascio di asse r che coincide col primo.

Difatti un piano che passa per r e incontra s incontra anche la retta s', e reciprocamente (teor. I), dunque ecc.

Coroll. I piani di un fascio contengono tutti i punti dello spazio.

Teor. VIII. Un fascio di piani è un sistema ad una dimensione semplicemente chiuso.

Se a è l'asse del fascio, e se A è il punto d'incontro di esso con un piano π, ogni piano del fascio incontra il piano π in una retta passante per A (teor. III); e inversamente data una retta nel fascio di rette in π e di centro A, essa determina con a un piano che appartiene al fascio (teor. VII). Ad ogni retta del fascio in π corrisponde un piano del fascio di piani intorno ad a, e reciprocamente; dunque il fascio di piani è semplicemente chiuso, perchè tale è anche il fascio di rette nel piano (teor. I, 30 e int. def. II, 63).

Def. III. Come si può prendere quale elemento del fascio nel piano il raggio o la semiretta limitata al centro, così nel fascio di piani possiamo considerare come elemento il semipiano limitato all'asse (def. II, 50 e coroll. II, teor. I, 47). In tal caso il fascio si chiama anche *fascio di semipiani*.

§ 3.

Piano all' infinito — Rette e piani paralleli.

84. *Teor. I. Il campo limite assoluto dello spazio intorno ad un suo punto è un piano completo, e si può ritenere come piano limite assoluto di un punto qualunque del campo finito rispetto all'unità di questo campo.*

Il piano determinato da tre punti A_∞, B_∞, C_∞ limiti assoluti di un punto P é situato nel campo limite assoluto di P (def. IV, 32 e teor. 78). Siccome i lati del triangolo $A_\infty B_\infty C_\infty$ sono situati nei piani dello spazio determinati da P coi tre punti A_∞, B_∞, C_∞ (oss. IV, 68) e ogni retta situata nel piano $A_\infty B_\infty C_\infty$ incontra due lati di essi in due coppie di punti opposti (coroll. teor. IV, 68), le rette che queste coppie determinano con P sono nello spazio, e perciò la loro retta, essendo situata nel piano delle rette suddette, giace nello spazio.

La seconda parte del teor. deriva dal teor. IV, 32.

Coroll. Si può ritenere che il campo all'infinito dello spazio rispetto all'unità Euclidea sia un piano.

Difatti le parallele assolute condotte da un punto A alle rette di una stella di centro P (def. II, 32) coincidono colle parallele relative (teor. II e def. I, 32), e quindi possiamo ritenere che rispetto all' unità Euclidea i punti limiti delle rette dello spazio siano nel piano limite assoluto di ogni punto dello spazio.

Def. I. Chiameremo un tal piano, *piano all'infinito dello spazio* rispetto all'unità Euclidea (oss. 31).

Oss. I. Siccome rispetto all'unità Euclidea delle distanze (conv. 28) ogni retta ha un solo punto all'infinito, così rispetto a questa unità il piano all'infinito soddisfa al caso in cui due rette complete non possono avere due punti comuni, che noi abbiamo escluso in senso assoluto coll'ip. VI (oss. II, 30).

85. *Def. I.* Una retta e un piano si dicono *paralleli* quando il punto all'infinito della retta giace nella retta all'infinito del piano (def. I, 84).

Teor. I. In un piano parallelo ad una retta vi sono infinite rette parallele alla retta data.

Tutte le rette cioè del piano che passano pel punto all'infinito della retta.

Def. II. Due piani si dicono *paralleli* quando hanno la medesima retta all'infinito.

Oss. I. Ad un sistema di rette parallele di un piano corrisponde un sistema di rette parallele del piano parallelo, le quali colle prime hanno un medesimo punto comune all'infinito.

Teor. II. Da un punto si possono condurre infinite parallele ad un piano, e queste sono situate nel piano parallelo condotto dal punto al piano dato.

Difatti ogni parallela condotta dal punto al piano ha il suo punto all'infinito sulla retta all'infinito del piano, e queste parallele sono situate nel piano determinato dal punto e dalla retta all'infinito del piano dato.

Teor. III. Due piani paralleli vengono intersecati da un terzo piano secondo rette parallele.

Infatti le rette s e s' d'intersezione del terzo piano coi due piani paralleli si incontrano in un punto, cioè nel punto comune ai tre piani (teor. IV, 83), che è all'infinito, cioè nel punto d'intersezione del terzo piano colla retta all'infinito dei due piani paralleli.

Coroll. I. Se una retta è parallela ad un piano, ogni piano passante per essa incontra il piano dato in una retta parallela alla data.

Coroll. II. Se una retta è parallela ad un piano, la parallela condotta ad essa da un punto del piano giace in questo piano.

Teor. IV. Due rette parallele intersecano due piani paralleli in quattro punti che sono vertici di un parallelogrammo.

Le due rette sono situate in nn piano (coroll. IV, teor. V, 46) che interseca i due piani dati in due rette parallele (teor. III), e quindi il parallelogrammo è costituito da queste due rette e dalle due date (def. I, 44).

Teor. V. Se due piani passano per due rette parallele, essi si intersecano in una retta ad esse parallela.

Difatti il punto all'infinito delle due rette parallele è comune ai due piani, e quindi è il punto all'infinito della loro retta d'intersezione.

Teor. VI. Per un punto si può condurre uno ed un solo piano parallelo a due rette date situate o no in un piano.

Basta congiungere il punto colla retta determinata dai due punti all'infinito delle due rette. Se le due rette sono situate in un piano e il punto giace in questo piano, il piano parallelo coincide col piano delle due rette.

Coroll. I. Per una retta si può condurre uno ed un solo piano parallelo ad un'altra retta che non incontra la prima.

Esso passa per la retta e per il punto all'infinito dell'altra retta.

Oss. II. Costruzione di enti paralleli con elementi del solo campo finito.

Siccome si sa costruire la retta parallela, che da un punto si può condurre ad una retta data, mediante la retta e il cerchio (oss. III, 60), così con questo mezzo si possono costruire rette e piani paralleli nel campo finito dello spazio. Per esempio, per costruire il piano parallelo condotto da un punto ad un piano, basta condurre pel punto due parallele a due rette del piano dato, e le due parallele determineranno il piano richiesto.

Oss. III. Quando parliamo di una figura dello spazio intenderemo che i suoi punti appartengano allo spazio senza che tutti i punti di questo siano punti della figura data.

Teor. VII. Se una figura dello spazio viene incontrata da ogni sua retta in un punto, essa è un piano.

Infatti la retta di due punti A,B della figura per dato appartiene tutta intera alla figura data. In una retta dello spazio che non incontra la retta AB deve esservi per ipotesi un punto C della figura, e perciò le rette AC, BC giacciono in essa. Dunque anche il piano ABC appartiene tutto intero alle figura data, perchè ogni retta del piano ha con essa più d'un punto comune. La figura non può avere un altro punto P fuori del piano ABC, perocchè le rette che unissero il punto P coi punti del piano ABC giacerebbero nella figura, e per conseguenza questa non sarebbe altro che lo stesso spazio, ciò che è contro il dato.

Coroll. I. Se una figura dello spazio ha con tutti i piani di esso una retta comune, essa è un piano.

Infatti da ciò si deduce che ogni retta dello spazio incontra la figura data in un punto.

Teor. VIII. Se una figura formata da rette è tale che le sue rette si incontrano due a due senza passare per un medesimo punto, essa è un piano o una figura piana.

Difatti siano date tre rette della figura che si incontrano due a due, e perciò determinano un piano; tutte le rette situate fuori di questo piano non

incontrano le tre rette in un punto (teor. IV, 46), e quindi tutte le rette della figura appartengono al piano.

§ 4.

Identità dello spazio intorno ai suoi punti del campo finito e del campo infinito — Parti in cui lo spazio viene diviso da un suo piano.

86. *Teor. I. Lo spazio è identico intorno ad ogni punto del suo campo finito.*

Lo spazio può essere generato dal piano π_∞ e dal punto A oppure da un altro punto A' (teor. IV, 82) [1]), quindi le rette che congiungono il punto A coi punti del piano π_∞ determinano l'intero spazio. Siccome possiamo riguardare π_∞ come piano limite assoluto di un punto qualunque del campo finito (teor. I, 84), facendo corrispondere nelle due stelle di centri A e A' i centri stessi e le rette che congiungono gli stessi punti all'infinito, ad ogni triangolo di vertice A corrisponde nell'altra un triangolo identico, e quindi scelti due punti X, Y nella prima stella, ad essi corrispondono due punti X', Y' nelle due rette corrispondenti alle rette AX, AY della seconda; e poichè i due triangoli AXY, $A'X'Y'$ sono identici per avere due lati e l'angolo compreso ugnali, si ha $(XY) \equiv (X'Y')$. Dunque le due stelle sono figure identiche (teor. I, teor. III e coroll. II, teor. II, 15).

Teor. II. Le stelle dello spazio aventi i loro centri nel campo finito sopra un piano vengono divise da questo piano in due parti identiche, che giacciono nelle stesse due parti dello spazio.

Un piano α della stella di centro A ha una retta all'infinito a_∞, la quale divide il piano all'infinito π_∞ in due parti identiche opposte (teor. I, 71), e si sa pure che due punti opposti X_∞, X'_∞ sono situati da parti opposte rispetto alla retta a_∞, e che un'altra retta b_∞ è situata per metà nelle due parti opposte alle rette a_∞ (teor. II, 71). Congiungendo le parti π'_∞, π''_∞ del piano π_∞ opposte rispetto alla retta a_∞ col punto A si hanno le due parti della stella di centro A determinata dal piano α, che sono identiche per l'identità di π'_∞ e π''_∞ e per l'identità delle distanze di A da punti di π'_∞ e π''_∞. Queste due parti delle stelle di centro A determinano due parti dello spazio (def. IV, 82).

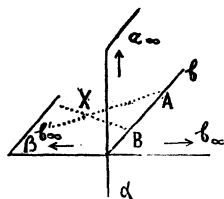



fig. 76

Sia ora B un altro punto del piano α, e indichiamo con b la retta AB. Scelto un raggio ad arbitrio AX della parte $(A\pi'_\infty)$, dimostriamo che ogni punto X di esso giace nella parte $(B\pi'_\infty)$. Difatti il piano AXB, cioè β, viene tagliato dalla retta b in due parti, una delle quali è situata nella parte $(A\pi'_\infty)$ ed ha una semiretta all'infinito b'_∞, avente per estremi i

1) La dimostrazione del teor. IV, 82 è indipendente dal fatto che il piano generatore sia o no all'infinito (teor. I, def. I, 84). Alcune proprietà di questo paragrafo sono assunte tacitamente o no nei trattati elementari come assiomi.

due punti all'infinito della retta b. Il punto all'infinito del raggio BX è situato in b'_∞ (teor. II, 50), e quindi giace nella parte $(B\pi'_\infty)$ della stella di centro B.

Coincidendo le due parti $(A\pi'_\infty)$, $(B\pi'_\infty)$, coincidono anche le parti opposte $(A\pi''_\infty)$, $(B\pi''_\infty)$, ed il teorema è dimostrato (teor. III, 15) (fig. 76).

Def. I. Queste parti si chiamano *parti dello spazio opposte al piano.*

Def. II. Diremo perciò che lo spazio viene *diviso* da un piano in due parti opposte al piano.

Coroll. I. Le parti in cui lo spazio è diviso da un piano sono identiche.

Perchè ognuna di queste parti si ottiene congiungendo i punti di una delle metà del piano π_∞, determinate dalla retta all'infinito del piano dato, con un punto qualunque del campo finito del piano.

Teor. III. Una retta ed un piano paralleli ad un piano dato sono dalla stessa parte di questo piano.

Nel piano β sia data una parallela alla retta b la quale è situata tutta da una stessa parte della retta b (teor. I, 50); siccome le parti del piano β separate dalla retta b appartengono alle due parti della stella di centro A rispetto al piano α, il teorema nella I parte è dimostrato. Ed è dimostrata pure la seconda parte, giacchè le rette di ogni piano parallelo ad un piano dato sono parallele a questo piano (def. I e II, 85).

Teor. IV. Le due parti di un piano in cui viene diviso dalla sua retta d'intersezione con un altro piano ad esso non parallelo, giacciono nelle parti dello spazio opposte al secondo piano.

Il piano β taglia il piano α nella retta b, i cui punti all'infinito Y_∞, Y'_∞ appartengono alle due rette a_∞, b_∞. Ma i due punti Y_∞, Y'_∞ dividono la retta b_∞ in due parti uguali che giacciono da parti opposte nel piano π_∞ rispetto alla retta a_∞ (teor. II, 71); quindi la retta b divide il piano β in due parti che giacciono nelle due parti opposte dello spazio rispetto al piano α.

Coroll. I. Le parti di una retta determinate su di essa dal suo punto di incontro con un piano non parallelo alla retta, giacciono nelle parti dello spazio opposte al piano.

Basta considerare due segmenti α e α' o le parti di una retta sul piano β limitata in A (coroll. II, teor. II, 50) (fig. 76).

Coroll. II. Il segmento di due punti, che giacciono da parti opposte rispetto ad un piano, incontra il piano in un punto interno al segmento, e inversamente.

Difatti la retta dei due punti incontra il piano in un punto S che determina sulla retta due parti situate da parti opposte rispetto al piano, nelle quali sono situati i due punti dati. Ma le due parti della retta sono opposte rispetto al punto S d'intersezione col piano, dunque esso è interno al segmento dei due punti dati X e Y.

La proprietà inversa deriva dall'essere SX e SY raggi opposti e perciò situati da parti opposte del piano.

§ 5.

Rette e piani perpendicolari.

87. *Oss.* Il piano π_∞ all'infinito dello spazio è un piano completo (teor. I, 84). I raggi che due punti coniugati all'infinito di π_∞ determinano con un punto A del campo finito sono ad angolo retto (def. I, 69 e def. I, 39), e due rette dello spazio i cui punti all'infinito sono coniugati sono perpendicolari (def. V, 40).

Def. I. Una retta ed un piano si dicono perpendicolari se il segmento normale del punto all'infinito della retta alla retta all'infinito del piano è retto (def. II, 73; teor. I e def. I, 84).

Teor. I. Il punto all'infinito della retta è il polo della retta all'infinito di ogni piano ad essa perpendicolare (teor. I, 73 e def. I).

Coroll. I. Le rette parallele ad una perpendicolare ad un piano sono pure perpendicolari al piano.

Difatti esse hanno il medesimo punto all'infinito.

Coroll. II. Tutte le perpendicolari ad un piano sono parallele.

Difatti hanno lo stesso punto all'infinito.

Coroll. III. Tutti i piani paralleli ad un piano perpendicolare ad una retta sono perpendicolari alla retta.

Perchè essi hanno la stessa retta all'infinito.

Coroll. IV. Tutti i piani perpendicolari ad una retta sono paralleli.

Difatti essi hanno la stessa retta all'infinito.

Coroll. V. Una retta perpendicolare ad un piano è perpendicolare a tutte le rette del piano.

Difatti se è data una retta a_∞ del piano π_∞, i suoi due poli A_∞, A'_∞ sono coniugati a tutti i suoi punti (teor. I, II, 69). Se si congiunge un punto A con la retta a_∞ e coi due punti A_∞, A'_∞ si ha un piano α, ed una retta a perpendicolare ad esso (def. I), Ogni retta b passante ad es. per A nel piano α, ha due punti all'infinito B_∞, B'_∞ che sono coniugati rispetto ad A_∞ e A'_∞, dunque la retta b è perpendicolare alla retta a (def. V, 40) (fig. 77).

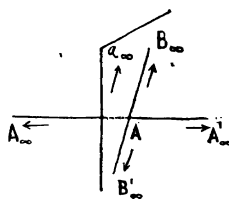



fig. 77

Coroll. VI. Tutte le rette perpendicolari ad una retta condotte da un punto di essa o fuori di essa sono situate in un piano (def. V, 40; teor. I, 69).

Coroll. VII. Da un punto A di una retta o fuori di essa si può condurle uno ed un solo piano perperdicolare.

Difatti la retta polare del punto all'infinito della retta a data, congiunta col punto A dà uno ed uno solo piano perpendicolare alla retta stessa (def. I).

Costr. I. Per costruire questo piano con elementi del solo campo finito, se il punto A è situato sulla retta, basta condurre in due piani passanti per a le due normali ad a in A (oss. III, 60), le quali determinano il piano richiesto. Se invece A è situato fuori di a basta nel piano Aa condurre da A la normale alla retta a che la incontra in un punto P. Il piano normale nel punto P alla retta conterrà evidentemente il punto A richiesto.

Coroll. VIII. Da un punto di un piano o fuori di esso si può condurre al piano una sola perpendicolare.

Difatti i poli della retta all'infinito del piano congiunti col punto dato determinano una sola retta normale passante per questo punto al piano.

Costr. II. Per costruire questa retta con elementi del solo campo finito, se il punto giace nel piano dato, basta scegliere due rette del piano passanti pel punto, e condurre da esso i due piani perpendicolari alle due rette (costr. I). Questi due piani si intersecheranno nella retta normale richiesta, essendo normale alle due rette prescelte.

Se invece il punto è fuori del piano dato, basta costruire due piani passanti pel punto e perpendicolari a due rette del piano (costr. 1); questi due piani si intersecheranno nella retta richiesta.

Def. II. Il punto d'incontro della normale col piano chiamasi *piede* di essa.

Def. III. Due piani si dicono *perpendicolari* se i segmenti normali delle loro rette all'infinito sono retti (def. II, 73) [1]).

Teor. II. Le rette all'infinito di due piani perpendicolari sono conjugate (def. III, 69, coroll. II, teor. VII, 73 e def. III).

Coroll. I. Tutti i piani paralleli ad un piano perpendicolare ad un altro piano sono perpendicolari a questo piano.

Come il coroll. III, teor. I.

Coroll. II. Per una retta passa un solo piano perpendicolare ad un piano dato.

Difatti il piano cercato ha per retta all'infinito la congiungente il punto all'infinito della retta coi poli della retta all'infinito del piano (teor. VI, V, 69).

Coroll. III. Il piano normale condotto da una retta ad un piano contiene tutte le rette normali al piano che passano pei punti della retta.

Costr. III. Costruendo una di queste normali è pure costruito il piano normale cercato.

Def. IV. Il segmento del piano che contiene i piedi delle normali condotte al piano dai punti di un segmento fuori di esso, si chiama *proiezione ortogonale* o semplicemente *proiezione* del segmento dato sul piano.

Teor. III. Ciascuno di due piani perpendicolari contiene infinite rette perpendicolari all'altro.

E inversamente.

Ogni piano che passa per una retta normale ad un altro piano è normale a questo piano.

I due piani essendo perpendicolari, le loro rette all'infinito, che indichiamo con a_∞, b_∞, devono essere coniugate, vale a dire ciascuna di esse passa pei poli dell'altra (def. III, 69). Siano Aa_∞, ossia α, Ab_∞, ossia β, i due piani dati. La retta che congiunge il punto A coi poli della retta b_∞ è situata nel piano α ed è perpendicolare a β, così tutte le rette del piano α ad essa pa-

1) Si potrebbero dare per definizione dell'ortogonalità fra una retta ed un piano e due piani le proprietà dei teoremi I e II, ma oltrechè queste contengono un numero maggiore di condizioni, avrebbero lo svantaggio di limitarsi al solo spazio a tre dimensioni, e quindi per ogni spazio bisognerebbe ripetere sotto altre forme queste definizioni, mentre quelle da noi date valgono indipendentemente dal numero delle dimensioni delle spazio in cui sono contenuti gli enti ortogonali.

rallele (coroll. I, teor. I). Analogamente la retta che congiunge il punto A coi poli della retta a_∞ è situata sul piano β ed è normale al piano α; così tutte le rette del piano β ad essa parallele.

Il teorema inverso dopo questa dimostrazione è evidente (def. I, III, e teor. VI e V, 69).

Teor. IV. Dati due piani, vi sono infiniti piani normali ad entrambi e tali che per ogni punto dello spazio ne passa uno, ed uno solo.

Questi piani normali hanno per retta all'infinito la congiungente i poli delle rette all'infinito dei due piani, e quindi per ogni punto dello spazio e per questa retta passa un solo piano.

Costr. IV. Questo piano si ottiene costruendo le due normali passanti pel punto ai due piani dati (costr. II).

Coroll. I piani normali a due piani dati sono perpendicolari alla loro retta d' intersezione.

Difatti la retta congiungente i poli delle rette all'infinito dei due piani dati è la polare del punto d'intersezione delle due rette (coroll. I, teor. II, 69 e def. I).

Teor. V. Date due rette dello spazio vi è una sola direzione perpendicolare alle due rette.

Difatti la retta che congiunge i due punti all'infinito delle due rette ha due poli, che danno una sola direzione normale alle due rette (teor. II, 69 e def. I).

Per ogni punto dello spazio passa una sola retta perpendicolare alle due rette.

Costr. V. Per costruirla basta condurre dal punto i piani perpendicolari alle due rette (costr. I) che si taglieranno nella retta richiesta.

Coroll. Una retta perpendicolare a due rette è perpendicolare ad ogni piano ad esse parallelo (def. I, 85).

Teor. VI. Vi è una sola retta normale a due rette sghembe che le incontra.

Siano a e b le due rette. Se si congiunge a coi poli della retta congiungente i punti all'infinito delle due rette date, si ha un piano normale al piano parallelo condotto per a alla retta b; perchè la retta all'infinito del primo piano, passando pei poli della retta all'infinito del secondo piano è coniugata a questa retta (def. II, 85, teor. VI e V, 69).

Costr. VI. Per costruire questa normale con elementi del solo campo finito, si conduca per una delle rette il piano parallelo all'altra (coroll. teor. VI, 85), e per le due rette i piani normali a questo piano (costr. III), i quali si devono incontrare nella normale cercata, perchè essa è contenuta in piani normali alle due rette e nei quali esse sono rispettivamente situate.

Teor. VII. Per un punto dello spazio passano infinite terne di rette due a due perpendicolari.

Difatti se si congiunge un punto A coi vertici di ogni triangolo polare del piano all'infinito (def. IV, 69) si ottengono tre rette due a due perpendicolari.

Costr. VII. Per costruire con elementi del solo campo finito una di queste terne

scelta una di queste rette, basta condurre da A il piano normale a questa retta, e su di esso considerare due rette fra loro perpendicolari passanti per A, che con la prima daranno la terna richiesta.

§ 6.

Distanza di un punto da un piano, di due piani paralleli, di una retta ed un piano paralleli, di due rette.

88. *Teor. I. Il minimo della distanza di un punto fuori di un piano ai punti di questo piano è la distanza del punto dal piede della sua perpendicolare al piano.*

Siano π e P il piano e il punto dati, S il piede della normale condotta dal punto P al piano (coroll. VIII, teor. I, 87).

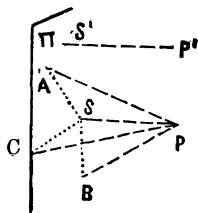



fig. 78

Nel triangolo PSA rettangolo in S l'ipotenusa (PA) è sempre maggiore del cateto (PS) qualunque sia il punto A nel piano π (coroll. teor. II, 55) (fig. 78).

Oss. È da osservare che la distanza del punto P dai punti di una retta del piano π va sempre aumentando a partire dal piede della perpendicolare alla retta condotta ad essa dal punto P (teor. VIII. 54), e considerando due segmenti qualunque (PA), (PB) determinati dal punto P e da due punti A e B del piano π, il loro piano interseca il piano π lungo una retta e quindi se è $(PA) < (PB)$, in (AB) vi è un punto X almeno pel quale il segmento (PX) é compreso fra i segmenti (PA) e (PB) (coroll. I, def. I, e teor. VII, 13).

Def. I. La distanza minima di un punto da un piano dicesi *distanza* del punto dal piano. I segmenti con un estremo nel punto P e l'altro estremo nel piano, che non sono normali al piano π, si dicono *obliqui*.

Teor. II. I segmenti obliqui aventi uguali proiezioni sono uguali e formano lo stesso angolo con la normale.

Di due siffatti segmenti è maggiore quello che ha il suo estremo sul piano a maggiore distanza dal piede della normale.

Se C è un'altro punto in modo che $(SC) \equiv (SA)$, i due triangoli PSA, PSC sono uguali, perchè ambidue sono rettangoli in S ed hanno i due lati che comprendono l'angolo retto uguali, cioè: (PS), (SA), (PS), (SC), dunque si ha pure $(PA) \equiv (PC)$ e $\widehat{CPS} \equiv \widehat{APS}$.

Se $(SB) > (SA)$ si può prendere su (SB) un punto C' tale che sia $(SC') \equiv (SA)$, e si ricava $(PC') \equiv (PA)$. Ma $(PB) > (PC')$ (teor. VII, 54), quindi $(PB) > (PA)$.

Coroll. I. Vale il teorema inverso.

Coroll. II. I punti di una circonferenza sono equidistanti da un punto qualunque della perpendicolare inalzata dal suo centro al suo piano.

Infatti tutti i punti equidistanti da S sono equidistanti da P come pure da tutti i punti della perpendicolare condotta da S al piano, cioè della retta SP.

Coroll. III. Tutti i punti di un piano equidistanti da un punto fuori di esso sono situati in una circonferenza che ha per centro il piede della perpendicolare condotta dal punto al piano.

Siano A e B due dei punti del piano π equidistanti dal punto P fuori di

π, ed S il piede della normale condotta da P al piano. I triangoli PSA, PSB sono rettangoli in S, hanno un cateto comune e le ipotenuse uguali; dunque i triangoli sono uguali (teor. II, 55).

Teor. III. Tutti i punti, da ciascuno dei quali sono equidistanti i punti di una circonferenza, sono situati sulla perpendicolare inalzata dal centro della circonferenza al suo piano.

Difatti sia P' un punto fuori di questa perpendicolare, S il centro, A e B due punti della circonferenza; S' il piede della normale condotta da P' al piano di essa. I triangoli rettangoli $S'AP'$, $S'BP'$ non possono avere le ipotenuse (AP'), (BP') uguali, perchè in generale $(S'A)$ non è uguale ad $(S'B)$, non essendo S' il centro della circonferenza, e perchè due triangoli rettangoli non possono avere un cateto e l'ipotenusa uguali senza essere uguali (teor. II, 55) (fig. 78).

Teor. IV. Se due punti A e A' hanno la medesima distanza rispettivamente da due piani α e α', i segmenti che essi determinano coi punti di questi piani sono due a due uguali, e le figure da essi formati sono identiche.

Siano S e S' i piedi delle normali condotte dai punti ai due piani α e α'. Facciamo corrispondere nelle due suddette figure al punto A il punto A', e stabiliamo nei due piani una corrispondenza d'identità in modo che S' corrisponda ad S (teor. II e coroll., teor. III, 47).

Siano (AC), $(A'C')$ due segmenti corrispondenti nelle figure $(A\alpha)$, $(A\alpha')$, essendo C e C' punti di α e α'. I due triangoli ASC, $A'S'C'$ sono rettangoli in S e S', $(AS)\equiv(A'S')$, $(SC)\equiv(S'C')$ per la corrispondenza d'identità stabilita in α e α', dunque i due triangoli sono identici e si ha $(AC)\equiv(A'C')$ e $\widehat{CAS}\equiv\widehat{C'A'S'}$

Se X e Y sono punti di $(A\alpha)$, ad essi corrispondono due punti X' e Y' di $(A'\alpha')$ ad uguali distanze da A' tali che i triangoli AXY, $A'X'Y'$ sono identici, quindi $(XY)\equiv(X'Y')$. Dunque le due figure $(A\alpha)$, $(A'\alpha')$ sono identiche (teor. III, 15).

Coroll. I. Se due punti hanno la medesima distanza da un piano, i segmenti che essi determinano rispettivamente coi punti dei due piani sono due a due uguali, e le due figure da essi formate sono identiche.

Coroll. II. Se due punti giacciono in una perpendicolare ad un piano e e alla medesima distanza da questo piano, essi hanno la medesima distanza da ogni punto del piano.

Teor. V. Le distanze dei punti di una retta da un piano ad essa parallelo sono uguali.

Le normali condotte dai punti della retta al piano sono parallele (coroll. II, teor. I, 87) e sono situate in un piano (coroll. III, teor. II, 87), e perciò i loro piedi sono situati sulla retta d'intersezione di questo piano col piano dato, la quale è parallela alla retta data (coroll. I, teor. III, 85). I segmenti normali dei punti della retta al piano sono dunque uguali (teor. IV, 85 e teor. I, 44).

Def. II. La distanza dei punti di una retta da un piano ad essa parallela chiamasi *distanza della retta dal piano.*

Coroll. La distanza di una retta da un piano ad essa parallelo è la minore distanza dei punti della retta da quelli del piano (teor. I).

Teor. VI. Le distanze dei punti di un piano da un altro piano ad esso parallelo sono uguali.

Difatti le normali ad un piano π sono tali anche rispetto ad un piano paral-

lelo π' a π (coroll. IV, teor. I, 87). Siano A e B due punti del piano π, la retta AB è parallela al piano π', e quindi le distanze dei punti A e B dal piano π sono uguali (teor. V).

Def. III. La distanza considerata nei segmenti normali dei punti di due piani paralleli (def. I, 5 e teor. VI) si dice *distanza dei due piani.*

Coroll. La distanza di due piani paralleli è la minore distanza dei punti di un piano dai punti dell'altro piano (teor. I).

Teor. VII. Due coppie di piani paralleli aventi la medesima distanza sono due figure identiche.

Siano $\alpha\beta$, $\alpha'\beta'$ le due coppie di piani e siano uguali le loro distanze. Facciamo corrispondere ad un punto A di α un punto A' di α'; i segmenti determinati dal punto A coi punti di β formano una figura identica a quella dei segmenti determitati da A' coi punti di β' (teor. IV). E stabilendo una corrispondenza d'identità anche nei piani α e α' in modo che i punti A e A' di α e α' si corrispondano, due altri punti corrispondenti hanno la stessa proprietà dei punti A e A', e il teorema è perciò dimostrato (teor. III, 15).

Teor. VIII. Le figure rettilinee determinate da due gruppi di quattro punti ABCD, A'B'C'D' sono identiche se i segmenti rettilinei che hannò per estremi i punti dati sono ordinatamente uguali.

Diamo qui un' altra dimostrazione di questo caso del teor. VII del n. 17 valevole in generale [1]).

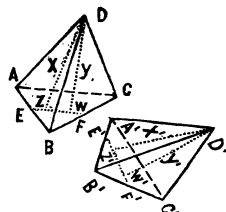



fig. 79

Siano $ABCD$ i quattro punti dati non situati in un piano, poichè altrimenti le figure sarebbero piane (teor. IV, 46 e def. IV, 38), e siano inoltre $A'B'C'D'$ i loro punti corrispondenti e X e Y due punti della prima figura. Le rette XD, YD incontrano il piano ABC in due punti Z e W (teor. I, 83). Stabilita la corrispondenza d'identità determinata nei piani dai quattro triangoli dei quattro punti, indichiamo con E ed F i punti d'intersezione della retta ZW coi lati AB, BC. In $A'B'$ e $B'C'$ esistono i punti E' ed F' corrispondenti, tali che si ha $(DE)\equiv(D'E')$, $(DF)\equiv(D'F')$, $\widehat{DEF}\equiv\widehat{D'E'F'}$. E siccome i punti corrispondenti Z' e W' nel piano $A'B'C'$ ai punti Z e W determinano rispettivamente con E', D' due triangoli identici ai triangoli che Z e W determinano con E e D, essendo $(EZ)\equiv(E'Z')$, $(EW)\equiv(E'W')$, si ricava $(DZ)\equiv(D'Z')$ $(DW)\equiv(D'W')$ oltre che è $(ZW)\equiv(Z'W')$. Quindi i due triangoli DZW, $D'Z'W'$ sono identici, da cui $\widehat{ZDW}\equiv\widehat{Z'D'W'}$; e perciò essendo $(DX)\equiv(D'X')$, $(DY)\equiv(D'Y')$ si ha $(XY)\equiv(X'Y')$ (fig. 79).

89. *Teor. I. Il segmento normale a due rette sghembe, avente i suoi estremi sulle due rette, dà la distanza minima da un punto di una qualunque delle due rette a un punto dell'altra.*

Dalle due rette si conducano i due piani ad essi rispettivamente paralleli; il segmento normale alle rette avente i suoi estremi in esse lo è pure ai due piani (coroll. teor. V, 87), ed essendo esso il segmento minimo tra i segmenti dei punti dei due piani, lo è anche tra i punti delle due rette (coroll. teor. VI).

---

1) Al § 13 considereremo il caso generale, come abbiamo fatto pel piano (teor. IV, 62).

Oss. I. Nel piano completo due rette hanno due distanze normali comuni, che abbiamo chiamato distanza minima e massima delle due rette (teor. VII, 73). In tal caso però la minima è tale pei due estremi del segmento normale alle due rette ma, siccome si incontrano in due punti opposti, si è visto che vi sono dei segmenti, aventi i loro estremi sulle due rette, minori del segmento normale ma che non lo sono però per entrambi gli estremi.

Nel presente caso invece non esiste alcun altro segmento (A_1B_1) minore od eguale al segmento (AB).

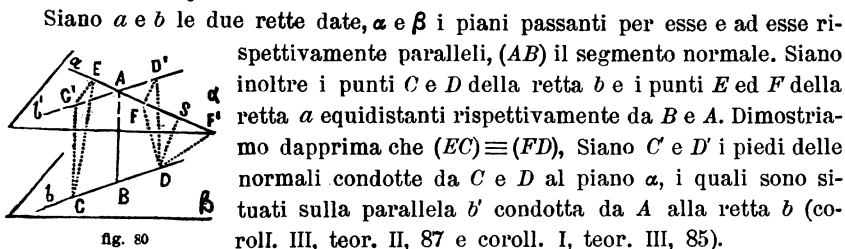
Teor. II. I segmenti obliqui aventi i loro estremi in due rette sghembe ad ugual distanza dagli estremi del segmento normale comune sono uguali, e formano gli stessi angoli con le due rette.

Siano a e b le due rette date, α e β i piani passanti per esse e ad esse rispettivamente paralleli, (AB) il segmento normale. Siano inoltre i punti C e D della retta b e i punti E ed F della retta a equidistanti rispettivamente da B e A. Dimostriamo dapprima che $(EC) \equiv (FD)$, Siano C' e D' i piedi delle normali condotte da C e D al piano α, i quali sono situati sulla parallela b' condotta da A alla retta b (coroll. III, teor. II, 87 e coroll. I, teor. III, 85).

fig. 80

Si ha (coroll. II, teor. I, 87; teor. I, 44) $(CC') \equiv (AB) \equiv (DD')$. Ora i due triangoli $EC'A$, $FD'A$ sono uguali, perchè hanno due lati e la coppia compresa uguale, cioè $(C'A) \equiv (AD')$ (teor. IV, 85; coroll. II, teor. I, 87 e teor. I, 44), $(EA) \equiv (AF)$, $\widehat{EAC'} \equiv \widehat{FAD'}$ (teor. II, 17), dunque si ha $(C'E) \equiv (D'F)$ (coroll. teor. III, 16).

I due triangoli $EC'C$, $FD'D$ sono pure uguali, perchè sono rettangoli in C' e D' ed hanno i cateti ordinatamente uguali, cioè $(C'E) \equiv (D'F)$, $(CC') \equiv (DD')$, dunque $(EC) \equiv (FD)$, come volevasi dimostrare.

Per dimostrare la seconda parte del teorema, osserviamo che i due triangoli AEC, AFD sono uguali per avere i lati uguali, cioè $(AE) \equiv (AF)$, $(EC) \equiv (FD)$, e inoltre $(AC) \equiv (AD)$ essendo segmenti obliqui rispetto alla retta b, le cui proiezioni sulla retta b sono uguali (teor. III, 54). Dunque $\widehat{AEC} \equiv \widehat{AFD}$. Analogamento $\widehat{BCE} \equiv \widehat{BDF}$, c. v. d. [1] (fig. 80).

Oss. II. Se due segmenti obliqui sono soltanto uguali, non si può concludere che i loro estremi siano equidistanti dagli estremi del segmento normale alle due rette. Difatti se S è il piede della normale condotta da D alla retta a, il punto S non coincide con A, e prendendo su a un punto F' tale che $(FS) \equiv (SF')$, si ha $(FD) \equiv (F'D)$ $\equiv (EC)$, ma non per questo si ha $(AF) \equiv (AF') \equiv (AE)$.

Coroll. I. Se a e a', b e b' sono le parti di due rette sghembe a partire dagli estremi del loro segmento minimo (AB), le figure (ab), $(a'b')$, oppure (ab') $(a'b)$, sono identiche.

Difatti prendendo i punti E e C in a e b e i punti E' e C' in a' e b' rispettivamente ad ugual distanza dai punti A e B, le due figure rettilinee $ABEC$, $ABE'C'$ sono identiche, perchè i segmenti determinati dai primi quattro punti

---

1) Premettendo la teoria degli angoli e dei triedri a quelle delle distanze, il teor. si potrebbe dimostrare così. Dal triangolo isoscele CAD si ha:

$$\widehat{CAB} \equiv \widehat{DAB}$$

così si ha:

$$\widehat{EAB} \equiv \widehat{FAB}$$

perchè retti. Di più i diedri $\overline{EABC}$, $\overline{FABD}$ sono opposti all'asse AB, dunque sono uguali, e perciò i due triedri $A.BCE.A.BDF$ sono uguali e quindi anche gli angoli EAC, FAD. Dunque i due triangoli EAC, FAD sono identici avendo $(EA) \equiv (FA)$, $(AC) \equiv (AD)$ e l'angolo compreso uguale.

sono uguali ai segmenti determinati dagli altri quattro (teor. VII, 17 o teor. VIII, 88).

Oss. III. Dati due segmenti obliqui uguali di due rette sghembe, che con una di esse formano angoli uguali, essi formano angoli uguali anche con la seconda retta; e la retta che unisce i punti di mezzo dei segmenti determinati dai loro estremi sulle due rette è la perpendicolare comune (teor. VI, 17).

Teor. III. Due coppie di raggi che hanno lo stesso angolo e la medesima distanza sono identiche.

Siano ab, $a'b'$ le due coppie di raggi, α e β, α' e β' i piani che passano ordinatamente per un raggio di una coppia e riescono paralleli all'altro, (AB), $(A'B')$ i due segmenti normali. Nei piani α e α' conduciamo per A e A' i raggi b_1 e b'_1 paralleli e dello stesso verso dei raggi b e b'; si deve avere $(ab_1) \equiv (a'b'_1)$ (coroll. I, teor. I, 40).

Siano C e C', F ed F' due coppie di punti ad ugual distanza rispettivamente da B e B', A e A' sui raggi b e b', a e a'. Conduciamo per C e C' le parallele ad (AB) e $(A'B')$ fino all'incontro in C_1 e C'_1 dei due raggi b_1 e b'_1; si ha $(AC_1) \equiv (AC_1')$, essendo per dato $(BC) \equiv (B'C')$ (coroll. II, teor. I, 87, teor. I, 44). I triangoli AC_1F, A_1C_1F' sono uguali avendo due lati e l'angolo compreso uguali, dunque $(C_1F) \equiv (C'_1F')$. I triangoli FC_1C, $F'C'_1C'$ sono pure uguali perchè rettangoli in C' e C_1 e per avere i cateti uguali; dunque si ha $(FC) \equiv (F'C')$.

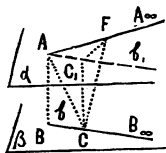



fig. 81

Si ha inoltre $(AC) \equiv (A'C')$, $(BF) \equiv (B'F')$, perchè per es. A e A' hanno la stessa distanza dalle rette b e b' e i segmenli (AC), $(A'C')$ hanno su b e b' proiezioni uguali. Dunque i quattro punti $ABCF$, $A'B'C'F'$ hanno due a due la stessa distanza, e quindi determinano due figure rettilinee identiche (teor. VII. 17, opp. teor. VIII, 88) nelle quali le coppie di raggi (ab), $(a'b')$ e i loro estremi A e A' sono punti corrispondenti.

Coroll. Due coppie di rette sghembe che hanno gli stessi angoli e la medesima distanza sono identiche.

Oss. IV. Due coppie di raggi che hanno lo stessso angolo o una stessa distanza non sono in generale identiche, perchè nel primo caso i segmenti normali ai raggi delle due coppie in generale sono disuguali, nel secondo caso perchè non hanno in generale lo stesso angolo.

§ 7.

Angoli di raggi, rette, semipiani e piani.

90. *Angolo di un raggio e di una retta con un piano.*

Oss. I. Sia dato un raggio a e un piano β e supponiamo dapprima che l'estremo A del raggio sia situato sul piano.

Siano inoltre A_∞ e b_∞ il punto e la retta all'infinito del raggio e del piano dati. La distanza del punto A_∞ dai punti della retta b_∞ ha un minimo e un massimo che vengono misurati a partire da A_∞ sulla perpendicolare condotta da A_∞ alla retta b_∞, e sono le distanze del punto A_∞ dalla retta b_∞ (teor. VII, 73) (fig. 82).

Scelta un'altra retta b'_∞ e un altro punto A'_∞, se la distanza minima, o la massima, del punto A'_∞ dalla retta b'_∞ è uguale a quella del punto A_∞ dalla retta b_∞, le figure piane formate dalle due rette b_∞ e b'_∞ coi due punti A_∞ e A'_∞ sono identiche, vale a dire la distanza dei punti della retta b_∞ dal punto A_∞ sono uguali rispettivamente alle distanze dei punti corrispondenti della retta b'_∞ dal punto A'_∞, intendendo per punti corrispondenti delle rette b_∞ e b'_∞ quelli equidistanti in un dato verso dal piede del segmento normale minimo o massimo condotti ad esse da A_∞ e A'_∞ (teor. III, 15).

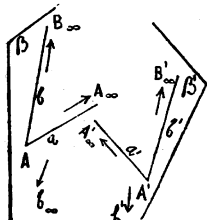



fig. 82

Ma se un segmento obliquo avente i suoi estremi in A_∞ e b_∞ è uguale ad un segmento obliquo avente i suoi estremi in A'_∞ e b'_∞, in generale le due figure $(A_\infty b_\infty)$, $(A'_\infty b'_\infty)$ per questo solo fatto non sono identiche, vale a dire le distanze dai due punti A_∞, A'_∞ dalle due rette b_∞, b'_∞ non sono uguali. Per angolo del raggio a col piano β non si può dunque prendere quello che esso forma con un raggio qualunque b del piano β limitato per es. in A, se si vuole che l'angolo fra il raggio e il piano possa essere considerato come elemento di confronto fra due figure identiche.

Se si ha un altro piano β' e un altro raggio a' e se b' è un raggio di β' che forma con a' lo stesso angolo di a con b, non possiamo concludere per ciò che si è detto prima che gli angoli formati dai raggi a e a' con tutti i raggi dei loro piani corrispondenti β e β' siano uguali, anzi si può dire che in generale non lo sono.

Ma se invece come misura dell'angolo del raggio a col piano β consideriamo la distanza minima del punto A_∞ dalla retta b_∞ e così per il raggio a' col piano β', se le due distanze minime di A_∞ e A'_∞ dalle loro rette corrispondenti b_∞ e b'_∞ sono uguali, sono altresì ordinatamente uguali gli angoli che i raggi a e a' formano coi raggi dei piani corrispondenti β e β', e perciò le figure $(a\beta)$ e $(a'\beta')$ sono identiche (fig. 82). Dunque:

Def. I. Per angolo di un raggio con un piano intenderemo l'angolo che viene misurato dalla distanza minima del punto all'infinito del raggio alla retta all'infinito del piano.

Teor. I. L'angolo che un raggio fa con un piano è quello che esso raggio fa con la sua proiezione sul piano.

Difatti la normale condotta dal punto A_∞ alla retta b_∞ passa pei poli di questa retta, e quindi il piano determinato dal raggio a e dalla normale suddetta è il piano normale del raggio a al piano (coroll. II, teor. II, 87), e se a' è l'intersezione di questo piano col piano β, a' è la proiezione del raggio sul piano, e l'angolo (aa') è misurato dalla distanza minima di A_∞ e b_∞.

Coroll. L'angolo di un raggio con un piano è il minore dei due angoli che il raggio fa con la retta della sua proiezione sul piano.

Difatti il secondo angolo è misurato dalla distanza massima di A_∞ di b_∞ e le distanze minima e massima sono supplementari (teor. VII, 73).

Teor. II. L'angolo che un raggio fa con la sua proiezione in un piano è l'angolo minimo che il raggio fa con tutti i raggi del piano.

Perchè la distanza del punto A_∞ da ogni punto della retta b_∞, che non sia il piede del segmento normale minimo, è maggiore di questo minimo (teor. VII, 73).

Coroll. L'angolo che il raggio fa col prolungamento della sua proiezione sul piano è massimo.

Def. II. Per *angoli di una retta con un piano* intendiamo quelli che sono misurati dalle distanze minima e massima dei suoi due punti opposti all'infinito dalla retta all'infinito del piano.

Oss. II. Siccome queste distanze sono situate sulla perpendicolare condotta da uno o dall'altro dei punti all'infinito della retta alla retta all'infinito del piano, ne consegue che esse prese insieme danno quattro retti e danno precisamente la misura degli angoli che la retta data fa con la sua proiezione sul piano dato.

Oss. III. La def. I vale evidentemente anche quando il raggio non ha il suo estremo sul piano. In tal caso due figure date ciascuna in questo modo, saranno evidentemente identiche se il segmento compreso tra l'estremo del raggio e il punto d'incontro del suo prolungamento o di esso col piano sarà uguale nelle due figure.

Probl. ***Costruire con elementi del campo finito un raggio che passi per un punto P e formi un angolo dato con un piano.***

Basta condurre dal punto dato P la normale al piano (coroll. VIII, teor. IV, 87) e per questa far passare un piano che sarà normale al dato (teor. III, 87), e lo intersecherà secondo una retta passante per il piede A della normale suddetta. Se si considera un raggio di questa retta limitato in A e se da A nel piano normale suddetto si conduce un altro raggio che formi col primo l'angolo dato (oss. III, 60), tirando dal punto P il raggio parallelo, questo sarà uno dei raggi richiesti. Da questa costruzione risulta che il problema ammette infinite soluzioni.

91. *Diedro e angolo diedro.*

Def. I. Un fascio di piani incontra il piano all'infinito π_∞ in un fascio di rette, che ha per centri i punti all'infinito X_∞, X'_∞ opposti dell'asse del fascio. E ai semipiani del fascio corrispondono i raggi o semirette del fascio nel piano π_∞, limitati ai due punti X_∞, X'_∞. Ai settori angolari di due semirette a_∞, b_∞ del fascio corrispondono due parti del fascio di piani determinati dai due semipiani α e β, che si chiamano *diedri*, e che insieme presi costituiscono l'intero fascio.

Per *diedro* di due semipiani intenderemo sempre quello che corrisponde al settore angolare più piccolo delle loro semirette all'infinito, eccetto che i due diedri dei due semipiani siano uguali. I due semipiani si chiamano *facce*; l'asse del fascio, *spigolo* del diedro.

Se un diedro si considera come sostituibile ad un altro identico in ogni relazione con altri diedri, esso si chiama *angolo diedro* [1]).

Se α e β sono le facce di un diedro, lo indicheremo col simbolo $(\alpha\beta)$.

Def. II. Come le due semirette a_∞, b_∞ considerate intorno al punto X_∞, o X'_∞, determinano due settori angolari piani che insieme presi costituiscono il piano completo, quando si considera il punto come elemento, così due semipiani di un fascio determinano due parti dello spazio intorno all'asse del fascio che si chiamano pure *diedri*; ed anche in questo caso per *diedro* di due semipiani intenderemo la parte dello spazio che corrisponde al diedro nel fascio.

Oss. I. Usiamo la stessa parola in uno e nell'altro caso perchè ogni diedro del fascio determina un diedro dello spazio. e reciprocamente, sebbene in sostanza siano enti diversi, per essere l'elemento nel primo il semipiano, nel secondo il punto; il primo è un ente ad una dimensione, mentre il secondo è a tre dimensioni (int. 110).

Teor. I. Un diedro è costituito dai semipiani che congiungono l'asse coi

---

1) L'angolo diedro è la grandezza intensiva del diedro (int. def. II, a e c, 111).

raggi di un angolo i cui lati sono sulle facce di esso (coroll. II, teor. II, 71 e def. I e II).

Teor. II. Un diedro è tagliato da piani paralleli secondo angoli uguali.

Difatti i piani paralleli tagliano le facce del diedro secondo raggi paralleli (teor. III, 85). Quelli situati in una faccia sono diretti nel medesimo verso, perchè hanno lo stesso punto all'infinito (def. II, 33), e quindi i settori angolari in cui viene tagliato il diedro dalla serie di piani paralleli sono uguali (teor. I. 40).

Coroll. Due semipiani qualunque sono tagliati da piani paralleli in raggi che hanno lo stesso angolo.

Difatti sono intersecati in raggi paralleli, e quelli di un semipiano sono diretti nel medesimo verso.

Teor. III. Ad angoli uguali nel piano all'infinito corrispondono diedri uguali nei fasci di piani i cui assi passano pei vertici degli angoli dati.

Siano $a_\infty, b_\infty, a_{1\infty}\ b_{1\infty}$, le due coppie di lati dei due angoli all'infinito, $X_\infty\ X'_\infty$, $X_{1\infty}, X'_{1\infty}$ i loro vertici, che sono coppie di punti opposti; x e x_1 siano gli spigoli di due diedri aventi all'infinito i due angoli dati. Si stabilisca una corrispondenza d'identità fra i due angoli, in modo che a X_∞ e X'_∞ corrispondano i punti $X_{1\infty}$ e $X'_{1\infty}$, e sia data una corrispondenza d'identità fra i due spigoli x e x_1 dei due diedri, nella quale A e A_1 siano due punti corrispondenti. Il piano π_∞ si può considerare per l'unità finita come un piano limite assoluto di ogni punto del campo finito, e quindi anche di A e di A_1 (teor. I, 84). Scelti due punti Y e Z nel primo diedro e congiunti con A, essi danno due raggi AY, AZ che determinano all'infinito due punti Y_∞, Z_∞ dell'angolo $(a_\infty b_\infty)$. Costruiti nell'angolo $(a_{1\infty} b_{1\infty})$ i punti corrispondenti $Y_{1\infty}$, $Z_{1\infty}$ si ha: $(Y_\infty Z_\infty) \equiv (Y_{1\infty} Z_{1\infty})$. I triangoli $Y_\infty A Z_\infty$, $Y_{1\infty} A_1 Z_{1\infty}$ sono identici (teor. III, 34) e quindi $Y_\infty \widehat{A Z_\infty} \equiv Y_{1\infty} \widehat{A_1 Z_{1\infty}}$ (teor. III, 42), dunque costruiti nei raggi $A_1 Y_{1\infty}$, $A_1 Z_{1\infty}$ i punti $Y_1 Z_1$ dal punto A_1 ad uguali distanze di quelle dei punti Y e Z da A, i triangoli AYZ, $A_1 Y_1 Z_1$ sono uguali per avere due lati e l'angolo compreso uguali (teorema II, 42) e quindi $(YZ) \equiv (Y_1 Z_1)$, dunque i due diedri sono figure identiche (teor. III e coroll. II, teor. II, 15).

Coroll. I. Due angoli disuguali $(a_\infty b_\infty) > (a_{1\infty} b_{1\infty})$ *determinano intorno a due rette* x *e* x_1, *passanti per i loro vertici, diedri disuguali* $x.\, a_\infty b_\infty > x_1 .\, a_{1\infty} b_{1\infty}$.

Basta immaginare l'angolo $(a_\infty b'_\infty)$ contenuto in $(a_\infty b_\infty)$ ed uguale all'angolo $(a_{1\infty} b_{1\infty})$. Il semipiano $x_1 b'_\infty$ è compreso nel diedro $x.a_\infty b_\infty$; e siccome il fascio di piani e semipiani è semplicemente chiuso (teor. VIII, 83), si ha $x.a_\infty b'_\infty < x.a_\infty b_\infty$, e quindi $x.a_\infty b_\infty > x.a_{1\infty} b_{1\infty}$ (int. def. II, 61).

Coroll. II. Due diedri colle facce rispettivamente parallele sono uguali o supplementari.

Teor. IV. Due diedri uguali determinano all'infinito angoli uguali.

Siano $x.a_\infty b_\infty$, $x.a_{1\infty} b_{1\infty}$ i due diedri, e supponiamo che sia $(a_\infty b_\infty) > (a_{1\infty} b_{1\infty})$. In tal caso i due diedri non sarebbero uguali (coroll. I, teor. III), dunque ecc.

Teor. V. L'angolo diedro è misurato dalla distanza normale delle due semirette all'infinito delle facce del diedro.

Difatti gli angoli diedri di un fascio di piani pei teoremi precedenti si possono confrontare (misurare) mediante gli angoli del fascio determinato dal

primo nel piano all'infinito. Ma gli angoli del fascio in questo piano, che è un piano completo (teor. I e def. I, 84) si possono confrontare per mezzo dei segmenti che essi determinano sulla retta polare dei centri del fascio (teor. IV, 69). Scelte inoltre due semirette a_∞, b_∞ di un angolo, se A_∞, B_∞ sono i loro punti d'intersezione colla retta polare dei vertici dell'angolo, $(A_\infty B_\infty)$ è il segmento normale alle due semirette (def. II, 73), che dà la loro distanza normale.

Teor. VI. Un fascio di piani è identico nella posizione delle sue parti e continuo.

Perchè tale è la proprietà della polare del punto all'infinito dell'asse del fascio.

Teor. VII. Un diedro ($\alpha\beta$) è identico allo stesso diedro considerato nel verso opposto.

Perchè tale è la proprietà di un segmento rettilineo (int. g, 99 o c, 104).

Def. III. Se si taglia un fascio di piani, o un diedro, con un piano normale all'asse o allo spigolo, il fascio di rette, o l'angolo, che ne risulta si chiama *sezione normale* del fascio o del diedro.

Teor. VIII. Se due diedri sono uguali o disuguali, le loro sezioni normali sono uguali o disuguali, e inversamente.

Congiunto un punto A dello spigolo di un diedro coi due punti A_∞ B_∞ estremi del segmento normale delle due semirette a_∞, b_∞, si ha un piano normale allo spigolo nel punto A, perchè la retta $A_\infty B_\infty$ è la polare del punto all'infinito di questo spigolo (teor. I, 87), e quindi se i segmenti normali alle coppie di semirette all'infinito delle facce dei due diedri sono uguali, i due angoli delle sezioni normali sono uguali (def. I, 39).

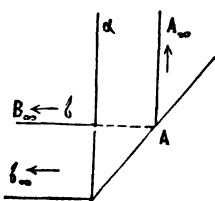



fig. 83

Se invece sono uguali le sezioni normali, ciò significa che i segmenti normali alle coppie di semirette all'infinito delle facce sono uguali, e perciò i due diedri sono uguali. Inoltre a diedri maggiori o minori corrispondono ordinatamente sezioni normali maggiori o minori (fig. 83).

Def. IV. Per angolo di due semipiani qualunque s'intende quello misurato dal segmento normale delle loro semirette all'infinito (coroll. I, teor. VII, 73).

Teor. I. L'angolo di due semipiani è il minimo, o il massimo, degli angoli che un raggio di uno di essi fa con un raggio dell'altro, e reciprocamente.

Difatti siano α e β i due semipiani, a_∞, b_∞ le loro semirette all'infinito, $(A_\infty B_\infty)$ il segmento normale. Il segmento normale $(A_\infty B_\infty)$ delle due semirette, anche se non hanno gli estremi comuni, dà la distanza minima tra i punti di una retta e i punti dell'altra, se è minore di un segmento retto, o la distanza massima se è maggiore di un retto (coroll. I, teor. VII, 73 e def. IV) (fig. 83).

Oss. II. Si possono scegliere due punti C_∞, D_∞ il cui segmento sia minore di $(A_\infty B_\infty)$, ma non sia minore nè pel punto C_∞ nè pel punto D_∞ dai punti dell'altra retta; ne consegue che anche nei due semipiani vi sono raggi c e d il cui angolo é minore dell'angolo dei semipiani, ma non è il minimo nè per c rispetto ai raggi dei semipiano α, nè nello stesso tempo per d rispetto ai raggi del semipiano β.

Coroll. L'angolo supplementare dei due semipiani è nel primo caso il massimo e nel secondo il minimo fra i raggi dei due semipiani.

Def. V. I diedri che hanno lo stesso spigolo, e tali che le loro facce sono situate in due piani, e le facce dell'uno sono opposte a quelle dell'altro rispetto allo spigolo comune, si chiamano *diedri opposti.*

Teor. X. Due diedri opposti sono uguali.

Difatti essi hanno all'infinito due angoli opposti al vertice che sono uguali (teor. II, 40 e oss. I, 69).

Def. VI. Per *diedri e angoli di due piani* α e β intendiamo i diedri e gli angoli dei semipiani (ab), (ba'), $(a'b')$, $(b'a)$; essendo a e a', b e b' i semipiani determinati in α e β dalla loro retta d'intersezione.

Oss. III. Si ha:

$$(ab) \equiv (a'b'), \quad (b'a) \equiv (ba')$$

e rispetto alla loro misura è:

$$(ab) + (ba') = \pi.$$

Il minore, o il suo opposto, degli angoli diedri di due piani si chiama anche *angolo diedro* o semplicemente *angolo dei due piani*; se sono tutti uguali basta evidentemente considerarne uno soltanto.

Teor. XI. I diedri di due piani hanno due piani bissettori perpendicolari fra loro.

Difatti gli angoli delle due rette $a_{1\infty}$, $b_{1\infty}$ ove sono situate le semirette a_∞, a'_∞; b_∞,b'_∞ all'infinito di α e α', β e β' hanno due bissettrici (cor. II, teor. IV, 69), che unite col punto A danno i piani bissettori dei diedri dei due piani, che sono fra loro perpendicolari (teor. II, 87).

Probl. Costruire con elementi del campo finito un semipiano che faccia un angolo dato con un altro semipiano colla stessa retta limite.

Da un punto A della retta limite x del semipiano dato basta condurre un piano normale ad essa, che lo intersecherà in un determinato raggio a. In questo piano normale si conduca poi un altro raggio b pel punto A, che formi con a l'angolo dato (oss. III, 60). Il semipiano determinato dalla retta x e dal raggio b sarà il richiesto. Da ciò si vede che il problema ammette due soluzioni.

§ 8.

Identità dello spazio intorno ai suoi punti all'infinito e alle sue rette.

92. *Teor. I. Lo spazio è identico intorno ad ogni suo punto all'infinito.*

Siano X_∞, Y_∞ due dei suoi punti all'infinito. Tagliamo le stelle che hanno i vertici in X_∞ e Y_∞ con due piani perpendicolari alle loro direzioni. L'identità fra le due stelle si può stabilire mediante l'identità dei due piani e facendo corrispondere i vertici fra loro.

Teor. II. Tutti i fasci di piani non paralleli sono identici.

Difatti le rette all'infinito che li misurano sono identiche (teor. V, 91; coroll. III, teor. VI; coroll. I, teor. II, 69 e teor. I, 8).

Coroll. Lo spazio è identico intorno ad ogni sua retta del campo finito.

Teor. III. Un fascio di piani paralleli è identico nella posizione delle sue parti e continuo.

Difatti scelta una perpendicolare alla direzione dei piani, ai segmenti uguali delle perpendicolari corrispondono parti uguali del fascio, e inversamente (teor. IV, 85). La dimostrazione di questa uguaglianza è analoga a quella data per i fasci di rette parallele (teor. III, 48). E le proprietà quindi dei segmenti della perpendicolare alla direzione dei piani si cangiano in altre proprietà del fascio.

Teor. IV. Tutti i fasci di piani paralleli sono identici.

Perchè tali sono le rette che li misurano.

Coroll. I. Lo spazio è identico intorno ad ogni sua retta all' infinito.

§ 9.

Angoloide — Triedro.

93. *Def. I.* La figura rettilinea determinata da n raggi abc... uscenti da un punto P si chiama *angoloide* oppure *ennispigolo.* I raggi $a, b, c,$ ... sono gli *spigoli*, il punto P il *vertice*, i settori (ab), (ac),... formati dai suoi raggi le *facce*, e i diedri formati dalle facce i *diedri* dell' angoloide.

Il diedro formato dalle due facce (ab) e (bc), o il suo angolo, lo indicheremo col simbolo $\widehat{abc}$ oppure $\widehat{cba}$.

L' insieme delle facce dell' angoloide considerate come settori piani (def. II, 46), si chiama *superficie* dell' angoloide.

Def. II. Se l' angoloide ha tre soli spigoli a, b, c, esso chiamasi *triedro* o *trispigolo.* Lo indicheremo col simbolo abc. Se P è il vertice e ABC tre punti degli spigoli, lo indicheremo anche con $P.ABC$.

Siano abc i tre raggi uscenti da un punto P dello spazio, $A_\infty, B_\infty, C_\infty$ i loro punti all' infinito. Le facce del triedro sono misurate dai lati del triangolo $A_\infty B_\infty, C_\infty$ (def. I, 39). Gli angoli di questo triangolo misurano invece i diedri del triedro (def. II, 91).

La parte interna ed esterna del triangolo $A_\infty B_\infty C_\infty$ ci dà la parte dello spazio *interna* ed *esterna* al triedro (oss. 1, 72).

Def. III. Come nel triangolo abbiamo i prolungamenti dei lati che con essi costituiscono le tre rette del triangolo, così nel triedro abbiamo i prolungamenti delle facce che con queste costituiscono i tre piani del triedro. Come ogni vertice del triangolo è opposto al lato degli altri due, così ogni spigolo del triedro lo diremo *opposto* alla faccia degli altri due. Ogni diedro del triedro è *opposto* alla faccia opposta al suo spigolo. Gli spigoli d' un triedro sono i prolungamenti di quelli di un altro triedro; i due triedri si dicono *opposti al vertice.* Essi hanno all' infinito due triangoli opposti.

Teor. I. Le parti di spazio racchiuse dai diedri $\widehat{abc}, \widehat{bca}, \widehat{cab}$ *di un triedro* abc *limitate dalle facce opposte coincidono.*

Questo teorema deriva tosto da quello analogo del piano completo (teorema I, 72 e def. II).

Coroll. I. Un angolo collo stesso vertice del triedro e i cui raggi sono in-

terni al triedro o sulla superficie di esso, e senza giacere tutto in essa, giace nell'interno del triedro (oss. I, 72 e def. II).

Coroll. II. Due punti interni ad un triedro, o di due facce di esso, determinano un segmento interno al triedro (coroll. IV, teor. II, 50 e coroll. I).

Coroll. III. La parte interna di ogni triangolo avente i suoi vertici nell' interno di un triedro, o almeno su due facce, è interna al triedro.

Coroll. IV. Due piani che passano per due spigoli e per due punti interni delle facce opposte del triedro si incontrano in un raggio della parte interna, e inversamente (oss. I, 72, def. II).

Oss. I. Come tre rette nel piano all'infinito determinano otto triangoli le cui parti interne prese insieme costituiscono l'intero piano, così ***tre piani passanti per un punto dello spazio determinano otto triedri*** le cui parti interne costituiscono l'intero spazio.

Teor. II. Ai raggi interni di un triedro sono opposti i raggi interni del triedro opposto (teor. II, 72 e def. II).

Coroll. I. Se un raggio passante pel vertice di un triedro è esterno al triedro e non interno al triedro opposto, uno solo dei tre piani che lo congiungono cogli spigoli incontra una faccia opposta in un raggio interno (coroll. teor. II, 72).

Coroll. II. Una retta che non incontra uno spigolo o incontra due facce del triedro compreso anche l' opposto, in punti interni e la terza in un punto esterno, oppure incontra le tre facce in punti esterni [1]).

Basta considerare il piano che passa pel vertice del triedro e per la retta data. Se il piano incontra il triedro in due raggi esterni, le sue rette sono anche esterne al triedro e all'opposto, e il coroll. è dimostrato. Se invece lo taglia in due raggi interni, i prolungamenti sono interni al triedro opposto, e quindi anche in tal caso il teor. è dimostrato.

Oss. II. Può darsi che i punti interni della retta appartengano rispettivamente ai due tiedri opposti, anzichè ad uno solo; in tal caso la retta incontra la superficie di ciascuno dei due triedri in un solo punto interno.

Teor. III. Un piano passante pel vertice del triedro o incontra internamente due facce ed esternamente la terza faccia, oppure incontra tutte e tre le facce esternamente (teor. III e oss. II, 72 e def II).

Teor. IV. In ogni triedro la somma di due facce è maggiore della terza (teor. I, 76).

Coroll. Ogni faccia di un triedro è maggiore della differenza delle altre due (coroll. teor. I, 76).

Teor. V. In un triedro alla faccia maggiore sta opposto il diedro maggiore, e inversamente, al diedro maggiore sta opposta la faccia maggiore (oss. I, 76).

Coroll. I. Se due diedri di un triedro sono uguali, le facce opposte sono uguali.

1) Il postulato dato per es. da Sannia e d'Ovidio l. c. pag. 405. « Se per un punto interno a una faccia di un angoloide convesso (ma non su uno spigolo) si tira una retta, che non stia nel piano di quella faccia, questa retta incontrerà la superficie dell'angoloide in un altro punto e in uno solo » deriva senz'altro dal teorema analogo da noi dato (nota, 51) per un poligono convesso considerato nel piano all'infinito, che vale anche nel piano completo.

E inversamente.

Se due facce sono uguali i due diedri opposti sono uguali (teor. III, 42; teor. V, 55, oss. I, 76).

Def. IV. Se il triedro ha due facce uguali, dicesi *isoedro*. La terza faccia si chiama *base*.

Ad ogni triangolo equilatero all'infinito corrisponde un triedro che ha tutte e tre le facce e tutti e tre i diedri uguali; esso si chiama *equiedro*.

Se il triangolo all'infinito del triedro è coniugato polare (def. IV, 69) gli angoli delle facce dei diedri sono retti (def. I. 39), e in tal caso il triedro dicesi *equiedro rettangolo*, o *trirettangolo*.

Teor. VI. In un triedro isoedro il piano che unisce la bissettrice della base con lo spigolo opposto è perpendicolare alla base, e bisseca il diedro delle facce uguali.

Ciò deriva dalle proprietà del triangolo all'infinito del triedro isoedro, che è isoscele (teor. IV, 42 e def. II; teor. V, 69 e teor. II, 87).

Teor. VII. In due triedri che hanno due facce uguali, la terza faccia è maggiore in quel triedro in cui le sta opposto il diedro maggiore, e inversamente (oss. I, 76).

Def. V. Al triangolo reciproco o supplementare di un triangolo dato nel piano all'infinito (def. I, 76) corrisponde il triedro *reciproco* o *supplementare* al triedro dato.

Oss. II. Dato il triedro *abc*, per ottenere il triedro reciproco per la def. VI basta condurre dal vertice del primo i raggi perpendicolari ai piani delle facce e dalla stessa parte dello spigolo rimanente.

Teor. VIII. Se un triedro è supplementare ad un altro, questo è supplementare al primo (teor. II, 76).

Teor. IX. Gli angoli delle facce e dei diedri di un triedro sono uguali rispettivamente agli angoli dei diedri e delle facce del triedro supplementare (teor. III, 76).

Teor. X. In un triedro ciascun angolo diedro aumentato di due retti è maggiore della somma degli altri due (teor. V, 76).

Teor. XI. In ogni triedro la somma della facce è minore di quattro angoli retti (teor. VII, 76).

Teor. XII. In ogni triedro la somma degli angoli diedri è maggiore di due e minore di sei retti (teor. VII, 76).

Teor. XIII. La somma degli angoli diedri e delle tre facce di un triedro trirettangolo è uguale a tre retti (teor. VIII, 76).

§ 10.

Triedri uguali.

94. *Teor. I. I triedri che hanno gli spigoli paralleli e diretti nel medesimo verso sono uguali.*

Difatti un triangolo all'infinito dà luogo per ogni punto del campo finito dello spazio ad un triedro, e siccome il piano alll'infinito può ritenersi come

piano limite assoluto rispetto ad ogni punto del campo finito (teor. I, 84), così tutti questi triedri sono uguali.

Teor. II. Due triedri che hanno le facce uguali sono uguali.

Perchè i loro triangoli all'infinito avendo i tre lati uguali sono uguali (teor. III, 17 e def. II, 93).

Teor. III. Due triedri che hanno i diedri uguali sono uguali (teor. IV, 76 e teor. III, 15).

Teor. IV. Due triedri che hanno due facce e il diedro compreso uguale sono uguali.

Perchè i loro triangoli all'infinito avendo due lati e l'angolo compreso uguali sono uguali (teor. II, 42 e oss. I, 69).

Teor. V. In triedri uguali a facce uguali stanno opposti diedri uguali, e inversamente.

Deriva dalla proprietà analoga dei triangoli all'infinito dei due triedri (teor. I, 42).

Teor. VI. In una delle parti in cui lo spazio è diviso da un piano non esistono due triedri uguali aventi una faccia comune nel piano dato (oss. I, 74).

Teor. VII. Due triedri che hanno due diedri e la faccia comune ad essi uguali sono uguali (oss. I, 76).

Teor. VIII. Due triedri opposti al vertice sono uguali.

Perchè i loro triangoli all'infinito essendo opposti sono uguali (teor. III, 30).

Teor. IX. I triedri trirettangoli sono uguali in sei maniere diverse.

Perchè i loro triangoli all'infinito hanno la stessa proprietà (coroll. II, teor. III, 69).

Teor. X. I piani delle facce di un triedro trirettangolo dividono lo spazio in otto triedri trirettangoli (teor. IV, 72).

§ 11.

Tetraedro.

95. *Def. I.* La figura rettilinea determinata da quattro punti dello spazio non situati in un piano (def. I, 9) chiamasi *tetraedro*. I punti dati sono i *vertici*, i segmenti e i triangoli determinati da essi gli *spigoli* e le *facce* del tetraedro. Per spigoli e per facce intenderemo anche le rette e i piani determinati dai quattro vertici. Per *triedri* del tetraedro intenderemo quelli determinati dagli spigoli limitati in uno qualunque dei vertici, e per *diedri* del tetraedro quelli dei suoi triedri.

Def. II. Un vertice dicesi *opposto* alla faccia degli altri tre; così uno spigolo è *opposto* a quello che contiene i due vertici non situati su di esso.

Ind. I. Il tetraedro dei punti A, B, C, D lo indicheremo col simbolo $ABCD$.

Def. III. La figura costituita dalle facce (triangoli) del tetraedro si chiama *superficie* o *contorno* del tetraedro.

Teor. I. Le parti dello spazio interne ai quattro triedri del tetraedro limitate dalle facce opposte coincidono.

La parte interna del triangolo ABC è situata nell'interno del triedro $D.ABC$ del tetraedro $ABCD$ (coroll. III, teor. I, 93). Sia P' un punto interno al triangolo ABC; il segmento DP' è interno allo stesso triedro. Sia P un punto di questo segmento, basta dimostrare che esso è interno ad uno qualunque degli altri tre triedri del tetraedro.

Il raggio AP' è situato entro l'angolo CAB (teor. I, 51), e quindi l'angolo $\widehat{DAP'}$ è interno al triedro $A.BCD$ (coroll. I, teor. I, 93), e perciò anche il segmento AP è interno ad esso. Dunque il punto P giace nella parte interna del triedro $A.BCD$, e per la stessa ragione anche degli altri due triedri del tetraedro (fig. 84).

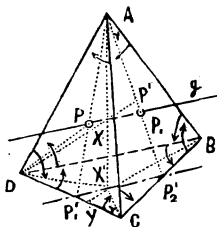



fig. 84

Def. IV. Le parti interne dei triedri di un tetraedro costituiscono ciò che si chiama la *parte interna* del tetraedro. La parte rimanente dello spazio, compresa la superficie, si chiama *parte esterna* del tetradero [1]).

Def. IV. Per punto interno o esterno al triangolo s'intende un punto della parte interna o esterna, ma non situato sulla superficie.

Se una figura ha tutti i suoi punti interni o esterni al tetraedro, anche se ne ha alcuni sulla superficie di esso, dicesi *interna* od *esterna* al tetraedro.

Coroll. Le parti interne dei diedri dei triedri del tetraedro, limitate dalle facce di esso, coincidono (teor. I, 93).

Coroll. II. Il segmento di due punti interni del tetraedro o di due facce di esso, giace nell'interno del tetraedro.

Siano X, Y due punti, l'angolo $A.XY$ giace nell'interno del triedro $A.BCD$ (coroll. I, teor. I, 93).

Se X', Y' sono i punti d'intersezione dei raggi AX e AY colla faccia BCD, il segmento $(X'Y')$ è interno a questa faccia (coroll. III, teor. I, 51). Ma il triangolo $AX'Y'$ è interno al triedro $A.BCD$ (coroll. III, teor. I, 93), dunque (XY) è interno al tetraedro (int. a, 13).

Coroll. III. La parte interna di un triangolo che ha i suoi vertici interni al tetraedro o sulla superficie di questo ma non sulla stessa faccia, è interna al tetraedro stesso.

Siano X, Y, Z i vertici del triangolo; i lati sono interni al tetraedro (coroll. II) e così anche i segmenti che hanno i loro estremi su di essi (coroll. III, teor. I, 51). Ma questi contengono tutti i punti della parte interna del triangolo (coroll. I, teor. III, 51), dunque ecc.

Oss. I. I quattro piani del tetraedro dividono lo spazio in 15 parti che si chiamano *regioni*: e cioè le quattro interne ai quattro triedri del tetraedro da essi formati, le quattro parti date dai triedri opposti, le sei parti date dai diedri opposti agli spigoli e finalmente le rimanenti parti opposte alle facce.

Teor. II. Un piano che non passa per alcun vertice del tetraedro e incontra uno spigolo in un punto interno:

---

1) Senza alterare i teoremi seguenti relativi a queste parti, esse potrebbero essere definite in modo che non vi appartenesse la superficie del tetraedro, come abbiamo fatto per il cerchio (def. III, 57), ma bisognerebbe farlo allora anche pel triangolo e quindi pel triedro (def. I, 51; oss. I, 72; def. II, 93).

1.° o incontra internamente altri due spigoli che col primo passano per il medesimo vertice;

2.° o incontra altri tre spigoli in punti interni, uno dei quali è opposto al primo spigolo, e gli altri due sono opposti fra loro.

Sia $ABCD$ il tetraedro, e (AB) lo spigolo che è incontrato in un punto interno da un piano π. La retta d'intersezione colla faccia ABC interseca un'altro lato di questo triangolo in un punto interno (teor. III, 51), per es. (AC); essa incontrerà quindi (BC) in un punto esterno. La retta d'intersezione col triangolo ACD taglia (AC) in un punto interno, e perciò incontrerà un'altro lato del triangolo in un punto interno per es. (AD) e il lato rimanente (DC) in un punto esterno.

La retta d'intersezione colla faccia BCD incontrando i due spigoli (BC), (DC) in punti esterni interseca anche il terzo spigolo in un punto esterno (coroll. teor. III, 51).

Se invece il piano taglia lo spigolo (BC) in un punto interno, non incontra lo spigolo (AC). Per avere un caso diverso dal primo bisogna che nel triangolo BCD incontri il lato (CD) e non il lato (BD) in un punto interno (il che è possibile), allora esso incontra necessariamente il lato (AD) del triangolo ADC, e perciò il piano interseca internamente le coppie di spigoli opposti (AB), (CD); (BC), (DA) (fig. 84).

Coroll. I. Separati i vertici del tetraedro in due gruppi, un piano può incontrare internamente soltanto gli spigoli che uniscono i vertici di un gruppo con quelli dell'altro; e quando esso incontra internamente uno spigolo e non contiene alcun vertice, rispetto ai suoi punti d'intersezione interni cogli altri spigoli, i vertici si separano sempre in due tali gruppi.

Questo risulta evidentemente dalla dimostrazione precedente. I gruppi possibili sono dunque dei tipi: $(A)(BCD)$, $(AB)(CD)$.

Coroll. II. Se un piano incontra i tre spigoli passanti per un vertice qualunque del tetraedro in punti esterni, esso incontra tutti gli spigoli in punti esterni.

Teor. III. Se una retta g che non incontra alcuno degli spigoli del tetraedro, incontra una faccia in un punto interno P_1, essa interseca un'altra faccia in un punto interno e le altre in punti esterni.

Il piano Ag incontra la faccia ABC secondo la retta AP_1, la quale deve tagliare (BC) in un punto interno P'_2 (coroll. IV, teor. II, 50). Il piano Ag interseca pure la faccia BCD secondo una retta che passa per P'_2 e deve incontrare un altro lato di questo triangolo in un punto interno, per es. (CD) in in P'_1. Il piano Ag incontra altresì la faccia ACD secondo il segmento AP'_1. Il triangolo $AP'_1P'_2$ è interno al tetraedro, e la retta g, avendo con un lato di esso, cioè (AP_1), un punto interno deve intersecare un altro lato per es. (AP'_1) in un punto interno P (teor. III, 51), e quindi incontrerà in un punto interno un'altra faccia del tetraedro. Inoltre, tagliando essa esternamente il lato $(P'_1P'_2)$, incontra esternamente la faccia BCD. Dico che non può incontrare la rimanente faccia in un punto interno. Difatti se indichiamo con P'' il punto d'intersezione della retta $P'_1P'_2$ col lato BD del triangolo BCD, P'' è esterno al segmento (BD) (teor. III, 51), e quindi il raggio AP'' è esterno

all'angolo BAD (coroll. IV, teor. II, 50), e poichè il punto d'intersezione di g colla faccia ABD è sulla retta AP'', il teorema è dimostrato (fig. 84).

Coroll. I. Una retta che incontra tre facce in punti esterni incontra anche la quarta faccia del tetraedro in un punto esterno.

Teor. IV. Una retta che ha un punto interno al tetraedro incontra la superficie di esso in due punti.

Sia X il punto che una retta g ha internamente al tetraedro $ABCD$. Uniamo A con X fino all'incontro in X' colla faccia opposta BCD; X' deve essere nell'interno della faccia (BCD) (teor. I). Sia Y il punto d'intersezione di BX con (DC); Y è interno a (DC) perchè X' è interno alla faccia BCD (teor. I, 50 e coroll. IV, teor. II, 50). Il tetraedro $ABCY$ ha col primo la faccia ABC comune e inoltre le facce AYC, BCY sono parti delle facce ADC, BDC. La retta g avendo nella faccia ABY un punto interno, incontra un'altra faccia in un punto interno, se non taglia alcun spigolo, dunque anche una faccia del tetraedro dato in un punto interno, ed il teor. è dimostrato (teor. III) [1]).

Teor. V. Non vi sono due tetraedri uguali aventi una medesima faccia e coi vertici opposti situati dalla stessa parte della faccia comune.

Siano $ABCD$, $A'BCD$ i due tetraedri aventi la faccia comune BCD. Se i vertici A e A' fossero situati dalle stessa parte rispetto al piano BCD, si avrebbero due triedri, per es. $B.ACD$, $B.A'CD$ uguali aventi due spigoli BC, BD comuni e gli altri due spigoli BA, BA' situati dalla stessa parte della faccia comune, ciò che non è possibile (teor. VI, 94).

§ 12.

Versi delle stelle, dei diedri, triedri e tetraedri. Versi dello spazio.

96. *Def. I.* Nella stella (P_∞) (def. I, 82) i versi del piano direttore (def. III, 61), determinano i *versi della stella.*

Oss. I. Come piano direttore di ogni stella considereremo qui il piano all'infinito.

Teor. I. I versi della stella sono determinati da quelli di un suo diedro.

Perchè tale è la proprietà dei versi del piano all'infinito rispetto a quelli di uno dei suoi angoli (oss. I; teor. IX, 61 e oss. I, 77).

Coroll. Un verso di una stella determina versi uguali dei suoi diedri (coroll. teor. IX, 61 ecc.).

Teor. II. Un verso di un diedro $(\alpha\beta)$ *determina i due versi di una stella a cui appartiene, secondo che lo si considera dall'uno o dall'altro punto all'infinito del suo spigolo.*

Difatti un verso del piano all'infinito non viene determinato dal verso di un angolo $(a_\infty b_\infty)$ senza che sia stabilito quale dei vertici di esso si considera (oss. I, 77).

---

1) Anche questo teorema si ammette con un postulato o tacitamente nei trattati elementari. Come si è dimostrato lo stesso teorema per un poligono convesso nel piano (nota, 51), così si può, seguendo un metodo analogo, dimostrarlo per un *poliedro convesso*.

Conv. Col simbolo $\widehat{abc}$, intenderemo non solo un diedro di una stella, vale a dire collo spigolo limitato da un punto, ma eziandio il verso del diedro considerato dalla faccia (ab) alla faccia (bc).

Teor. III. I diedri $\widehat{abc}$, $\widehat{bca}$, $\widehat{cab}$ del triedro abc hanno lo stesso verso. I diedri $\widehat{acb}$, $\widehat{cba}$, $\widehat{bac}$ sono dello stesso verso fra loro e di verso opposto ai primi tre (oss. I; teor. III, 61 e oss. I, 77).

Def. II. I versi dei diedri del triedro si chiamano *versi del triedro*, e si indicano coi simboli *abc* e *acb*, se a, b, c sono gli spigoli.

Cogli stessi simboli indichiamo i versi della superficie del triedro, che corrispondono ai versi del perimetro del triangolo all'infinito (def. II, 61 e oss. I, 77).

Teor. IV. Il verso abc del triedro determinato dai suoi diedri $\widehat{abc}$, $\widehat{bca}$, $\widehat{cab}$ è uguale al verso acb della superficie (teor. IV, 61 e oss. I, 77).

Teor. V. I simboli abc, bca, cab determinano tanto pei diedri come per la superficie del triedro lo stesso verso, mentre acb, cba bac determinano il verso opposto (teor. V, 61 e oss. I, 77).

Teor. VI. Se due diedri di due triedri di una stella sono dello stesso verso, i due triedri sono dello stesso verso (teor. VIII, 61 e oss. I, 77).

Teor. VII. Se due diedri $\widehat{abc}$, $\widehat{a'b'c'}$ di due triedri abc, a'b'c' sono dello stesso verso o di verso opposto lo sono pure i due triedri dati.

Difatti il verso $\widehat{abc}$ di un diedro è un verso del triedro *abc* (def. II).

Teor. VIII. Due triedri abc, abd aventi il medesimo vertice e una faccia comune sono dello stesso verso o di verso opposto, secondochè gli altri spigoli non comuni di essi sono situati dalla stessa parte o da parti opposte rispetto alla faccia comune.

Difatti nel primo caso sono diretti nello stesso verso, perchè lo sono i loro triangoli all'infinito. Similmente nel secondo caso (teor. X, 61 e oss. I, 77).

Coroll. I. Due triedri $A.BCD$, $A'.BCD$ i cui spigoli incontrano un piano negli stessi tre punti B, C, D, sono dello stesso verso o di verso opposto secondo chè A e A' sono o non sono situati dalla stessa parte del piano BCD.

Difatti nel primo caso i triedri $C.ABD$, $C.A'BD$ e quindi anche i loro diedri $A.\widehat{BCD}$. $A'.\widehat{BCD}$ sono dello stesso verso nella stella di centro C. Gli stessi diedri considerati invece nella direzione opposta dello spigolo, cioè nelle stelle di centri A e A' sono di verso opposto ai primi due (teor. II), ossia hanno lo stesso verso dei diedri opposti in C, i quali sono dello stesso verso (oss. I; teor. I, 61, oss. I, 77). Dunque i versi dei due triedri $A.BCD$, $A'.BCD$ sono dello stesso verso perchè lo sono due dei loro diedri (teor. VII).

Coroll. II. Un verso di un piano determina versi uguali nelle stelle i cui centri sono dalla stessa parte del piano, e versi opposti nelle stelle i cui centri sono rispetto ad esso da parti opposte (def. II e teor. I).

Teor. IX. I versi di due stelle, uguali (od opposti) a quello di una terza stella, sono uguali.

Ciò deriva dal teor. e, 8 dell'introduzione. Ma come pel teor. VII, 61 diamo un'altra dimostrazione. Siano P, P', P'' i centri delle tre stelle, e le stelle P e P' siano dello stesso verso o di verso opposto colla stella P''. Tagliandole col piano π_∞, le due figure d'intersezione di π_∞ colle stelle P e P'', P' e P'' sono

dello stesso verso o di verso opposto (coroll. teor. I, oss. I), e quindi P e P' sono dello stesso verso (teor. VII, coroll. teor. VI, 61, oss. I, 77; oss. I, teor. I e II).

Coroll. Due stelle l'una dello stesso verso l'altra di verso opposto con una terza sono di verso opposto.

Teor. X. Due triedri abc, ab'c' aventi uno spigolo e il vertice comune e le due facce (bc), (b'c') in un medesimo piano e dello stesso verso o di verso opposto, sono dello stesso verso o di verso opposto.

Difatti se gli angoli (bc), $(b'c')$ sono diretti nello stesso verso del fascio intorno al vertice comune e nel piano comune, i triangoli $A_\infty B_\infty C_\infty$, $A_\infty B'_\infty C'_\infty$ all'infinito dei due triedri sono dello stesso verso. Se gli angoli (bc), $(b'c')$ sono invece di verso opposto lo sono anche i versi dei triangoli all'infinito, (coroll. IV, teor. X e oss. I, 77), e in tali relazioni sono anche i versi dei due triedri.

Teor. XI. Due triedri A.BCD, A.B'C'D' collo stesso vertice A, e i cui spigoli incontrano un piano in due triangoli BCD, B'C'D' diretti o no nello stesso verso, sono dello stesso verso o di verso opposto.

Difatti il verso dei due triangoli nel primo caso dà il medesimo verso del piano (teor. IX, 61) e quindi anche della stella di centro A (coroll. II, teor. VIII) e perciò dei due triedri (coroll. teor. I e def. II). Nel secondo caso i versi dei triangoli essendo opposti, lo sono anche quelli dei due driedri (fig. 85).

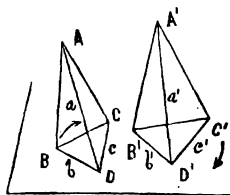



fig. 85

Teor. XII. Due triedri A.BCD, A'.B'C'D' sono dello stesso verso o di verso opposto se le loro sezioni BCD, B'C'D' con un piano π sono dello stesso verso e se i loro vertici sono o no situati dalla stessa parte del piano π.

Se invece i due triangoli BCD, B'C'D' sono di verso opposto, i due triedri nel primo caso sono di verso opposto e nel secondo sono dello stesso verso.

Difatti nel primo caso i triedri $A.BCD$, $A'.BCD$ sono dello stesso verso (coroll. I, teor. VIII). Ma $A'.BCD$, $A'.B'C'D'$ sono pure dello stesso verso (teor. XI), dunque lo sono anche i triedri $A.BCD$, $A'.B'C'D'$ (teor. IX, teor. I e def. II). (fig. 85).

Coroll. I. Due triedri abc, a'b'c' aventi due spigoli bc, b'c' sopra un piano e gli angoli (bc), (b'c') del medesimo verso, sono dello stesso verso o di verso opposto, secondochè gli spigoli a e a' sono o no situati dalla stessa parte del piano.

Se invece (bc), (b'c') sono di verso opposto, nel primo caso i due triedri sono di verso opposto e nel secondo dello stesso verso.

Difatti se D e D' sono i vertici dei due triedri, scelti su a, b, c; a', b', c' i punti A, B, C; A', B', C', i triedri $A.BCD$, $A'.B'C'D'$ sono nel primo caso dello stesso verso, e perciò anche i diedri $A.\widehat{BDC}$, $A'.\widehat{B'D'C'}$ (teor. III e II) e per conseguenza sono dello stesso verso le due stelle di centri D e D' (teor. I), dunque anche i due triedri $D.ABC$. $D.A'B'C'$. Analogamente negli altri casi (fig. 85).

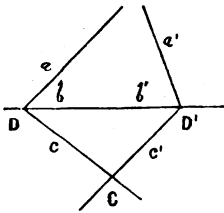
Coroll. II. Due triedri abc, a'b'c' con due spigoli b e b' nella medesima retta e di verso opposto, e tali che gli spigoli c e c' si incontrino in un punto C ed a e a' siano situati dalla stessa parte del piano bb'cc', sono di verso op-

posto. Se invece a e a' sono situati da parti opposte rispetto al piano suddetto, i due triedri hanno il medesimo verso.

Se b e b' sono diretti nel medesimo verso, nel primo caso lo sono anche i due triedri e nel secondo caso sono di verso opposto.

Difatti nel caso precedente se b e b' sono sulla medesima retta e di verso opposto e D e D' sono i vertici dei due triedri, gli angoli (bc), $(b'c')$ sono di verso opposto nel triangolo $DD'C$ (teor. III, 61). I triedri abc, $a'b'c'$, se a e a' sono dalla stessa parte del piano $DD'C$ sono di verso opposto; altrimenti sono ugualmente diretti (coroll. I).

fig. 86

Similmente se b e b' e (bc) e $(b'c')$ sono dello stesso verso (fig. 86).

Teor. XIII. Se si fa uno scambio di numero dispari fra gli spigoli di un triedro e i loro prolungamenti si ottiene un triedro di verso opposto al dato; se si fa invece uno scambio di numero pari il triedro ottenuto è dello stesso verso del dato (teor. I, 77; oss. I, teor. I e def. II).

Coroll. I. Gli otto triedri formati da tre piani che si incontrano in un punto del campo finito si separano in due gruppi di quattro; quelli di un gruppo sono dello stesso verso, quelli di gruppi differenti sono di verso opposto.

Coroll. II. Due triedri o due angoloidi opposti al vertice sono di verso opposto (teor. II, 77).

Coroll. III. Se gli spigoli di un triedro sono paralleli a quelli di un altro triedro, e inoltre uno o tutti e tre gli spigoli dell'uno sono dello stesso verso di quelli dell'altro, i due triedri sono ugualmente diretti; negli altri casi sono di verso opposto.

Perchè tale è la proprietà dei triangoli all'infinito dei triedri (teor. I, 77).

Teor. XIV. I versi dei triedri $A.BCD$, $B.ADC$, $C.DAB$, $D.CBA$ del tetraedro $ABCD$ sono uguali.

Basta dimostrare che il verso così determinato del triedro $A.BCD$ è il medesimo di uno qualunque degli ultimi tre, per es. di $B.ADC$.

I due triedri $A.BCD$, $B.ADC$ hanno due spigoli (AB), (BA) giacenti nella retta AB e di verso opposto; inoltre gli spigoli (AC), (BC) sono situati nel medesimo piano e si incontrano nel punto C, e di più i rimanenti spigoli (AD) e (BD) sono situati dalla medesima parte del piano ABC. Dunque essi sono diretti nel medesimo verso (coroll. II, teor. XI e teor. V), e perciò il teor. è dimostrato.

Se $A.BCD$ indica il verso dei triedri del triedro in A, esso è contrario al verso della superficie indicato dallo stesso simbolo. La medesima osservazione vale anche per gli altri tre triedri (fig. 84).

Def. III. I versi dei triedri di un tetraedro si chiamano *versi del tetraedro.*

Coroll. I versi del tetraedro sono determinati dai versi di uno qualunque dei suoi diedri (def. II).

Ind. I. Un verso del tetraedro determinato dai punti A, B, C, D può essere indicato col simbolo $ABCD$, il quale con una regola facile a intravvedersi dà i versi dei triedri di esso, cioè $A.BCD$, $B.ADC$, $C.DAB$, $D.CBA$. Se questi sim-

boli indicano i versi dei diedri dei triedri e non della loro superficie, il verso del diedro del primo triedro che ha per spigolo AC lo indicheremo col simbolo $B\overline{CA}D$. Inversamente, dato questo verso del diedro suddetto, da esso deduciamo subito il verso della faccia opposta ad A del tetraedro, cioè BCD e quindi anche quello del triedro in A cioè $A.BCD$.

Oss. II. Dato un gruppo ordinato, o una permutazione, di un gruppo naturale di elementi, si ottengono con lo scambio di posto di elementi consecutivi tutti i gruppi ordinati o tutte le permutazioni degli elementi dati (int. c, 48). Quelle che si ottengono con uno scambio pari di posti si chiamano permutazioni *pari*, quelle che si ottengono invece con uno scambio dispari si chiamano permutazioni *dispari*.

Teor. XV. Le permutazioni pari nel simbolo ABCD di un tetraedro danno uno di suoi versi, e quelle dispari il verso opposto.

Essendo i triedri

$$A.\,BCD,\quad B.ADC,\quad C.DAB,\quad D.CBA$$

diretti nel medesimo verso (teor. XIV), i diedri di questi triedri che sono diretti nel medesimo verso e che danno perciò un verso del tetraedro, sono:

$$\begin{matrix} B\overline{CA}D, & C\overline{DA}B, & D\overline{BA}C \\ A\overline{DB}C, & D\overline{CB}A, & C\overline{AB}D \\ D\overline{AC}B, & A\overline{BC}D, & B\overline{DC}A \\ C\overline{BD}A, & B\overline{AD}C, & A\overline{CD}B \end{matrix} \qquad (1)$$

Quelli che danno il verso contrario del tetraedro sono:

$$\begin{matrix} D\overline{CA}B, & B\overline{DA}C, & C\overline{BA}D \\ C\overline{DB}A, & A\overline{CB}D, & D\overline{AB}C \\ B\overline{AC}D, & D\overline{BC}A, & A\overline{DC}B \\ A\overline{BD}C, & C\overline{AB}D, & B\overline{CD}A. \end{matrix} \qquad (2)$$

I simboli $BCAD$, $CDAB$ ecc. indicano lo stesso verso del simbolo $ABCD$ del tetraedro, mentre i simboli $DCAB$, $BDAC$ ecc. indicano il verso contrario.

I gruppi (1) e (2) lasciando la lineetta superiore, sono i gruppi di permutazioni pari e dispari delle quattro lettere.

Teor. XV. Se due triedri $A\,.\,BCD$ $A'\,.\,B'C'D'$ di due tetraedri $ABCD$ $A'B'C'D'$ sono dello stesso verso o di verso opposto, i due tetraedri sono del medesimo verso o di verso opposto.

Come pel teor. VIII, 61.

Def. IV. Invece di dire che due stelle di centri P e P' sono dello stesso verso o di verso opposto, diremo anche che lo spazio è dello stesso verso o di verso opposto intorno ai due punti P e P'; e siccome i versi delle stelle sono uguali od opposti, così i versi dello spazio intorno ai suoi punti sono uguali od opposti. Possiamo quindi dire che i versi della stella determinano *i versi dello spazio.*

Teor. XVII. I versi dello spazio sono determinati da quelli di un diedro di un suo triedro qualunque.

Difatti i versi dello spazio sono determinati da quelli delle sue stelle,

ma questi sono determinati a loro volta da quelli di una stella, e finalmente quelli di una stella da quelli di un solo diedro (teor. I).

Coroll. Un verso dello spazio determina uguali versi dei suoi diedri cogli spigoli limitati in un punto.

Dim. analoga a quella del coroll. teor. IX, 61.

Teor. XVII. Un verso di un diedro ($\alpha\beta$) *determina i due versi dello spazio, secondochè lo si considera da uno o dall' altro punto all' infinito dello spigolo* (teor. II).

Oss. III. In questo paragrafo si avrebbe potuto seguire un metodo analogo a quello usato nel piano (61).

Dimostrati i teor. I, III, IV, V, VIII pei triedri di una stella come pei triangoli del piano, si osserva che dato il verso della superficie di un triedro del tetraedro, ad es. $A.BCD$ è determinato pure il verso della superficie degli altri tre triedri, cioè $B.ADC$ ecc. Questi triedri si chiamano dello stesso verso, come si è fatto pel triangolo (oss. II e def. II, 61) (fig. 84). Osservando poi che col simbolo $B.ACD$ si ottengono appunto i versi opposti dei triedri suddetti, che sono uguali per la def. data, e poichè i versi dei triedri sono determinati dai loro diedri (teor. IV), si deduce la proprietà del teor. II, cioè che ogni diedro ha due versi opposti secondo che lo si considera in una o nell' altra direzione.

Si dà poi il teor. che due stelle qualunque sono di verso uguale o di verso opposto con una dimostrazione analoga a quella del teor. IV, 61, come anche il teor. IX con una dim. analoga a quella del teor. VII, 61 ricorrendo al tetraedro. Dato il teor. XVI (analogo al teor. VIII, 61) vanno dati il coroll. I del teor. VIII, e nello stesso modo, il coroll. II, i teor. X, XI, XII e coroll. e finalmente la def. IV. e i teor. XVII e XVIII [1]).

§ 13.

Versi delle figure identiche — Figure congruenti e simmetriche.

97. *Def.* Due punti aventi la medesima distanza da un piano e situati sulla stessa normale a questo piano si dicono *simmetrici rispetto al piano*, che si chiama *piano di simmetria.*

E due figure si dicono *simmetriche rispetto ad un piano* quando i punti dell' una sono simmetrici ai punti dell'altra.

Coroll. I. Le due parti dello spazio in cui esso viene diviso da un piano sono simmetriche rispetto a questo piano.

Difatti ogni punto A di una parte ha per simmetrico un punto dell'altra parte; per costruirlo basta condurre dal punto A la perpendicolare al piano, ed essendo S il piede della perpendicolare, prendere su di esso un segmento $(SA') \equiv (SA)$. Il punto A' sarà il punto richiesto.

Teor. I. Un segmento ha per figura simmetrica rispetto ad un piano un altro segmento uguale ad esso, e le rette dei due segmenti si incontrano in un punto del piano di simmetria.

Se sono date due coppie di punti simmetrici A,A', B,B' le due rette AA',

1) Questo metodo è consigliabile rimanendo nel solo campo finito.

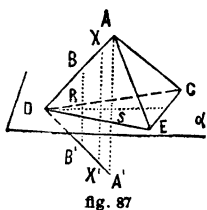



fig. 87

BB' sono perpendicoari al piano di simmetria α, e perciò sono fra loro parallele e situate in un piano normale al piano α (coroll. III, teor. II, 87) che ha per traccia sul piano α la retta RS congiungente i piedi S e R delle normali AA', BB'. Ma le rette AA', BB' sono perpendicolari alla retta RS (coroll. V, teor. I, 87), dunque i segmenti (AB), $(A'B')$ sono simmetrici nel piano normale rispetto alla retta RS (teor. I, 56). Ma due punti X e X' dei due segmenti simmetrici rispetto alla retta RS sono simmetrici anche rispetto al piano α, perchè ciascuna normale alla retta RS nel piano suddetto è pure normale al piano α (coroll. III, teor. II. 87). Dunque il teorema è dimostrato (fig. 87).

Teor. II. Ad ogni piano è simmetrico rispetto ad un piano dato un altro piano che interseca il primo in una retta del piano di simmetria.

Difatti alle rette di un piano sono simmetriche le rette di un'altra figura, che si incontrano a due a due nei punti simmetrici a quelli in cui si incontrano le rette corrispondenti del piano dato; quindi essa è un piano (teor. VIII, 85). Le rette simmetriche dei due piani si incontrano nei punti della retta d'intersezione dei due piani, che è situata perciò sul piano di simmetria.

Teor. III. Due figure simmetriche rispetto a un piano sono identiche.

Perchè le coppie di punti corrispondenti simmetrici hanno la medesima distanza (teor. II).

Teor. IV. Due triedri (e quindi anche due tetraedri) simmetrici rispetto ad un piano sono di verso opposto.

Sia infatti BCD un triangolo del piano di simmetria α, A e A' due punti simmetrici rispetto al piano α; i due triedri $A.BCD$, $A'.BCD$ sono identici e di verso opposto (coroll. teor. VIII, 96).

98. *Teor. I. La corrispondenza fra due figure identiche è pienamente determinate da due triedri corrispondenti.*

Siano abc, $a'b'c'$ i due triedri uguali di vertici A e A'. Prendendo su a,b,c tre punti B,C,D e sugli spigoli corrispondenti a',b',c', tre punti B',C',D' ad una distanza dal punto A' uguale a quella dei punti corrispondenti B,C,D dal punto A, si hanno due tetraedri $ABCD$, $A'B'C'D'$ uguali fra loro (teor. VII, 17, opp. VIII, 88).

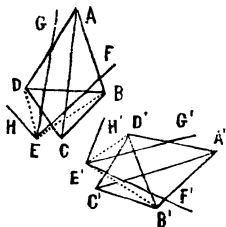



fig. 88

Sia E un punto delle prima figura, e congiungiamolo con A mediante una retta che incontra la faccia opposta BCD in un punto X. Siccome la figura nel piano BCD deve essere identica a quella nel piano corrispondente $B'C'D'$, ne viene che in questo piano vi sarà un punto X' corrispondente ad X (teor. I, 62). Prendendo sulla retta $A'X'$ una distanza $(A'E')$ uguale ad (AE) e in modo che $(E'X') \equiv (EX)$, il punto E' sarà il punto corrispondente al punto E (fig. 88).

Coroll. I. La corrispondenza d'identità di due figure identiche è determinata da due tetraedri corrispondenti.

Se $ABCD$, $A'B'C'D'$ sono i due tetraedri, i triedri $A.BCD$, $A'.B'C'D'$ sono identici, dunque ecc.

Coroll. II. Due figure identiche non possono avere quattro punti corrispondenti comuni non situati in un piano.

Teor. II. Nella corrispondenza tra i punti dello spazio determinata da due delle sue figure identiche il piano all'infinito corrisponde a sè stesso.

Difatti ad una distanza infinita della prima figura corrisponde una distanza infinita nella seconda (teor. I, 34).

Teor. III. I triedri corrispondenti di due figure identiche sono dello stesso verso o di verso contrario se due qualunque di essi sono del medesimo verso o di verso opposto.

Siano $A.BCD$, $A'.B'C'D'$ due triedri corrispondenti delle due figure che supponiamo dapprima diretti nel medesimo verso. E siano dati inoltre due altri triedri corrispondenti qualunque $E.FGH$, $E'.F'G'H'$ dî vertici E ed E'. I triedri $E.BCD$ $E'.B'C'D'$ sono ambidue dello stesso verso o di verso contrario rispetto ai due triedri dati, perchè E e E' sono ambidue dalla stessa parte o da parti opposte dei punti A e A' rispetto ai piani BCD, $B'C'D'$. Dunque i due triedri $E.BCD$, $E'.B'C'D'$ sono del medesimo verso, perchè lo sono i due triedri dati (teor. IX, 96). Siano FGH, $F'G'H'$ i triangoli d'intersezione dei due triedri $E.FGH$, $E'.F'G'H'$ rispettivamente coi piani BCD, $B'C'D'$. I triangoli FGH, $F'G'H'$ sono dello stesso verso o di verso opposto dei due triangoli BCD, $B'C'D'$ (teor. V, 62, teor. VIII, VII, 61). Nel primo caso i triedri $E.FGH$, $A.BCD$ sono dello stesso verso o di verso opposto secondochè E ed A sono o no dalla stessa parte del piano BCD (teor. XII, 96). Lo stesso avviene dei triedri $E'.F'G'H'$ e $A'.B'C'D'$ per l'identità delle due figure, dunque i due triedri $E.FGH$, $E'.F'G'H'$ essendo dello stesso verso o di verso opposto dei triedri $A.BCD$, $A'B'C'D'$, che sono ugualmente diretti, sono dello stesso verso. Analogamente nel secondo caso.

Essendo dimostrata la prima parte del teorema, rimane dimostrata anche la seconda.

Def. I. Due figure identiche i cui triedri corrispondenti uguali hanno il medesimo verso si dicono *dirette nello stesso verso* oppure anche *congruenti*, nel caso contrario si dicono di *verso opposto* o *simmetriche*.

Oss. Badiamo però che il verso di una figura, formata da più di quattro punti A, B, C, D ..., dato mediante un suo simbolo $ABCD$.. . non può dare in generale uno dei versi dello spazio, perchè essa può contenere anche dei triedri di verso opposto da quelli di un'altra figura indicata con lo stesso simbolo.

Coroll. I. Due figure congruenti o simmetriche ad una terza sono congruenti fra loro.

Coroll. II. Due figure l' una congruente e l'altra simmetrica ad un terza sono simmetriche fra loro.

Questi coroll. derivano immediatamente dal teor. precedente e dal teor. IX del n. 96.

Teor. IV. Se due figure congruenti dello spazio hanno tre punti corrispondenti comuni non situati in linea retta, coincidono; e se hanno due punti comuni, hanno in comune tutti i punti della retta dei due punti.

I tre punti comuni considerati come appartenenti alla prima figura indichiamoli con A, B, C, e con A', B', C' come appartenenti alla seconda figura. Sia inoltre D un altro punto della prima figura, che sarà situato in una delle due

parti dello spazio rispetto al piano ABC. Dato il punto D' corrispondente a D, il tetraedro $A'B'C'D'$ essendo congruente al tetraedro $ABCD$, D e D' dovranno essere situati dalla stessa parte del piano ABC (coroll. I, teor. VIII, XVI, 96), ciò che è impossibile (teor. V, 95), dunque i punti D e D' devono coincidere. Per l'ultima parte osserviamo che, se $A(A')$, $B(B')$ sono i punti corrispondenti comuni, alla retta AB dell'una corrisponde la retta $A'B'$ dell'altra, ossia AB corrisponde a sè medesima nelle due figure. Di più scelto un punto X di AB, il punto corrispondente deve avere la stessa distanza dai punti A' e B' che X da A e B e, siccome A e A', B e B' coincidono, così X e X' coincidono (coroll. teor. V, 15).

Teor. V. *Se due figure simmetriche hanno tre punti corrispondenti comuni, hanno comuni tutti i punti del piano di essi, e sono simmetriche rispetto a questo piano.*

Difatti siano $ABCD...M$, $A'B'C'D'...M'$ le due figure; le parti di esse situate nel piano ABC coincidono (coroll. II, teor. I, 62). La simmetrica alla figura $ABCD......M$ rispetto al piano ABC, essendo dello stesso verso della figura $A'B'C'D'...M'$, coincide con questa (teor. IV), dunque il teorema è dimostrato.

Teor. VI. Le figure rettilinee determinate da due gruppi di m punti sono identiche, se i segmenti rettilinei di m-4 di essi dei rimanenti, è di questi quattro sono ordinatamente uguali.

Supponiamo che i due gruppi di quattro punti siano $ABCD$, $A'B'C'D'$. Se è dato un punto X qualunque nella prima figura, nella corrispondenza d'identità determinata dalle due figure $ABCD$, $A'B'C'D'$ gli corrisponde un punto X' (cor. I, teor. I). Sia invece X'_1 il punto della seconda figura data che ha le stesse distanze di $A'B'C'D'$ di X da $ABCD$. I punti X' e X'_1 devono coincidere, perchè non vi possono essere due punti distinti aventi le stesse distanze da quattro punti dati. Difatti dato un punto Z, ve n'è un altro solo colle stesse distanze dai tre punti ABC e simmetrico al piano ABC (def. 97, teor. IV, 88 e teor. V, 95). Dato un quarto punto D non situato nel piano ABC, se Z e Z' avessero anche la stessa distanza dal punto D, la retta ZZ' dovrebbe essere perpendicolare al piano BCD (def. 97 e coroll. VIII, teor. II, 87), e quindi i due piani ABC, BCD essendo perperdicolari alla retta ZZ' sarebbero paralleli (coroll. IV, teor. I, 87), il che è impossibile (def. II, 85 e coroll. I, teor. V, 46). Il teorema è dunque dimostrato.

§ 14.

Cono e Cilindro.

99. *Def. I.* Il sistema ad una dimensione delle rette che congiungono un punto P coi punti di una circonferenza C_∞ all'infinito di centro A_∞ (75) chiamasi *superficie conica circolare* o *superficie conica;* e le rette, *generatrici.*

I versi della superficie conica sono dati da quelli della circonferenza C_∞.

Le rette che congiungono i punti del cerchio racchiuso dalla circonferenza C_∞ determinano la parte della stella di centro P racchiusa dalla superficie conica, che si chiama *cono circolare* o *cono.* Il punto P è il vertice, la retta PA_∞ *l'asse,* la circofereza C_∞ la *direttrice* della superficie conica e del cono,

Un piano passante per l'asse dicesi piano *diametrale* del cono.

Oss. I. Spesso si adopera la parola cono per indicare la superficie conica, quando non vi è luogo ad equivoci.

Teor. I. La superficie conica ha all'infinito due circonferenze opposte dello stesso raggio.

Se A è il centro di C_∞, il punto opposto A' è centro di una circonferenza C'_∞ dello stesso raggio opposta alla prima, vale a dire i cui punti sono opposti a quelli della circonferenza C_∞ (oss. V, 75), e perciò sono situati nelle rette passanti per P (coroll. teor. II, 30).

Coroll. I. Il cono si compone di due parti opposte al vertice.

Ciascuna di esse ha all'infinito una delle due circonferenze C_∞ e C'_∞.

Def. II. Queste due parti del cono si chiamano *falde* del cono.

Oss. II. Rispetto all'unità Euclidea delle distanze (conv. 28 e oss. 31) queste due circonferenze coincidono (coroll. I, teor. III, 19 e coroll. teor. I e def. I, 84).

Teor. II. Le generatrici del cono formano lo stesso angolo coll'asse di esso.

E inversamente:

Le rette che formano con una retta data il medesimo angolo e incontrano questa retta in un punto P, costituiscono un cono.

Difatti l'angolo di una generatrice con l'asse è misurato dal raggio della circonferenza C_∞ (def. I, 39).

Inversamente, i punti all'infinito delle rette sono in due circonferenze opposte coi centri nei punti all'infinito dell'asse.

Def. III. La parte di superficie del cono determinata da due generatrici, e che corrisponde ad un arco della circonferenza C_∞, si chiama *settore conico.*

Teor. III. Le proprietà della circonferenza all'infinito si estendono senz'altro alla superficie conica, sostituendo ai punti e agli archi della circonferenza le generatrici e i settori della superficie conica.

Si vede infatti che il fascio di raggi avente per centro il centro della circonferenza C_∞ si comporta colla circonferenza nello stesso modo che il fascio di semipiani avente per asse l'asse del cono si comporta colla superficie del cono (vedi teor. I, 57 e oss. IV, 75).

Teor. IV. Un piano passante per i vertici del cono non può avere con esso più di due generatrici comuni (teor. I, 59 e oss. IV, 75).

Def. IV. Se il piano incontra il cono in due generatrici, esso si chiama piano *secante*, e l'angolo delle due generatrici *angolo* di *sezione.*

Oss. III. L'angolo di sezione corrisponde alla lunghezza della corda della circonferenza C_∞ (def. VIII, 57, def. I, 5).

Def. V. Ad una tangente al cerchio C_∞ corrisponde nel cono un piano che ha una sola generatrice comune col cono e che si chiama *piano tangente,* mentre la generatrice si chiama *generatrice di contatto.*

Coroll. I. Ogni piano passante pel vertice e per un punto interno al cono incontra la superficie di esso in due generatrici (coroll. I, teor. I, 59; oss. IV, 75 e def. I).

Coroll. II. Il piano tangente lungo una generatrice è perpendicolare al

piano che passa per la generatrice e per l'asse (coroll. II, teor. I, 59; oss. IV, 75, teor. V, 69; coroll. II, teor. VII, 73 e def. III, 87).

Coroll. III. Ogni piano passante per una generatrice del cono lo incontra in un' altra generatrice (coroll. III, teor. I, 59; oss. IV, 75 e def. I).

Coroll. IV. Tutti i piani che formano lo stesso angolo con una retta e incontrano questa retta in un medesimo punto P sono tangenti ad un cono. Le generatrici di contatto sono le rette d'intersezione dei piani suddetti coi piani normali condotti ad essi dalla retta data (cor. IV, teor. I 59 ecc.).

Coroll. V. Le falde del cono giacciono da parti opposte rispetto ad un suo piano tangente.

Una tangente della circonferenza C_∞ è pure tangente alla circonferenza C'_∞, e la lascia da parte opposta (oss. V, 75 e def. II).

Coroll. VI. Una retta non può avere più di due punti comuni col cono.

Difatti il piano che congiunge la retta col vertice non ha più di due generatrici comuni.

Teor. V. Il piano perpendicolare condotto per l' asse ad un piano secante passa per la bissettrice dell'angolo di sezione, e inversamente (teor. III, e IV, 59 oss. IV, 75, teor. V, 69, teor. II, 87 e def. I).

Coroll. Un piano diametrale divide il cono in due parti simmetriche (coroll. teor. III, 59 ecc).

Teor. VI Tre raggi uscenti da un punto non situati in un piano determinano un cono, che è determinato da tre qualunque dei suoi raggi (teor. V, 59 e oss. IV, 75).

Teor. VII. Il piano che unisce l'asse colla retta d' intersezione di due piani tangenti divide per metà l'angolo dei piani che passano per l' asse e per le generatrici di contatto (teor. X, 59, oss. IV, 75).

Oss. IV. Si potrebbero enunciare analogamente i teoremi relativi alle figure interne ed esterne ad un cono, ricavandoli da quelli dello cerchio del piano completo, dedotti questi a loro volta da quelli del cerchio nel piano Euclideo.

Così per quelli sulle intersezioni di due coni aventi lo stesso vertice, che si ricavano da quelli sulle intersezioni di due circonferenze.

Teor. VIII. Un piano normale all' asse del cono lo taglia in un cerchio.

Difatti sia S il punto d'intersezione del piano normale π coll'asse, e siano B e C i punti d'intersezione con due generatrici qualunque b e c. I triangoli ABS, PCS (P è il vertice del cono) sono rettangoli in S, hanno il cateto (PS) comune ed è inoltre $\widehat{BPS} \equiv \widehat{CPS}$ (teor. II), dunque anche il terzo angolo è uguale, e perciò $(BS) \equiv (SC)$, $(BP) \equiv (PC)$ (teor. X, 55) e quindi i punti d'intersezione del piano π colle generatrici del cono sono equidistanti dal punto S (fig. 89).

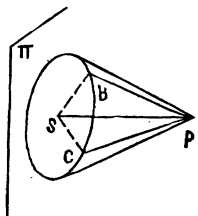



fig. 89

Teor. IX. Il sistema di rette generato da una circonferenza e da un punto P sulla perpendicolare inalzata dal centro nel piano di essa è una superficie conica.

Difatti i triangoli PBS, PSC sono rettangoli in S, hanno il cateto (PS) comune e gli altri cateti (BS), (CS) uguali per dato, dunque sono uguali gli angoli BPS, CPS, e perciò le generatrici determinano all'infinito due circonferenze

opposte C_∞, C'_∞ che hanno per centri i punti opposti all'infinito dell'asse (def. I, 39).

Teor. X. Da una retta passante pel vertice ed esterna al cono passano due piani tangenti al cono (teor. IV, 60 e teor. VIII).

100. *Def. I.* Se C è un circolo, e a_1 la normale condotta dal suo centro al suo piano, ogni punto di a_1 determina con C un cono circolare (teor. IX). Se il punto P cade all'infinito si ha un caso particolare della superficie conica, che si chiama *superficie cilindrica.* La parte della stella di rette parallele racchiusa dalla superficie cilindrica dicesi *cilindro.*

Oss. Valgono per il cilindro i teoremi dati per il cono, tenendo però presente che il cilindro é un cono col centro all'infinito, e adoperando per cerchio direttore un cerchio in un piano perpendicolare all'asse.

Il cerchio all'infinito si riduce in tal caso ad un punto, cioè al punto opposto del centro P_∞. Il cilindro può essere perciò considerato anche come l'insieme dei cerchi di raggio uguale, i cui piani sono perpendicolari all'asse e i cui centri sono situati sull'asse.

§ 15.

Superficie sferica e sfera.

101. *Def. I.* Tutti i punti equidistanti da un punto P costituiscono una figura che si chiama *superficie sferica.* I segmenti determinati dal punto P coi punti della superficie sferica si chiamano *raggi,* il punto P *centro* della superficie.

Oss. I. Come la stella è a due dimensioni rispetto ai suoi raggi (def. III, 82), così la superficie sferica si può chiamare a due dimensioni rispetto ai suoi punti.

Coroll. Il piano limite all'infinito può essere considerato come una superficie sferica di raggio infinito e col centro in un punto del campo finito (teor. I e def. I. 84).

Def. II. Due punti della superficie sferica situati in raggi opposti della stella col centro nel centro della superficie si chiamano *opposti,* e *diametro* il segmento di essi.

Def. III. Tutti i diametri o tutti i raggi della superficie sferica costituiscono una parte dello spazio (def. I, 2), che si chiama *sfera.*

La sfera tranne la sua superficie si chiama *parte interna* della sfera. I prolungamenti dei raggi, eccettuati gli estremi danno la *parte esterna* dello spazio rispetto alla sfera.

Oss. II. Spesso si adopera la parola sfera per indicare la superficie sferica, sebbene siano enti diversi, quando ciò non genera equivoci. Così pure per diametro si intende la retta che congiunge due punti opposti della sfera.

Def. IV. I piani passanti pel centro della sfera si chiamano *piani diametrali.*

Coroll. Ogni piano diametrale taglia la sfera in un cerchio.

Infatti tutti i punti distanti dal centro del raggio sono in un cerchio (def. I).

Teor. I. Ogni retta non può incontrare la sfera in più di due punti.

Infatti per la retta e pel centro si conduca un piano, esso taglia la superficie in una circonferenza, la quale ha al più due punti comuni con la retta data (teor. I, 59), i quali punti appartengono anche alla sfera (oss. II, int. *a*, 13),

Def. V. Un segmento che ha i suoi estremi sulla sfera dicesi *corda*.

Teor. II. Un piano qualunque taglia la sfera in un cerchio, o in un punto, o in nessun punto, secondochè la sua distanza dal centro è minore, uguale o maggiore del raggio.

Sia P il centro della sfera, π il piano dato, r il raggio, S il piede della normale condotta da P al piano π.

Il segmento (PS) dà la distanza del punto al piano ed è il minore segmento fra i segmenti determinati dal punto P coi punti del piano (teor. I, 88) Se dunque nel piano π è situato un punto A della superficie sferica differente da S si dovrà avere

$$(PA) > (PS).$$

Ma in tal caso tutti i punti distanti da P del segmento (PA) nel piano π sono situati in una circonferenza di centro S e di raggio SA (cor. III, teor. II, 88).

Se invece è

$$(PA) \equiv (PS)$$

il cerchio d'intersezione col piano π si riduce al punto S. E finalmente se è

$$(PA) < (PS)$$

il piano π non ha nessun punto comune con la sfera (fig. 89).

Teor. III. Un piano diametrale incontra la sfera in un cerchio di raggio massimo.

Difatti nel caso precedente si ha sempre

$$(PA) > (SA)$$

essendo l'ipotenusa del triangolo rettangolo maggiore dei cateti (cor. teor. II, 54).

Def. VI. Un cerchio della sfera situato in un piano diametrale si chiama perciò *cerchio massimo* della sfera.

Def. VII. Una tangente ad una circonferenza massima si chiama anche *tangente* alla sfera nel medesimo punto, che si chiama *punto di contatto* della tangente colla sfera.

Teor. IV. Le tangenti in un punto della sfera sono situate in un piano perpendicolare al raggio che passa pel punto dato.

Difatti nel secondo caso del teor. II, ogni piano diametrale passante per PS incontra il piano π in una retta s, che contiene il punto S, la quale essendo perpendicolare a PS è tangente alla circonferenza massima situata nel piano diametrale (coroll. II, teor. I, 59). Ora, se si considerano due tangenti in un punto S della sfera, il piano di queste ha per distanza dal centro il raggio della sfera, perchè PS è perpendicolare al piano, dunque ecc. (coroll. VI, VII, teor. I, 87).

Def. VIII. Il piano che contiene le tangenti alla sfera in un punto, si chiama *piano tangente* alla sfera nel punto dato, che è il *punto di contatto.*

Teor. V. La sfera giace tutta da una parte di un suo piano tangente.

Difatti all'infuori del punto di contatto ogni punto del piano tangente a

è a distanza maggiore del raggio, e a maggior ragione ogni punto situato dalla parte opposta di R rispetto ad α (coroll. II, teor. IV, 86).

Teor. VI. Il piano perpendicolare nel punto di mezzo di una corda alla corda stessa passa pel centro della sfera, e inversamente.

Sia (AB) la corda, M il suo punto di mezzo. Il triangolo PAB è isoscele, e quindi PM è perpendicolare alla corda (AB), e per essa passa anche il piano normale condotto da M alla corda (AB) (coroll. V, VI, teor. I, 87).

Coroll. Un piano diametrale divide la sfera in due parti simmetriche rispetto ad esso.

Difatti scelto un punto A, il punto simmetrico A' rispetto al piano diametrale π è situato sulla sfera, perchè la corda perpendicolare condotta da A al piano π viene divisa da π per metà (def. 97).

Teor. VII. Quattro punti non situati in un piano determinano una sfera, che è determinata da quattro qualunque dei suoi punti non situati in un piano.

Siano $ABCD$ i quattro punti dati, i piani perpendicolari ai segmenti (AB), (BC), (CD) passanti pei punti di mezzo di essi si incontrano in un punto M ugualmente distante dai quattro punti dati (coroll. II, teor. IV, 88), e come si vede facilmente non possono incontrarsi nè in una retta, nè in un punto all'infinito.

La sfera che ha per centro il punto dato e per raggio la distanza di esso dai punti $ABCD$ è l'unica sfera che passa pei quattro punti dati, perchè se vene fosse un'altra, essa avrebbe pel teor. VI lo stesso centro e lo stesso raggio. Da ciò risulta che dati altri quattro punti $A'B'C'D'$ sulla sfera non situati in un piano, essi determinano lo stesso centro e quindi la stessa sfera.

Teor. VIII. Da un punto della parte esterna della sfera passano infinite tangenti alla sfera che sono uguali e situate in un cono, il cui asse è il diametro passante pel punto dato.

Sia C il centro della sfera, O il punto dato, e quindi OC il diametro passante pel punto dato. Per questo diametro si consideri un piano qualunque ohe tagli la superficie in un circolo massimo, al quale si possono condurre due tangenti da O (teor. IV, 60) simmetriche rispetto al diametro CO (coroll. teor. III, 59). Se conduciamo per CO un altro piano, otteniamo su di esso col medesimo centro una circonferenza identica alla prima (coroll. I, teor. I, 57), e perciò le due tangenti a questa circonferenza dal punto O fino ai loro punti di contatto sono uguali alle prime due, e formano il medesimo angolo col diametro CO. Siccome in questo modo si ottengono tutte le tangenti da O alla sfera, il teorema è dimostrato (teor. II, 99).

Coroll. I. I punti di contatto delle tangenti condotte da un punto alla sfera sono situati in una circonferenza, il cui piano è normale all' asse del cono tangente col vertice nel punto dato.

Difatti il piano dei punti di contatto di tre tangenti è normale al diametro CO, asse del cono (cor. III, teor. II, 88), e contiene tutti i punti di contatto delle tangenti suddette (coroll VII, teor. I, 88).

Def. IX. Questa circonferenza si chiama *curva di contatto* del cono con la sfera.

Coroll. II. I piani tangenti di un cono tangente alla sfera sono tangenti alla sfera stessa nei punti della curva di contatto (teor. IV).

Coroll. III. Da una retta si possono condurre due piani tangenti alla sfera che formano il medesimo angolo col piano diametrale passante per la retta data (teor. X, 99).

Oss. III. Le proprietà della superficie sferica sono dunque come si vede le stesse di quelle del piano completo, le quali noi abbiamo trattate senza uscire dal piano e senza far uso della sfera coll'aiuto delle nostre ipotesi astratte (cap. II, libro II). Due punti sulla sfera determinano un circolo massimo, il cui piano passa pel centro, e non determinano più questo circolo se sono opposti.

La relazione fra le facce e i diedri di un triedro si cangiano senz'altro in relazioni fra i lati e gli angoli dei triangoli tracciati sulla sfera e formati con archi di circoli massimi.

Le figure che nello spazio Euclideo a tre dimensioni rappresentano il piano completo con tutte le sue proprietà sono dunque la sfera e la stella di raggi (def. II, 82). Il piano all'infinito, considerato rispetto all'unità Euclidea, o la stella di rette, rappresenta la seconda forma Riemanniana (oss. II, 30).

§ 16.

Intersezioni di due e tre sfere.

102. *Def. I.* Se due sfere hanno uno stesso piano tangente in un punto comune A, e sono situate ambedue dalla stessa parte del piano, si dice che si *toccano internamente;* se sono situate da parti opposte si dice invece che si *toccano esternamente.*

Oss. I. Nel primo caso una delle due sfere, cioè quella che ha il raggio minore é contenuta nell' altra.

Teor. I. Se due sfere hanno un punto comune non situato sulla retta dei centri (asse centrale) le due sfere hanno in comune una circonferenza col centro nell' asse centrale e il cui piano è perpendicolare all' asse stesso.

Siano C e C' i centri delle due sfere, r ed r' i loro raggi. Condotto pei centri un piano qualunque, esso divide le due sfere in parti simmetriche rispetto ad esso (coroll. teor. VI, 101); e il punto comune dovendo essere situato da una parte di questo piano se non è sul piano, ha un punto simmetrico rispetto ad esso, che sarà pure situato in ambedue le sfere. Scelti quindi tre punti A,B,C comuni alle tre sfere, il loro piano interseca le due sfere in due circonferenze che hanno tre punti comuni, e perciò coincidono (teor. V, 59). Il piano di questa circonferenza è normale alla retta CC', perchè i punti C e C' sono equidistanti dai punti di questa circonferenza (teor. III, 88). D'altronde le due sfere non possono avere altri punti insieme fuori del piano ABC, perchè altrimenti coinciderebbero (teor. VII, 101).

Coroll. I. Ogni piano diametrale incontra la circonferenza comune alle due sfere in due punti simmetrici rispetto all' asse centrale.

Difatti il piano diametrale incontra il piano della circonferenza in una retta che è normale all'asse centrale, perchè il secondo piano è normale a quest'asse (coroll. V, teor. I, 88), la quale retta è un diametro della circonferenza.

Teor. II. Date due sfere di raggi r ed r' (essendo $r' \geqq r$ e d la distanza dei centri).

1.° *se si toccano esternamente, si ha* $d = r + r'$

2.° *se si toccano internamente,* » $d = r' - r$

3.° *se si tagliano* » $r + r' > d > r' - r$

4.° *se non hanno alcun punto comune, si ha* $r' - r > d$ *opp.* $d > r' + r$.

E inversamente.

Se la distanza dei centri soddisfa alle relazioni precedenti 1, 2, 3, 4, *le sfere si toccano esternamente, internamente, si tagliano o non si tagliano.*

Difatti se conduciamo un piano diametrale comune, esso le taglia in due circonferenze massime, le quali sussistendo le relazioni del teorema si toccheranno internamente o esternamente in un punto dell'asse centrale o si taglieranno in due punti simmetrici rispetto a quest'asse o non si incontreranno (teor. III, 60 e teor. I).

Siccome il teorema vale per queste due circonferenze, qualunque sia il piano diametrale, esso vale anche per le due sfere.

Teor. III. Tre sfere che non si tagliano in una stessa circonferenza e non si toccano in un medesimo punto si incontrano in due punti simmetrici rispetto al piano dei tre centri (piano centrale), *o in due punti coincidenti, o in nessun punto.*

Nel secondo caso hanno una tangente comune normale al piano centrale nel punto comune.

Siano C, C', C'' i tre centri; il piano centrale divide le tre sfere, ciascuna in due parti simmetriche (coroll. teor. VI, 101), e quindi se esse hanno un punto comune A avranno in comune anche il punto simmetrico A' rispetto al piano centrale.

Se avessero un altro punto B in comune, il piano $AA'B$ incontrerebbe le tre sfere in circonferenze aventi tre punti comuni e perciò coincidenti in una sola circonferenza (teor. V, 59).

Se il punto A è situato nel piano centrale lo è pure il punto A'. Conducendo per CA il piano normale al piano centrale, la tangente in A al cerchio massimo della sfera C contenuta in questo piano è perpendicolare al raggio CA e quindi anche al piano centrale. La stessa cosa vale per le altre sfere, e quindi la normale condotta in A al piano centrale è tangente in tal caso alle tre sfere.

§ 17.

Sistemi continui di figure invariabili.

103. *Sistema circolare intorno ad una retta.*

Def. I. Dai sistemi continui di figure invariabili nel piano all'infinito (def. I 65 e oss. III, 77) si ottengono intorno ad un punto P dello spazio dei sistemi continui di figure invariabili che chiameremo *sistemi sferici,* di cui P è il *centro* (def. III, 36, oss. III, 101).

Def. II. Da un sistema circolare di angoli intorno ad un punto R_∞ otteniamo intorno alla retta PR_∞ un sistema di diedri invariabili, che chiameremo *sistema circolare* di diedri; la retta PR_∞ è l'*asse* di cui è dato il verso, e i diedri sono i *diedri all' asse* del sistema (teor. III, IV, 91).

Teor. I. L'asse del sistema corrisponde a sè stesso (teor. I. 63 e oss. III, 77).

Teor. II. Il sistema circolare di diedri può essere generato dall'asse e da un sistema continuo qualunque di segmenti invariabili sulla polare del punto all'infinito dell'asse.

Difatti il sistema circolare intorno ad un punto del piano all'infinito viene generato dal punto e dalla sua polare (def. I, 63 e oss. III, 77).

Teor. III. Un sistema circolare intorno ad un asse in un dato verso è pure un sistema circolare rispetto allo stesso asse nel verso opposto.

Difatti intorno al punto opposto R'_∞ di R_∞ abbiamo all'infinito un sistema circolare di angoli identici ed opposti a quelli di centro R_∞ (oss. I e III, 77).

Teor. IV. I diedri all' asse di un sistema circolare sono congruenti.

Perchè tali sono gli angoli del sistema circolare all' infinito (teor. II, 63, oss. III, 77), e i versi di esso danno i versi dei diedri del sistema circolare intorno all'asse.

Coroll. I. Due diedri simmetrici intorno al medesimo asse non possono appartenere ad un sistema circolare (coroll. I, teor. II, 63 e oss. III, 77).

Coroll. II. Le facce corrispondenti di due diedri all'asse del sistema circolare fanno lo stesso angolo (coroll. II, teor. I, 63 e oss. III, 77).

Teor. V. Un piano perpendicolare all'asse taglia il sistema circolare in un sistema circolare di angoli intorno al punto d' intersezione del piano coll'asse.

Difatti gli angoli sezioni di un piano perpendicolare all' asse misurano i diedri del sistema (teor. VIII, 91).

Teor. VI. Due diedri di un sistema circolare non possono avere un punto corrispondente comune.

Se avessero un punto corrispondente comune, avrebbero anche in comune il semipiano che unisce il punto coll'asse, e ciò non può essere (teor. III, 63 e oss. III, 77).

Teor. VII. Data una figura qualunque si può costruire un sistema continuo di figure invariabili i cui punti corrispondenti siano in una circonferenza col centro in una retta data e col suo piano perpendicolare a questa retta.

Scelto un segmento (AB), sia $(\alpha\beta)$ il diedro determinato da questo segmento coll'asse a; da A e B conduciamo i segmenti (AS), (BS_1), normali ad a, e immaginiamo il sistema circolare di asse a e coi diedri uguali al diedro $(\alpha\beta)$.

Sia quindi $(\alpha'\beta')$ un altro diedro del sistema, e in esso i due punti A' e B' distanti da S e S_1 quanto A e B sulle normali alla retta a. I due triedri $S.S_1AB$, $S.S_1A'B'$ sono identici perchè hanno due facce e il diedro compreso uguali, e perciò $(AB) \equiv (A'B')$.

La serie di punti (A) è situata sulla circonferenza di centro S nel piano normale condotto da S all' asse (coroll. VI, teor. I, 87).

In questo modo data una figura qualunque $ABCD...M...$ si costruisce un sistema continuo di figure invariabili, perchè la distanza delle coppie di punti

corrispondenti sono uguali, e i punti corrispondenti nella corrispondenza di identità delle figure sono tali anche nel sistema (def. III, 36).

Def. III. Un tale sistema di figure lo chiameremo *sistema circolare di figure invariabili* o semplicemente *sistema circolare,* del quale è un caso particolare il sistema circolare di diedri suddescritto.

Teor. VIII. Ogni punto dell' asse di un sistema circolare qualunque corrisponde a sè stesso.

Difatti nella dimostrazione precedente (AS) ha per corrispondente il segmento $(A'S)$, e quindi S corrisponde a sè stesso.

Teor. IX. Le figure di un sistema circolare sono congruenti.

Se l'asse del sistema si considera come appartenente ad una figura, esso corrisponde a sè stesso in tutte le figure. Se (AB), (A_1B_1) sono due segmenti corrispondenti di due figure del sistema si congiungano con un punto P dell'asse. I triedri $P.P_\infty AB$, $P.P_\infty A'B'$ sono congruenti, perchè lo sono i due diedri $P_\infty.\widehat{APB}$, $P_\infty.\widehat{A'PB'}$ (teor. IV). E quindi essendo congruenti due triedri corrispondenti delle due figure, alle quali si intende unito anche l'asse del sistema, esse sono congruenti (teor. III, 98), e quindi lo sono anche senza l'asse del sistema (fig. 90).

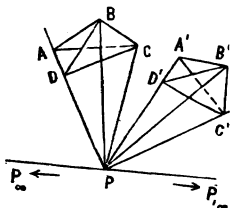



fig. 90

Teor. X. Le rette e i piani corrispondenti di un sistema circolare formano lo stesso angolo coll' asse.

Difatti i loro punti all'infinito sono in una circonferenza col centro nel punto all'infinito dell'asse, e le rette corrispondenti all'infinito dei piani corrispondenti toccano una circonferenza col medesimo centro (def. II, 63, oss. III, 77 e def. II); oppure perchè formano coll'asse figure congruenti.

Coroll. I. Se una retta incontra l'asse, le sue rette corrispondenti nel sistema sono le generatrici di un cono circolare coll'asse nell' asse del sistema e col vertice nel punto situato sull'asse (teor. II, 99).

Coroll. II. I piani corrispondenti ad un piano sono tangenti ad un cono circolare coll'asse nell'asse del sistema e col centro nel punto d' intersezione del piano dato coll'asse (coroll. IV, teor. IV, 99).

Teor. XI. Le rette corrispondenti hanno la stessa distanza dall'asse.

Sia a l'asse e g una retta qualunque, (AB) il segmento normale ad ambedue (teor. VI, 88). Le rette corrispondenti di AB incontrano l'asse nello stesso punto A (teor. VIII), e formano rispettivamente con le rette corrispondenti a g e con a figure congruenti (teor. X e teor. VI, 87).

Teor. XII. Le tangenti della circonferenza descritta da punti corrispondenti del sistema circolare sono rette corrispondenti.

Le linee di punti corrispondenti $AA_1A...$, $BB_1B...$ in un sistema circolare sono circonferenze col centro sull'asse e i cui piani sono normali all'asse (teor. III). Ad ogni corda (AA_m) di una circonferenza corrisponde una corda $(A'A'_m)$ uguale della stessa circonferenza, perchè gli angoli $a.(AA_m)$, $a.(A'A'_m)$, sono uguali (teor. IV), e siccome la tangente nel punto A è limite della secante (teor. XII,

59), ne consegue che le tangenti nei punti corrispondenti A e A' della circonferenza sono rette corrispondenti.

Teor. XIII. Due figure simmetriche rispetto ad una retta in un piano appartengono ad un sistema circolare intorno alla retta data come asse.

Siano dati per es. due triangoli simmetrici ABC, ABC', rispetto alla retta AB. Il sistema di semipiani intorno alla retta AB forma pure un sistema circolare, e i punti C e C' appartengono ad una medesima circonferenza del sistema che ha per raggio il segmento normale del punto C o C' alla retta AB, e per centro il piede di esso. I punti della circonferenza uniti coi punti A e B, che corrispondono a sè stessi, danno un sistema circolare di triangoli intorno alla retta AB al quale appartengono i due triangoli dati.

104. *Sistema parallelo.*

Def. I. Se la retta a è all'infinito, tutti i piani passanti per essa sono paralleli, e scelta una retta s perpendicolare alla direzione di essi, i segmenti di s servono a misurare le parti del fascio determinate dai piani di esso (teorema VI, 88). Considerando sulla perpendicolare un sistema continuo di segmenti invariabili si ha un sistema continuo di parti del fascio suddetto, che si chiama *sistema parallelo*, e la direzione dei piani del sistema, *direzione* del sistema.

Le parti di un fascio di piani paralleli le chiameremo *zone.*

Teor. I. L'asse del sistema parallelo corrisponde a sè stesso.

Difatti siano $(\alpha\beta)$, $(\alpha_1\beta_1)$ due zone corrispondenti, la retta $(\alpha\beta)$ corrisponde alla retta $(\alpha_1\beta_1)$, che è l'asse del sistema (fig. 91).

Teor. II. Le zone del sistema parallelo sono congruenti.

Perchè tali sono i segmenti che le misurano sulla perpendicolare alla direzione del sistema (teor. I, 36 e def. I),

Teor. III. Due zone del sistema parallelo non possono avere due punti corrispondenti comuni fuori dell'asse del sistema.

Difatti esse avrebbero anche comuni due piani corrispondenti coincidenti, cioè il piano congiungente il punto dato coll'asse del fascio (teor. II, 36 e def. I).

Teor. IV. Data una figura essa appartiene ad un sistema continuo di figure invariabili tali che i punti corrispondenti sono situati in perpendicolari ad un piano dato, e le rette e i piani corrispondenti sono paralleli fra loro.

Si consideri un segmento (AB) e siano α e β i piani paralleli passanti per A e B al piano dato, e immaginiamo il sistema parallelo delle zone uguali ad $(\alpha\beta)$. Sia $(\alpha_1\beta_1)$ un'altra zona del sistema e siano A_1, B_1 i punti d'intersezione delle normali condotte da A e B coi piani α_1 e β_1. Il quadrangolo ABA_1B_1 è un parallelogrammo (teor. IV, 85), e quindi (AB) e (A_1B_1) sono uguali e diretti nello stesso verso. Se è data la figura $ABCD...M...$ si può dunque costruire in questo modo un sistema continuo di figure identiche alla prima, le cui parti corrispondenti nel sistema sono pure identiche. I piani corrispondenti sono paralleli perchè lo sono le loro rette corrispondenti (fig. 91).

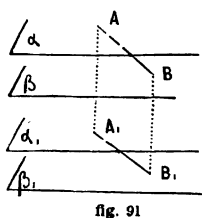



fig. 91

Def. II. Un sistema che soddisfa al teor. IV lo chiameremo *sistema pa-*

rallelo di figure invariabili o semplicemente *sistema parallelo*, del quale il primo (def. I) è un caso particolare.

Teor. V. Le figure di un sistema parallelo sono congruenti.

Gli spigoli di due triedri corrispondenti abc, $a_1b_1c_1$ di due figure del sistema sono rispettivamente paralleli e del medesimo verso, e quindi i due triedri sono dello stesso verso (coroll. III, teor. XIII, 96), e perciò anche le due figure (teor. III, def. I, 98).

105. *Sistema generale ad una dimensione.*

Teor. I. Data una figura e una linea l nello spazio, la figura appartiene ad un sistema continuo ad una dimensione di figure invariabili del quale la linea data è una linea di punti corrispondenti.

Per la dimostrazione si procede in modo analogo a quello seguito nella dimostrazione del teor. II, 65.

Oss. I. Vale qui la stessa oss. del n. 65.

Teor. II. Due figure di un sistema continuo ad una dimensione di figure invariabili sono congruenti.

Difatti due triedri corrispondenti e consecutivi hanno gli spigoli e perciò anche le facce, consecutivi, e quindi i punti d'intersezione con un piano che lascia da una parte i due vertici dei triedri determinano due triangoli cogli angoli consecutivi e perciò del medesimo verso; vale a dire i due triedri sono conguenti. Ma se lo sono due triedri lo sono anche le due figure (teor. III, 98) e perciò anche due figure qualunque del sistema (teor. I, def. II e III, 36).

Coroll. Due figure simmetriche non possono appartenere ad un sistema continuo di figure invariabili.

Oss. II. Qui vale la def. II e la oss. II, del n. 65 per i sistemi continui di figure invariabili a più dimensioni.

§ 18.

Movimento reale delle figure nello spazio.

106. *Teor. I. Una figura che si muove comunque nello spazio descrive un sistema continuo.*

Come nel piano (teor. I, 66).

Teor. II. Una figura può muoversi liberamente nello spazio rimanendo invariabile.

Come nel piano (teor. II, 66) con l'analoga osservazione.

Coroll. Due posizioni di una figura, che si muove rimanendo invariabile sono congruenti.

Difatti le figure di un sistema continuo di figure invariabili sono congruenti (teor. II, 105).

Def. I. Se il sistema descritto da una figura è circolare (103), il movimento dicesi *movimento di rotazione* intorno all'asse del sistema, che si chiama *asse del movimento di rotazione*.

Oss. I. Nel movimento di rotazione le traiettorie dei punti sono circonferenze i cui piani sono normali all'asse col centro nell'asse stesso (teor. VII, def. III, 103).

Teor. IV. I punti dell'asse nel movimento rimangono fissi.

Perchè corrispondono a sè stessi nel sistema (teor. VIII, 103 e def. I, 37).

Teor. V. Ogni retta che incontra l'asse si muove in un cono circolare col vertice nell'asse stesso, ed ogni piano che non passa per l'asse inviluppa un cono. Il vertice del cono è il punto d'incontro della retta e del piano col-l'asse, che è anche asse del cono (coroll. I, II, teor. X, 103).

Def. II. Se il sistema secondo cui avviene il movimento è parallelo (104), il movimento dicesi *movimento di traslazione.*

Teor. VI. Le traiettorie nel movimento di traslazione sono rette perpendicolari alla direzione del sistema (teor. IV, def. II, 104).

Def. III. La direzione delle traiettorie chiamasi *direzione* del movimento.

Teor. VII. Una retta e un piano nel movimento di traslazione rimangono paralleli a sè stessi (teor. IV, 104).

Teor. VIII. Il movimento di traslazione è un movimento di rotazione infinitesima rispetto all'unità delle distanze del campo infinito.

Difatti le rette perpendicolari alla direzione del sistema parallelo si possono considerare quali circonferenze col centro situato sull'asse del movimento, cioè all'infinito (teor. II, 32).

Coroll. Nel movimento di traslazione si possono considerare fissi un punto ed una retta, l'uno in senso relativo l'altra in senso assoluto. Il punto giace al-l'infinito nella direzione del movimento, la retta è l'asse del movimento stesso.

Difatti l'asse di rotazione è immobile in senso assoluto, mentre sappiamo che nel movimento di rotazione non vi è altro punto fisso fuori dell'asse. Ciò vuol dire che ogni punto all'infinito rispetto all'unità finita si muove in questo caso di un segmento finito, vale a dire infinitesimo rispetto all'unità infinita.

Def. IV. Se il sistema secondo il quale avviene il movimento è sferico (def. I, 103) il movimento chiamasi di *rotazione intorno ad un punto.*

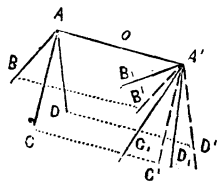
Teor. IX. Una figura non può muoversi se si tengono fissi tre dei suoi punti non situati in linea retta.

Difatti due posizioni di una medesima figura sono congruenti (coroll., teor. II) e quindi non possono aver più di due punti corrispondenti comuni (teor. IV, 98).

Teor. X. Due figure congruenti si possono trasportare l'una sull'altra mediante una traslazione ed una rotazione, oppure mediante due rotazioni.

fig. 92

Siano $ABCD...M...$, $A_1B_1C_1D_1...M_1...$ le figure date. La figura $ABCD...M...$ si trasporti parallelamente a sè stessa finchè A venga a cadere in A_1. I punti $ABCD...M$ si trasportano in punti $B'C'D'...M'...$ in modo che la figura $A_1B'C'D'...M'...$ è congruente alla figura $ABCD...M...$ e quindi anche alla figura $A_1B'_1C'_1D'_1...M_1...$ (coroll. teor. II).

Le due figure $A_1B_1C_1D_1...M_1...$, $A_1B'C'D'...M'...$ determinano all'infinito due figure congruenti, le quali si possono trasportare l'una sull'altra mediante una rotazione intorno ad un punto S_∞ (teor. I, 67 e oss. III,

77), dunque le due figure suddette nella stella di centro A_1 possono trasporsi l'una sull'altra mediante una rotazione intorno all'asse A_1S_∞.

Oppure:

Se conduciamo dal punto di mezzo O di (AA_1) una normale ad (AA_1), facendo una rotazione intorno a questa retta finchè A venga a cadere in A_1, la prima figura si trasporta in una figura $A_1B'''C'''D'''...M'''...$ congruente alla figura $A_1B_1C_1D_1...M_1...$, la quale si potrà trasportare con una rotazione intorno ad un asse passante per A_1 nella figura $A_1B_1C_1D_1...M_1...$, come abbiamo fatto per la figura $A_1B'C'D'...M'....$

Oss. II. Nel primo caso nella corrispondenza d'identità fra le due figure date, il punto S_∞ corrisponde a sè stesso, e quindi anche la direzione delle rette da esso determinata; vale a dire ad una retta della prima figura parallela ad AS_∞, corrisponde nella seconda figura una retta ad essa parallela; e quindi ai piani dell'una perpendicolari alla suddetta direzione corrispondono piani paralleli dell'altra figura. Senza difficoltà si dimostra che vi è una retta parallela alla direzione suddetta che corrisponde a sè stessa.

Teor. XI. Due figure simmetriche non piane non si possono trasportare l'una sull'altra.

Difatti se ciò fosse possibile, esse farebbero parte di un sistema continuo di figure invariabili, il che non è (coroll. teor. II, 106).

Oss. II. Due casi sembrano in contraddizione con questa proprietà, e cioè il diedro di due semipiani A_2B_2, e le zone date da due piani paralleli. Ma anche queste eccezioni non sono che apparenti.

1.⁰ Sia dato un diedro (A_2B_2), un piano σ normale all'asse s_1, S il punto di incontro di σ con s_1, x la normale condotta da S al semipiano B_2. Sia A'_2 il semipiano simmetrico di A_2 rispetto al piano s_1x. Il piano σ divide i diedri (A_2B_2), $(A'_2B'_2)$ in due parti opposte al piano σ, che indichiamo rispettivamente con $(\alpha_2\beta_2))$, $(\alpha'_2\beta'_2)$; $(\alpha''_2\beta''_2)$, $(\alpha'''_2\beta'''_2)$, in modo che $(\alpha_2\beta_2)$, $(\alpha''_2\beta''_2)$, e quindi $(\alpha'_2\beta'_2)$, $(\alpha'''_2\beta'''_2)$ siano dalla stessa parte di σ. Eseguendo una rotazione intorno alla retta x, la parte $(\alpha'_2\beta'_2)$ si porta dopo mezza rotazione nel diedro $(\alpha''_2\beta''_2)$, mentre la parte $(\alpha_2\beta_2)$ si porta nella parte $(\alpha'''_2\beta'''_2)$. I diedri $(\alpha_2\beta_2)$, $(\alpha'''_2\beta'''_2)$ sono congruenti, e perciò $(\beta'''_2\alpha'''_2)$, $(\alpha'_2\beta'_2)$ sono pure congruenti. Facendo una rotazione intorno ad s_1 la parte $(\beta'''_2\alpha'''_2)$ si porta nella parte $(\alpha'_2\beta'_2)$, e così $(\beta''_2\alpha''_2)$ in $(\alpha_2\beta_2)$. Vale a dire $(\alpha_2\beta_2)$ si porta in $(\beta'_2\alpha'_2)$ e $(\alpha'_2\beta'_2)$ in $(\beta_2\alpha_2)$, ossia il diedro (A_2B_2) si trasporta nel diedro (B_2A_2).

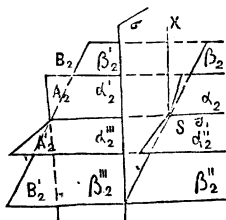



fig. 93

Ciò sembra in contraddizione col corollario anzidetto, ma la contraddizione sparisce quando si pensa che un diedro fornisce i due versi dello spazio secondo la direzione in cui si considera l'asse del diedro (teor. XVIII, 96), o in altre parole i due semipiani A_2, B_2 sono le facce di due diedri di verso opposto, e perciò i due diedri (A_2B_2), (B_2A_2) rispetto alle due direzioni opposte dell'asse sono dello stesso verso ossia congruenti.

Un altro caso si presenta, se si eseguisce invece una traslazione secondo la direzione parallela a σ; $(\alpha_2\beta_2)$ si trasporta su $(\alpha'_2\beta'_2)$ scorrendo su sè stesso. Ma è da osservare, come abbiamo fatto per la striscia piana (oss. I, 67), che non è tutto $(\alpha_2\beta_2)$ che viene a coincidere con $(\alpha'_2\beta'_2)$ ma soltanto una parte di esso; una parte cioè qualunque data nel campo finito (fig. 93).

2.⁰ Se finalmente si ha una zona di piani paralleli, si può ripetere rispetto ad essa quanto abbiamo detto rispetto alla striscia piana.

Teor. XII. Due figure simmetriche in un piano possono trasportarsi l'una sull'altra nello spazio.

Possiamo trasportarle nel medesimo piano fino ad essere simmetriche rispetto ad una retta (teor. IV, 67). Ma due figure simmetriche rispetto ad una retta in un piano appartengono ad un sistema circolare che ha per asse la retta data (teor. XIII, 103), dunque con un movimento di rotazione intorno a questa retta potremo trasportare una figura sull'altra.

Teor. XIII. Una figura dello spazio non può muoversi in esso se si tengono fissi tre dei suoi punti.

Perchè due posizioni diverse della figura essendo congruenti (coroll. teor. II), avrebbero tre punti comuni, il che è assurdo (teor. IV, 98).

Teor. XIV. Due figure simmetriche non piane si possono muovere nello spazio fino ad essere simmetriche rispetto ad un piano qualunque.

Dim. analoga a quella del teor. IV, 67.

Coroll. Se il piano σ passa per tre punti di una figura, le due figure simmetriche rispetto ad esso hanuo tutti i puuti di σ comuni (coroll. II, teor. I 62).

Capitolo II.

Spazio completo a tre dimensioni.

---

§ 1.

Stella e spazio completo — Prime loro proprietà. Intersezione di rette e di piani.

107. *Def. I.* Congiungendo i punti di un piano completo con un punto fuori di esso, il sistema di rette complete che si ottiene si chiama *stella completa*, il cui centro è il punto dato.

Se come elemento si considera il punto, la stella completa ci dà una figura che chiameremo *spazio completo, o Riemanniano, a tre dimensioni.*

Oss. I. In questo paragrafo, quando non vi saranno equivoci, anzichè spazio completo diremo solamente spazio.

Oss. II. Tralasciamo quelle definizioni date nello spazio Euclideo che valgono senz'altro anche per lo spazio completo.

Teor. I. Ogni punto opposto ad un punto dello spazio giace nello spazio.

Difatti nella retta della stella generatrice dello spazio che passa per il punto dato è contenuto anche il punto opposto (def. III, 6 e coroll. teor. II, 30).

Teor. II. Una retta che ha due punti non opposti nello spazio completo vi giace per intero.

Come nello spazio Euclideo (teor. II, 82) riferendosi al teor. III, 68.

Teor. III. Un piano che ha tre punti in comune con lo spazio non situati in linea retta vi giace per intero.

Come nello spazio Euclideo (teor. III, 82) badando che due rette nel piano completo si incontrano in due punti opposti (coroll. teor. IV, 68).

Oss. III. Due dei tre punti non possono essere opposti, altrimenti i tre punti sarebbero situati in linea retta.

Teor. IV. Lo spazio completo può essere generato da un piano e da un punto qualunque di esso, purchè il punto non giaccia nel piano.

Come nello spazio Euclideo (teor. IV, 82) tenendo conto della distinzione che deriva dal teor. I, 68 e dal teor. I precedente.

Coroll. Quattro punti qualunque non situati in un piano determinano uno spazio completo a tre dimensioni, che viene determinato da quattro qualunque dei suoi punti.

Oss. IV. Se due dei quattro punti fossero opposti, allora il piano di uno di essi e degli altri due passerebbe anche per il punto opposto del primo (teor. I, 68).

Teor. V. Una retta ed un piano dello spazio hanno due soli punti opposti comuni, se la retta non giace nel piano,

Come nel campo Euclideo (teor. I, 83). Basta osservare che se una retta incontra un piano in un punto, essi si incontrano anche nel punto opposto (coroll. teor. II, 30 e teor. I, 68).

Teor. VI. Due rette indipendenti dello spazio non si incontrano.

Come nel campo Euclideo (teor. II, 83).

Teor. VII. Due piani dello spazio si incotrano secondo una retta.

Come nel campo Euclideo (teor. III, 83). Bisogna appoggiarsi nella seconda dimostrazione al teor. VI, 68, anzichè al teor. VI, 48.

Teor. VIII. Tre piani che non hanno una retta comune si incontrano in due punti opposti.

Come nel campo Euclideo (teor. IV, 83). È da osservare che se tre piani hanno un punto comune hanno anche comune il punto opposto (teor. I, 68).

Oss. V. Valgono colle stesse dimostrazioni il teor V, VI, la def. II, i teor. VII e coroll., VIII. e la def. III del n. 83, i teor, VII e coroll, e VIII del n. 85.

§ 2.

Figure polari.

108. *Teor. I. I punti coniugati di un punto dato, o del suo opposto, sono situati in un piano.*

Sia R il punto dato, e X, Y, Z tre punti coniugati di R (def. I, 69). Il piano XYZ è situato nello spazio, e i suoi punti sono equidistanti da R (teor. I, 78).

Def. I. Il piano che soddisfa al teor. I si chiama *piano polare* del punto dato e del suo opposto; e questi punti si chiamano *poli* del piano.

Oss. I. Il piano polare è un piano limite assoluto del punto dato nello spazio generale rispetto all'unità Euclidea (conv. 28 e teor. I, 78), ed è il piano all'infinito di ogni punto del campo finito Euclideo dello spazio a tre dimensioni intorno al punto dato (teor. I, e def. I, 84).

Coroll. I. I piani polari di due punti coniugati passano rispettivamente per i due punti.

Coroll. II. Il piano polare di un punto del piano polare di un altro punto passa per questo punto.

Coroll. III. Ogni piano passante per un punto è piano polare di due punti opposti del piano polare del punto dato.

Difatti il piano dato incontra il piano polare del punto in una retta, la quale nel piano polare ha due poli (teor. II, 69), che sono i poli del piano (def. I).

Coroll. IV. Ciascun piano passante per un punto taglia il piano polare del punto in una retta, la quale è polare del punto nel piano dato.

Difatti nel piano dato i punti della retta sono coniugati al punto dato (def. II, 69).

Def. II. Due piani, uno dei quali contiene i poli dell'altro, si dicono *coniugati.*

Oss, II. Anche il secondo contiene i poli del primo (coroll. III).

Teor. II. I piani polari dei punti di una retta passano per un' altra retta, e i piani polari dei punti di questa passano per la prima.

Difatti due punti A e B hanno due piani polari α e β che si incontrano in una retta (teor. VII, 107). Scelti due punti O e P non opposti di questa retta, essi hanno i loro piani polari ω e π che passano per i punti A e B (coroll. II, teor. I). E siccome ogni punto della retta AB è situato nei piani ω e π, così il suo piano polare passa pei punti O e P, e perciò per tutta la retta OP (teor. III, 68); dunque il teorema è dimostrato.

Def. III. Due rette che soddisfano al teor. II le chiameremo *rette polari coniugate* o semplicemente rette *polari* o anche *coniugate.*

Coroll. I. I punti di due rette polari sono coniugati. Ossia: i segmenti i cui estremi sono su due rette polari sono retti.

Difatti ogni punto di una retta ha il suo piano polare che passa per la retta polare della prima, e i punti del piano polare sono tutti coniugati al polo (def. I).

Def. IV. Un punto ed una retta si dicono *coniugati* se la retta giace nel piano polare del punto.

Coroll. II. Se una retta passa per un punto, la retta polare giace nel piano polare del punto.

Coroll. III. Un punto coniugato ad una retta giace sulla polare della retta data.

Coroll. IV. Un piano che passa per una retta a incontra la retta polare a' di a nei poli di a nel piano dato.

Perchè nel piano dato i punti d'incontro con a' sono coniugati ai punti di a (def. II, 69 e coroll. I).

Teor. III. Ogni piano polare ha due poli opposti.

Scelti tre punti A,B,C nel piano non situati in linea retta, i loro tre piani polari non si incontrano in una retta, perchè sarebbero in una retta anche i tre punti ABC (teor. II), dunque si incontrano in due punti opposti (teor. VIII, 107), che sono i poli del piano dato (coroll. III, teor. I).

Teor. IV. I poli dei piani passanti per una retta sono situati sulla retta polare della prima.

Siano α e β due piani passanti per la retta a, A e B due punti di a. I piani polari di A e B passano pei poli di α e β (coroll. II, teor. I). Ma si incontrano nella polare della retta data a (teor. VII, 107; teor. II), dunque il teorema è dimostrato.

Coroll. I. Se una retta giace in un piano, la retta polare passa pel polo del piano.

Def. V. Un piano e una retta si dicono *coniugati*, se la retta passa pei poli del piano.

Coroll. II. Un piano coniugato ad una retta contiene la retta polare della prima (teor. II e def. V).

Coroll. III. Un punto di una retta, nel piano che lo unisce colla retta coniugata, ha questa retta come retta polare (def. II, 69 e coroll. I, teor. II).

Coroll. IV. Un piano è coniugato con tutte le rette polari delle sue rette.

Scelta infatti una retta del piano, il piano ha i suoi poli sulla retta polare di essa, dunque ecc. (def. V).

Teor. V. Un punto A è vertice di infiniti tetraedri le cui facce sono i piani polari dei vertici opposti. Questi tetraedri sono tanti quanti i triangoli coniugati polari di un piano.

Difatti dato un punto A e un triangolo BCD polare nel piano polare di A (def. IV, 69), i vertici del tetraedro $ABCD$ sono i poli della facce opposte, perchè ad es. il piano polare di B passa per A e per la polare di B nel piano BCD, cioè CD (teor. I e def. I).

Def. VI. Un tale tetraedro lo chiameremo *tetraedro coniugato polare*, o semplicemente *tetraedro polare*.

Coroll. Gli spigoli opposti di un tetraedro polare sono rette polari (def. III).

§ 3.

Identità dello spazio intorno ai suoi punti e alle sue rette. Parti in cui esso viene diviso da un suo piano.

109. *Teor. I. Le stelle sono identiche.*

Difatti siano A e B due punti qualunque, α e β i loro piani polari. I segmenti determinati da un punto coi punti del suo piano polare sono uguali ad un segmento retto (teor. I, 108, def. I, 69); quindi stabilita una corrispondenza d'identità fra i due piani α e β e fatto corrispondere il punto B al punto A, le due figure $(A\alpha)$, $(B\beta)$ sono identiche, perchè a due punti dell'una corrispondono in tal modo due punti dell' altra colla medesima distanza (teor. III, teor. I e coroll. II, teor. II, 15).

Teor. II. I fasci di piani sono identici.

Il fascio di piani determinato da una retta a e dalla sua polare riempie tutto lo spazio (coroll. teor. VII, 83 e oss. V, 107). Sia data un' altra retta b e la sua polare b'. Siccome i punti di due rette polari hanno distanze uguali (coroll. I, teor. II, 108) stabilita una corrispondenza d'identità in a e b e in a' e b', ne consegue facilmente che a due punti di (aa') corrispondono due punti di (bb') colla medesima distanza. Le due figure (aa'), (bb') sono identiche (teor. III, 15).

Coroll. Lo spazio è identico intorno ad ogni sua retta.

Teor. III. Il piano polare del centro di una stella la divide in due parti identiche, e i punti dell'una sono opposti a quelli dell'altra.

Sia α il piano, A e A' i suoi poli. I punti del piano distano ugualmente dai punti A e A' perchè sono coniugati con A e A' (teor. I. 108, def. I, 69), e i punti d'intersezione d'ogni retta passante per A, A' col piano sono situati nei punti di mezzo delle due metà della retta determinate dai punti A e A'. Il piano divide le stelle di centri A e A' in due parti, e quindi anche lo spazio. Facendo corrispondere A ad A', e i punti del piano polare a sè medesimi, le due figure $(A\alpha)$, $(A'\alpha)$ sono identiche, perchè scelti due punti della prima, nella seconda corrispondono ad essi due punti colla stessa distanza (teor. III, 15).

Coroll. Un piano divide lo spazio in due parti opposte.

Teor. IV. Una retta è situata metà in una parte e metà nella parte opposta dello spazio rispetto ad un piano.

Dim. analoga a quella del teor. II, 71; ρ indica in questo caso il piano che divide lo spazio in due parti opposte, R uno dei suoi poli, r la retta data.

Coroll. I. Due punti opposti sono separati da un piano qualunque dello spazio.

Perchè ogni retta che passa per essi é situata per metà da parti opposte del piano, e i due punti opposti sono situati in queste due metà.

Oss. I. Vale pure coll'analoga dimostrazione il coroll. II del teor. IV, 86.

Teor. V. Ogni piano è situato per metà in una parte e nella parte opposta dello spazio rispetto ad un piano dato.

Difatti il piano σ taglia il piano dato π in una retta s. Ogni retta del piano ha punti situati da una parte e dall'altra rispetto al piano π; dunque così è anche del piano σ. Sia A un punto del piano σ situato in una delle parti in cui σ viene diviso dalla retta s. Ogni retta passante per A nel piano σ è situata per metà dalla stessa parte di π del punto A (teor. IV), e tutte queste parti delle rette passanti per A limitate dalla retta s determinano precisamente la parte del piano σ nella quale giace il punto A, che è dunque situata da una stessa parte rispetto a π. Analogamente la parte opposta del piano σ rispetto alla retta s è situata dalla parte opposta dello spazio rispetto al piano π.

§ 4.

Rette e piani perpendicolari.

110. *Teor. I. I segmenti di un piano misurano gli angoli intorno ai poli di questo piano.*

Difatti scelti due segmenti (AB), (CD) identici nel piano π polare di un punto P, i triangoli PAB, PCD sono identici per avere i lati uguali (teor. I, 108 e teor. III, 17), e quindi $\widehat{APB} \equiv \widehat{CPD}$. A segmenti maggiori o minori corrispondono angoli maggiori o minori, e inversamente.

Coroll. I. Le rette che congiungono un punto con due punti coniugati del suo piano polare sono perpendicolari (def. I, 69 e def. V, 40).

Oss. I. Nello spazio completo valgono le stesse definizioni I e II di piani e rette perpendicolari passanti per un punto del n. 87, quando al piano all'infinito del campo Euclideo si sostituisca il piano polare del punto.

Teor. II. I punti e la retta d'intersezione di una retta e di un piano perpendicolari col piano polare dei loro punti d'incontro sono poli e retta polare, e inversamente (teor. I, 73; teor. VI, teor. I, def. I, 69; e oss. I).

Coroll. Una retta perpendicolare ad un piano è perpendicolare a tutte le rette del piano, che passano pei punti d'intersezione della retta col piano.

Sia P un punto d'incontro della retta a col piano α ad essa perpendicolare, π il piano polare di P; A e a' un punto e la retta d'intersezione della retta

a e del piano α col piano π. Siccome A e a' sono polo e retta polare nel piano π, i punti di a' sono coniugati al punto A (def. I, 69), dunque la retta data e ogni retta passante per P nel piano α sono perpendicolari (coroll. teor. I).

Teor. III. Una retta e un piano coniugati sono perpendicolari.

Siano a e α la retta e il piano coniugati. Se P è uno dei loro punti comuni, il piano π polare di P contiene la retta a' polare della retta a (teor. II, 108) situata in α (coroll. II, teor. IV, 108), e incontra la retta a nei poli della retta a' nel piano π (coroll. IV, teor. II, 108); dunque la retta e il piano sono perpendicolari (teor. II).

Coroll. I. Le rette passanti per un punto sono perpendicolari al piano polare del punto.

Difatti le loro polari sono nel piano polare del punto, e quindi le rette date e il piano polare del punto dato sono coniugati (def. V e teor. IV, 108).

Teor. IV. Una retta ed un piano perpendicolari sono coniugati.

Siano a la retta ed α il piano; P e P' i loro punti d'intersezione. Il piano polare π di P incontra la retta a in due punti A, A' che sono poli della retta a' nella quale il piano π incontra il piano α (teor. II). Il piano polare di A passa per a' (teor. I, 108, def. II, 69) dunque a' è la retta polare di a, e perciò α e a sono coniugati (teor. IV e def. V, 108).

Coroll. I. Le perpendicolari ad un piano passano pei poli del piano.

Perchè sono coniugate al piano (def. VI, 108).

Cor. II. Da un punto di un piano, o fuori del piano, passa una sola perpendicolare al piano.

È la retta che congiunge il punto coi poli del piano, la quale è coniugata al piano dato.

Coroll. III. Da un punto si può condurre un solo piano perpendicolare ad una retta data.

Il piano, che unisce il punto colla retta polare della retta data, è coniugato a questa retta (teor. IV, 108), e perciò è perpendicolare alla retta.

Coroll. IV. Due piani hanno una perpendicolare comune.

Essa è la retta che congiunge i poli dei due piani.

Teor. V. Due piani coniugati sono perpendicolari, e inversamente.

Siano α e β i due piani ciascuno dei quali contiene i poli A, A'; B, B' dell'altro (def. II e oss. II, 108). La retta r' che unisce i poli dei due piani è polare della loro retta d'intersezione r, quindi il piano polare π di ogni punto P di r passa per r'; dunque le rette d'intersezione a e b dei due piani dati col piano π passano rispettivamente per B, B'; A, A', e di più la retta a essendo intersezione dei due piani α e π ha per retta polare la retta PA, e quindi A è il polo di a nel piano π. Per la stessa ragione B è il polo di b in π e quindi a e b sono rette coniugate nel piano π, e i due piani α e β sono perpendicolari (coroll. II, teor. VII, 73 e oss. I).

Inversamente, se due piani α e β sono perpendicolari, vi è un punto P della loro retta d'intersezione r il cui piano polare π interseca i piani dati in due rette a e b coniugate, ciascuna delle quali contiene nel piano π il polo dell'altra, perchè il loro segmento normale è retto (coroll. II teor. VII, 73 e oss. I). Siano A e B i poli delle due rette a e b in π; la retta AB nel piano π è

polare dei punti d'incontro R e R' della retta r con π, quindi il piano polare di A passa per P,B, R, ossia è il piano α. Così il piano polare di B è il piano PRA, cioè β. Dunque i piani α e β sono coniugati (def. II, 108).

Coroll. I. I piani perpendicolari ad un piano passano pei poli del piano.

Difatti due piani perpendicolari sono coniugati, e ciascuno di essi contiene i poli dell'altro (def. II e oss. II, 108).

Coroll. II. Per una retta passa uno ed un solo piano perpendicolare ad un piano dato.

È il piano che congiunge la retta coi poli del piano.

Coroll. III. Tre piani hanno un piano perpendicolare comune.

È il piano che congiunge i tre poli.

Teor. VI. Il piano polare di un punto qualunque della retta d'intersezione di due piani perpendicolari interseca questi due piani in rette coniugate nel primo piano (teor. V; coroll. II e IV, teor. I, 108 e def. III, 69).

Teor. VII. Una retta ed un piano hanno un piano perpendicolare e una retta normale comune.

Il piano cioè che congiunge il polo del piano colla polare della retta data è coniugato alla retta e al piano (teor. IV, def. V, def. II 108; teor. III, V). La retta normale comune passa pel punto d'intersezione del piano perpendicolare colla retta (coroll. II, teor. IV, teor. V e coroll. I, teor. IV; teor. III. 68).

Teor. VIII. Una retta perpendicolare ad una retta c, incontra pure la retta polare c' di c, ed è a questa perpendicolare.

Sia a la perpendicolare alla retta c, che per definizione la interseca in un punto (oss. I). Il piano ac incontra la retta c' nei due poli della retta c nel piano stesso (coroll. IV, teor. II, 108); ed ogni retta perpendicolare alla retta c passa in questo piano pei poli stessi (teor. VI, 69) (fig. 94).

Coroll. I. Se una trasversale è normale a due rette, la retta polare è pure normale alle due rette.

Siano a e b le due rette date, c la trasversale comune normale alle due rette, A e B i suoi punti d'incontro con a e b, e finalmente c' sia la retta polare di c. Le rette a e b incontrano c e sono normali a c, dunque incontrano perpendicolarmente c' (fig. 94).

fig. 94

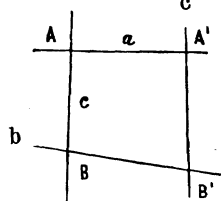
Coroll. II. Dati gli estremi di un segmento normale a due rette, quelli del segmento normale polare determinano coi primi un segmento retto.

Perchè sono punti coniugati (coroll. I, teor. II, 108).

Teor. IX. Ogni retta che incontra due rette polari è perpendicolare ad esse.

Siano a e b le due rette polari, c la trasversale, A e B due dei suoi punti d'incontro con a e b. Il piano ac taglia la b nel punto B, che è il polo di a in esso piano (coroll. IV, teor. II, 108), dunque AB è perpendicolare ad a (teor. VI, 69). Per la stessa ragione è perpendicolare a b (fig. 94).

Teor. X. Due rette a e b che si incontrano, hanno due perpendicolari comuni.

Sia P uno dei loro punti d'incontro, e π il piano polare di P. Il piano π

interseca il piano ab in una retta perpendicolare alle due rette, perchè ogni retta passante per P è perpendicolare a tutte le rette del piano π passanti pel suo punto d'incontro col piano π (coroll. I, teor. III, coroll. teor. II). Di più per P passa una perpendicolare al piano (ab) (coroll. II, teor. IV) la quale è perpendicolare alle due rette (coroll. teor. II)[1]).

Teor. XI. Gli spigoli di un tetraedro polare sono uguali ad un segmento retto. Le facce che si incontrano in uno spigolo sono perpendicolari, così pure gli spigoli situati in una medesima faccia.

Infatti i vertici sono due a due coniugati e le sue facce due a due coniugate, e gli spigoli di una faccia sono due a due coniugati su queste faccie.

Teor. XII. Due tetraedri polari sono uguali in 24 maniere diverse.

Siano $ABCD$, $A'B'C'D'$ i due tetraedri; i due triangoli BCD, $B'C'D'$ sono identici e le distanze dei punti A e A' dai punti BCD, $B'C'D'$ sono uguali. Si può stabilire così una corrispondenza d'identità delle due figure $A.BCD$, $A'.B'C'D'$ in modo che a due punti dell'una corrispondano due punti dell'altra colla stessa distanza (teor. III. 15). Ma i tetraedri dati dalle 24 permutazioni dei quattro vertici $ABCD$ dello stesso tetraedro sono identici per avere sempre gli spigoli uguali tutti ad un segmento retto; dunque ecc.

§ 5.

Distanza di un punto da un piano; di una retta da un piano e di due piani.

111. *Def. I.* La perpendicolare condotta da un punto P ad un piano π incontra questo piano in due punti opposti M e M', che sono i *piedi* di essa. I segmenti (PM), (PM') si chiamano i *segmenti normali* del punto al piano.

I segmenti determinati da P cogli altri punti del piano si chiamano *obliqui.*

Oss. I. Se il piano π è il piano polare di P tutti i punti di π formano con P un segmento retto (teor. I, def. I, 108). Parlando dunque dei segmenti normali e obliqui del punto P rispetto ad un piano σ intenderemo che σ non sia il piano polare di P.

Teor. I. I segmenti normali di un punto da un piano sono supplementari; e se sono uguali ad un segmento retto, il piano è il piano polare del punto dato.

Dim. analoga a quella data pel teor. I del n. 73. Anzichè sul coroll. II del teor. VI, 69 qui occorre appoggiarsi al coroll. III del teor. IV, 110.

Teor. II. Dei segmenti normali di un punto P ad un piano ρ il minore è il minimo e il maggiore è il massimo tra i segmenti obliqui.

Di due segmenti obliqui è maggiore quello che ha il suo punto in ρ più lontano dal piede del segmento normale minimo o più vicino a quello del segmento normale massimo, e inversamente.

---

1) Pel teor. IX sappiamo che vi sono coppie di rette sghembe che hanno una normale e quindi anche almeno un'altra normale comune. — Più tardi vedremo che due rette indipendenti hanno difatti due normali comuni (vedi n. 117).

Siano M e M' i piedi della perpendicolare del punto P al piano ρ. Sia (PA) un segmento obliquo. Il piano PAM taglia il piano ρ in una retta normale alla retta PM (coroll. teor. II, 110), e nel piano PAM il segmento minimo è (PM), se $(PM) < (PM')$, e il segmento massimo è (PM) (teor. II, 73); dunque $(PM) < (PA)$ e $(PA) < (PM')$.

Se A e B sono i punti in ρ dei segmenti obliqui (PA) e (PB), basta considerare i triangoli PAM, PBM, e nel piano PAM un triangolo uguale al triangolo PBM col cateto (PM) e coll'altro cateto sulla retta AM, nel qual caso basta applicare il teor. II, 73.

Teor. III. I segmenti obliqui di un punto ai punti di un piano, equidistanti da un piede della perpendicolare del punto al piano, formano lo stesso angolo con la normale.

Come nello spazio Euclideo (teor. II, 88).

Cor. I. Vale il teorema inverso.

Def. II. Le distanze normali di un punto da un piano si dicono *distanze* del punto dal piano. E se non diremo altrimenti, per distanza di un punto dal piano intenderemo la distanza minima.

Oss. II. Valgono colle stesse dimostrazioni anche nello spazio completo i corollario II, III del teor. II, e il teor. III del n. 88, riferendosi al teor. VI, 73 anzichè al teor. II, 55; e così il teor. IV e coroll. e il teor. VIII del n. 88, tenendo conto che una retta incontra un piano in due punti opposti.

Def. III. La perpendicolare a due piani α e β li incontra in due coppie di punti A, A'; B, B' che determinano quattro segmenti consecutivi due a due uguali di cui due non uguali sono supplementari (coroll. IV, teor. IV, 100) Essi si chiamano *segmenti normali dei due piani.*

Teor. IV. Due piani α e β hanno due segmenti normali supplementari, che sono pei loro estremi il segmento minimo e il segmento massimo rispetto all'uno e all'altro piano.

Se (AB) è il segmento normale minore, (AB) è la distanza minima di A dal piano β e di B dal piano α. Vi sono segmenti (EF) i cui estremi sono nei due piani e sono minori di (AB), ma non sono i segmenti minimi dei loro estremi rispetto ai due piani. Se E ed F coincidono non si ha più la retta EF.

Oss. III. Quando parleremo del segmento normale di due piani soltanto intenderemo uno dei segmenti minimi, quando non diremo il contrario.

Coroll. I. I segmenti normali di due piani coniugati sono retti.

Difatti se A e A'; B e B' sono i poli dei due piani, essendo essi situati nei due piani (def. II, 108), (AB) è normale ai due piani, ed è retto (coroll. I, teor. III, 100; teor. I, def. I, 108 e def. I, 69).

Coroll. II. Due semipiani hanno un solo segmento normale che dà la distanza minima o massima tra i punti dei due semipiani secondo che il segmento normale è minore o maggiore di un retto.

Difatti le coppie di punti opposti A e A', B e B' sono separati da una retta qualunque di ciascuno dei due piani dati (coroll. I, teor. II, 71).

Coroll. III. Due coppie di piani che hanno la medesima distanza sono uguali.

Perchè si può stabilire fra loro una corrispondenza d'identità nella quale siano corrispondenti le rette d'intersezione e i piedi dei segmenti normali uguali (teor. III, 15).

Def. IV. Indicando con A e A', B e B' i punti d'intersezione delle rette normali ad una retta e ad un piano, i loro segmenti consecutivi si chiamano *segmenti normali della retta e del piano.*

Teor V. I segmenti normali ad una retta e ad un piano sono supplementari, e danno la distanza minima e massima fra i punti del piano e della retta dalla retta e dal piano.

Sia (AB) il segmento minore; esso è il segmento minimo del punto A dal piano, e il segmento minimo del punto B dalla retta. Anche qui va fatta un'osservazione analoga a quella del teor. IV.

Coroll. I. I segmenti normali di una retta e di un piano coniugati sono retti.

Difatti la normale comune passa pel polo A del piano situato sulla retta, e incontra in un punto B la retta polare di essa situata sul piano (def. V, coroll. II, teor. IV, 108; coroll. I, teor. III e teor. IX, 110), dunque (AB) è un segmento retto.

Coroll. II. Data una semiretta e un semipiano, vi è un segmento normale ad ambedue che dà la distanza minima o massima fra i punti della semiretta e quelli del semipiano, secondochè esso è minore o maggiore di un segmento retto.

Coroll. III. Le figure costituite da due rette rispettivamante con due piani sono identiche se hanno la stessa distanza.

Perchè esiste fra esse una corrispondenza d'identità nella quale sono corrispondenti i punti d'intersezione delle rette e dei piani e gli estremi dei loro segmenti normali (teor. III, 15).

§ 6.

Angoli fra raggi, rette, semipiani e piani.

112. *Oss. I.* La definizione di angolo di un raggio e di una retta con un piano dato nel campo Euclideo (def. I, II, 90) vale anche nel campo completo dello spazio, quando al piano all'infinito si sostituisca il piano polare di uno dei punti d'intersezione del raggio o della retta col piano.

Valgono quindi colle analoghe dimostrazioni il teor. I e II e loro corollari del n. 89. Rispetto al teor. II vi è una differenza; cioè nel campo Euclideo il teorema vale per tutti i raggi del piano, i quali essendo paralleli a quelli passanti pel punto d'incontro del raggio col piano formano lo stesso angolo col raggio dato. Non è però così nello spazio completo nel quale la definizione di angoli di due raggi già data vale soltanto quando si incontrano in un punto.

Oss. II. Per *diedro di due semipiani* s'intende, come nel campo Euclideo, una parte di un fascio di semipiani determinati dai due semipiani.

La retta che misura la distanza delle semirette all'infinito delle facce del diedro è nel campo completo la retta polare dell'asse del diedro.

Vale coll'analoga dimostrazione il teor. I, 91).

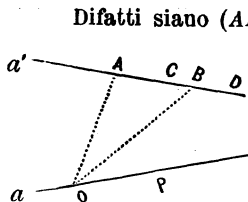
Teor. I. A segmenti uguali (disuguali) di una retta corrispondono diedri uguali (disuguali) intorno alla retta polare.

Difatti siano (AB), (CD) due segmenti uguali di una retta a', e siano O e P due punti della retta polare a. I tetraedri $OPAB$, $OPCD$ sono uguali, perchè hanno gli spigoli rispettivamente uguali, cioè (OP) comune, $(AB) \equiv (CD)$ e gli altri spigoli uguali ad un retto (coroll, I, teor. II, 103), dunque i due diedri $a.(AB)$, $a.(CD)$ sono uguali.

fig. 95.

Se $(AB) \gtrless (CD)$, scelto nel primo caso in (AB) un punto B_1 tale che $(AB_1) \equiv (CD)$ il diedro $a.(AB_1)$ è uguale al diedro $a.(CD)$. Ma il diedro $a.(AB_1)$ è parte del diedro $a.(AB)$ (oss. II), dunque ecc.

Coroll. Due diedri uguali o disuguali intorno ad una retta determinano segmenti uguali o disuguali sulla retta polare.

Teor. II. Le sezioni normali di un diedro sono uguali.

Se $(\alpha\beta)$ è il diedro, a il suo asse ed a' la sua retta polare, i piani delle sezioni normali sono quelli che passano per la retta a' (teor. IV, 110). Siano A e B punti d'intersezione di α e β con a', O e P due punti di a. I triangoli ABO, ABP sono uguali perchè hanno i tre lati uguali (coroll. I, teor. II, 108), dunque $\widehat{AOB} \equiv \widehat{APB}$ (fig. 95).

Teor. III. Se due diedri sono uguali o disuguali, le loro sezioni normali sono uguali o disuguali. E inversamente.

Siano a e b gli assi dei due diedri, α e α_1, β e β_1 le loro facce, a' e b' le rette polari di a e b, (AA_1), (BB_1) i segmenti determinati dai due diedri sulla rette a' e b'.

Gli angoli delle sezioni normali di un medesimo diedro, per es. del primo, sono dati dai raggi che congiungono un punto dell'asse coi punti A e A_1. Ora siccome $(AA_1) \equiv (BB_1)$, ne consegue che anche le loro sezioni normali sono uguali. E se $(AA_1) \lessgtr (BB_1)$ anche le sezioni normali sono disuguali. E inversamente, se queste sono uguali si ha $(AA_1) \equiv (BB_1)$ e i due diedri sono uguali, e se le sezioni normali sono disuguali si ha $(AA_1) \gtrless (AB_1)$, e sono perciò disuguali anche i diedri (teor. I e II).

Oss. III. Colle analoghe dimostrazioni valgono i teor. VI, VII, IX e coroll., X e XI del n. 91, badando che nello spazio completo non vi sono piani paralleli.

§ 7.

Triedri.

113. *Oss. I.* Le definizioni di angoloide e di triedro date nel campo Euclideo (93) valgono pure nel campo completo dello spazio.

Rispetto all'angoloide o al un triedro, al piano all'infinito bisogna sostituire il piano polare del vertice. Osserviamo soltanto che gli spigoli di un angoloide si incontrano in due punti opposti, e che quindi formano due angoloidi, secondo che si considera l'uno o l'altro punto.

Oss. II. Valgono nello spazio completo tutti i teoremi del n. 93, che si dimostrano nello stesso modo tenendo conto dell'oss. I.

Così valgono, tranne il teor. I, tutti i teoremi dei triedri uguali del n. 94, cioè dello spazio Euclideo [1]).

§ 8.

Distanze di due rette.

114. *Def. I.* Se A e A', B e B' sono i punti d'incontro di una perpendicolare comune a due rette a e b con queste rette, i loro segmenti consecutivi si chiamano *segmenti normali* delle due rette.

Teor. I. I segmenti normali di due rette situati sopra una medesima retta sono supplementari; e danno la distanza minima e la distanza massima dei punti di ciascuna retta da quelli dell'altra.

Difatti se (AB) è il segmento normale minore, esso dà la distanza minima del punto A dai punti della retta b e la distanza minima del punto B dai punti della retta a (teor. II, 73).

Teor. II. Se due rette hanno due segmenti normali polari uguali ad un retto, le due rette sono polari.

Difatti siano a e b le due rette, (AB) un segmento normale retto, $(A'B')$ il segmento normale polare. Conduciamo per A il piano normale α alla retta a; nel piano α la polare del punto A è la retta a' polare di a (coroll. IV, teor. II, 108), la quale è pure normale alla retta AB in B come a tutte le altre rette passanti per A in α (teor. VI, 69).

Ma A' è un polo del piano α (coroll. I, teor. IV, 110; teor. I, 108), quindi B' giace nel piano α; essendo $(A'B')$ retto; e siccome la retta BB' è normale alla retta (AB), e per B in α passa una sola normale a questa retta (coroll. II, teor. VI, 69), così BB' è la retta polare di α.

Oss. I. Vale il teor. II del n. 89. Non potendo servirci della dimostrazione data nel testo, bisogna adoperare quella data nella nota relativa. È da osservare però che due rette sgembe hanno due rette normali comuni e possono averne anche infinite (come vedremo fra poco), e che il teorema vale per ogni segmento normale comune. Ha pure vigore l'oss. III del n. 89 che non è altro che il teor. VI, 17, che abbiamo dimostrato indipendentemente dalle dimensioni dello spazio e dall'assioma delle parallele.

Teor. III. Se due segmenti (AC), (BD) normali a due rette AB, CD sono uguali, i due segmenti (AB), (CD) sono uguali.

I triangoli CAB, BDA sono per dato rettangoli in A e in D, hanno un cateto e l'ipotenusa uguali, e quindi sono uguali (teor. VI, 73), dunque $(AB) \equiv (CD)$ (fig. 96).

Teor. IV. Se due segmenti normali a due rette sono uguali, ogni punto di esse è estremo di un segmento normale comune ed uguale ai primi due.

Usando le indicazioni del teorema precedente, dividendo per metà (AB) e (CD) nei punti E ed F, la retta EF è perpendicolare alle due rette AB, e

---

1) Anche qui dunque vediamo come dai teoremi sui triangoli del piano Euclideo si deducono, passando pel piano completo, teoremi dello spazio Euclideo e completo, i quali servono a dimostrare altre proprietà di questi spazi.

CA (teor. VI, 17), e poichè $(CF) \equiv (AE)$ (teor. III) ne consegue $(EF) \equiv (AC) \equiv (BD)$ (teor. III).

Se E' ed F' sono i punti medî dei segmenti (CF) ed (AE), la retta $E'F'$ è perpendicolare alle rette AB e CD (teor. VI, 17), e si ha $(E'F') \equiv (AC) \equiv (EF) \equiv (BD)$ (teor. III). Continuando la divisione per metà dei nuovi segmenti ottenuti si ottengono altrettanti segmenti normali alle due rette ed uguali ai dati.

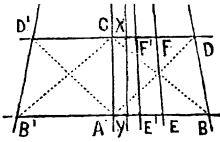



fig. 96

Se X è un punto di (CD) e se non è un punto F, è limite di una serie illimitata di 1ª specie di punti F, ad es. da D verso C (int. h, 99). La serie di punti E corrispondenti in (AB) ha un punto limite Y, ed è tale che $(DX) \equiv (BY)$ (int. d', 97), e perciò $(CX) \equiv (AY)$. Il segmento (XY) è dunque limite del segmento (EF) (def. I, 12), e siccome (EF) è costante, si ha $(XY) \equiv (EF) \equiv (AC)$ (teor. II, 12) [1].

Ora, nel quadrangolo $ACXY$ i triangoli ACX, XYA sono uguali per avere i tre lati uguali, e poichè il primo è rettangolo in C per dato, lo è anche il secondo in Y. Così è rettangolo in X il triangolo CXY, dunque la retta XY e normale alle due rette date.

Consideriamo ora sulle rette CD e AB i segmenti (CD'), (AB') uguali a (CD) e (AB). Dai triangoli isosceli DAD', BCB' si ha $(AD') \equiv (AD)$, $\widehat{DAC} \equiv \widehat{D'AC}$

I diedri $B'\overline{AC}D'$, $B\overline{AC}D$ sono uguali perchè opposti all'asse AC, e quindi i triedri $A.BCD$, $A.B'CD'$ sono uguali per avere due facce e il diedro compreso uguale, dunque si ha $\widehat{D'AB'} \equiv \widehat{DAB}$, e perciò i due triangoli $D'AB'$, DAB sono uguali. Per la stessa ragione sono uguali i triangoli $D'B'C$, DAC. Dunque $(B'D')$ è normale alle rette AB, CD, ed è uguale a (BD).

Ora se è dato un punto X fuori del segmento (CD) sulla retta CD, vi è sempre un numero n tale che

$$(CD)\,n < (CX) < (CD)\,(n+1) \qquad \text{(int. } c', \text{ 81).}$$

E indicando con D_n, D_{n+1} i secondi estremi pei segmenti $(CD)\,n$, $(CD)(n+1)$ con B_n e B_{n+1} i punti corrispondenti in (AB), il tetraedro $B_n D_n B_{n+1} D_{n+1}$ è identico al tetraedro $ACBD$. Siccome per ogni punto X del segmento (CD), il teorema è stato dimostrato, così rimane dimostrato per ogni punto della retta CD, e perciò anche per ogni punto della retta AB (fig. 96).

Def. II. Due rette che hanno due segmenti normali uguali le chiamo *rette di ugual distanza.*

Coroll. Una retta di ugual distanza da un' altra retta lo è anche rispetto alla polare di quest' ultima.

Difatti le rette normali alle due prime sono normali anche alle rette polari, e siccome i segmenti i cui estremi sono sulle rette polari, sono retti (coroll. teor. II, 108) il teor. è dimostrato.

Teor. V. Una trasversale comune a due rette di ugual distanza forma con esse angoli alterni interni uguali.

---

1) È lo stesso processo che abbiamo adoperato pel teor. I, 35 e pel teor. I, 81.

Siano AB, CD le due rette, BC la trasversale comune. Da B e C conduciamo i segmenti normali (AC) e (BD). Nel quadrangolo $ABCD$, i triangoli rettangoli ABC, DCB sono uguali (teor. III), e si ha $\widehat{DCB} \equiv \widehat{ABC}$ (fig. 96).

Teor. VI. Se tre punti che hanno le stesse distanze da una retta, e non giacciono con questa in un piano sono situati in linea retta, questa è una retta di ugual distanza dalla retta data.

Il teor. IV, 81 esclude nello spazio completo il caso che i punti possano essere in un piano.

La dimostrazione del suddetto teorema serve anche in questo caso (fig. 72). Essendo il quadrangolo $AA'BB'$ rettangolo, che in questo caso non è piano, la retta r' è una retta di ugual distanza della retta data r (def. II e teor. IV).

Teor. VII. Data una retta e un punto fuori di essa, pel punto passano due rette di ugual distanza dalla retta data.

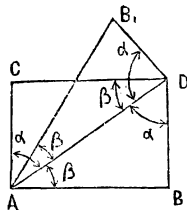
Sia CD la retta, A il punto dato, (AC) il segmento normale del punto alla retta. Dato un punto D qualunque di CD, il triangolo ACD è rettangolo in C. Indichiamo gli angoli $\widehat{CAD}$, $\widehat{CDA}$ con α e β. Se AB è una retta di ugual distanza da CD, essendo BD normale alle due rette, nel triangolo rettangolo ABD si ha:

$$\widehat{DAB} \equiv \widehat{CDA} \equiv \beta, \ \widehat{ADB} \equiv \widehat{CAB} \equiv \alpha \qquad \text{(teor. V)}$$

I triangoli ACD, ABD sono inoltre uguali avendo i tre lati uguali (teor. III).

Il raggio DB è situato sul piano perpendicolare condotto da D alla retta CD (teor. IV, VIII, 110). Esso deve formare con AD l'angolo α; vale a dire il raggio DB è spigolo di un triedro di cui sono note le tre facce ed è data in posizione la faccia $\widehat{CDA}$. Vi sono dunque due triedri $D.CAB$ $D.CAB_1$ che soddisfano alle condizioni suddette, i quali sono da parti opposte rispetto alla faccia CDA (oss. II, 113).

fig. 97

Fatto $(DB) \equiv (CA) \equiv (DB_1)$, la rette AB e AB_1 sono rette di ugual distanza dalla retta data.

Oss II. Le rette di ugual distanza dello spazio completo hanno proprietà analoghe delle rette parallele nel piano Euclideo (teor. I, 52), soltanto che da un punto si possono condurre due di tali rette ad una retta data.

§ 9.

Tetraedro.

115. *Oss. I.* La definizione data pel tetraedro nel campo Euclideo (def. I, 95) vale anche nello spazio completo.

Valgono il teor. I e coroll. del n. 95 colle stesse dimostrazioni e colle def. II, e III, IV e V.

Oss. II. I piani di un tetraedro dello spazio completo lo divide in 16 regioni anzichè in 15 (oss. I, 95), che sono pure tetraedri. Indicati con A, B, C, D i vertici di un tetraedro e con A', B', C', D' i punti opposti, i 16 tetraedri sono:

$$\begin{array}{llll} ABCD, & ABCD', & ABC'D, & AB'CD \\ A'BCD, & ABC'D', & AB'CD', & A'BCD' \\ AB'C'D' & A'BC'D, & A'B'CD, & A'B'CD' \\ A'B'C'D, & AB'C'D', & A'BC'D', & A'B'D'B'. \end{array}$$

Teor. I. Ai punti interni di un tetraedro sono opposti i punti interni del tetraedro opposto.

Difatti se X è un punto interno, la retta AX incontra la faccia opposta BCD in un punto Y interno. Il punto Y' opposto di Y giace nella parte interna del triangolo $B'C'D'$ (teor. II, 72), e quindi il punto X' giace nella parte interna del segmento $(A'Y')$ opposto ad (AY) (teor, IV, 29).

Oss. III. Ha pure luogo nello spazio completo con la stessa dimostrazione il teorema II coi suoi coroll. del n. 95, coll'avvertenza che un piano che incontra uno spigolo in un punto interno lo incontra anche in uno esterno; così il teor. III e coroll., i teor. IV, e V dello stesso numero.

Teor. II. I quattro piani di un tetraedro polare dividono lo spazio in 16 *tetraedri polari che sono a due a due opposti.*

Perchè i loro vertici hanno per piani polari le facce opposte (oss. II).

§ 10.

Versi dello spazio, dei suoi diedri, triedri e tetraedri — Figure congruenti e simmetriche.

116. *Oss. I.* I versi di una stella vengono determinati nello stesso modo che nel campo Euclideo, solo che al piano all'infinito va sostituito il piano polare del centro della stella.

Sussistono, seguendo la via indicata nell'oss. II, 96, i teor. del n. 96, tranne il coroll. III del teor. XIII, tenendo conto che una stella ha due centri opposti, e quindi i lati di un triedro determinano due versi opposti dello spazio secondo che li si considera dall'uno o dall'altro vertice. Vale anche quest'altro teorema:

Teor. I. Se si scambiano in numero dispari i vertici di un tetraedro $ABCD$ coi loro punti opposti si ottengono tetraedri di verso opposto al dato, e perciò dello stesso verso tra loro; se si fa uno scambio pari si ottengono tetraedri dello stesso verso del dato.

Infatti i due tetraedri $ABCD$, $A'BCD$ sono di verso opposto, perchè A e A' giacciono da parti opposte del piano BCD (coroll. I, teor. VIII e oss. I), e quindi $A'B'CD$ è dello stesso verso di $ABCD$, e $A'B'C'D$ essendo di verso opposto ad $A'B'CD$ è di verso opposto anche ad $ABCD$, e $A'B'C'D'$ è di verso opposto ad $A'B'C'D$, e quindi dello stesso verso di $ABCD$.

Coroll. I. Due tetraedri opposti sono di verso uguale.

Oss. II. Nello spazio completo valgono con analoghe dimostrazioni i teoremi sulle figure congruenti e simmetriche dei n. 97 e 98, tranne il teor. II, 97. Vale però anche questo teorema:

Teor. II. Due figure opposte sono congruenti (coroll. I, teor. I; teor. III, 98 e oss. II).

§ 11.

Cono, cilindro e sfera.

117. *Oss. I.* Vale la stessa definizione data del cono nel campo Euclideo (99), soltanto che al piano all'infinito va sostituito il piano polare del vertice del cono.

È però da osservare che un cono nello spazio completo ha due vertici, che sono punti opposti. Per avere la parte del cono che corrisponde ad una falda del cono del campo Euclideo bisogna limitare il cono ad un vertice e al piano polare di esso; e si ha così la metà del cono completo.

Valgono gli stessi teoremi dati pel cono nel campo Euclideo, soltanto che nell'enunciato di alcuni teoremi (ad es. I e III) e nelle dimostrazioni bisogna cambiare il piano all'infinito col piano polare dei vertici; e inoltre bisogna tener conto che due rette che si incontrano in un punto si incontrano anche nel punto opposto, e così una retta e un piano hanno sempre due punti opposti comuni; di modo che il coroll. VI del teor. IV si modifica nel senso che una retta può avere *quattro* punti comuni col cono, a due a due opposti, i quali perciò sono situati a due a due da parti opposte di un piano qualunque, e quindi anche del piano polare dei vertici.

Oss. II. Nello spazio completo il cilindro del campo Euclideo diventa nello spazio completo un cono, le cui generatrici formano coll' asse del cono un angolo infinitesimo.

Def. I. La figura formata da tutte le circonferenze di raggio uguale e i cui centri sono situati in una retta si chiama *superficie cilindrica*, e la parte dello spazio data dai cerchi si chiama *cilindro*. La retta si chiama *asse* del cilindro.

Oss. III. Questo è in certo modo la figura corrispondente al cilindro del campo Euclideo, poichè anche il cilindro in questo campo può essere generato in questa maniera (oss. I, 104) [1]).

Teor. I. Il cilindro ha per asse anche la retta polare. I raggi delle circonferenze intorno ai due assi del cilindro sono complementari.

Difatti sia a l'asse del cilindro (def. I). I piani delle circonferenze del cilindro passano per la retta polare a', la quale in questi piani è la retta polare dei centri. Sia P un punto della retta a', P_1 il suo opposto. In un piano qualunque σ passante per la retta a', e che incontra a in due punti opposti A e A_1, vi sono due cerchi del raggio dato r e di centri A e A_1. Congiungiamo a con P; nel piano aP il punto P è il polo della retta a, e taglia il piano σ nella retta PA, e quindi i due cerchi in quattro punti situati ad ugual distanza da P e da P_1. I punti più vicini a P sono ad una distanza uguale al complemento del raggio dato (def. V, 29), e gli altri due sono alla stessa distanza da P. Variando il piano passante per a', si vede che nel piano Pa vi sono due circonferenze del cilindro, che hanno un raggio complementare al raggio della circonferenza rispetto all'asse a, e di centri P e P_1.

Def. II. I raggi dei cerchi coi centri nei due assi li chiameremo raggi del cilindro rispetto ai due assi.

---

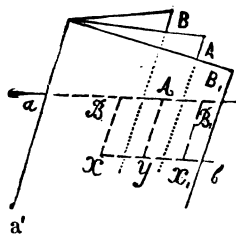
1) Questo cilindro fu trovato da *Clifford* (Math. Papers. London, 1882). Qui noi, avendone bisogno nella seconda parte, ne dimostriamo le proprietà principali per via puramente geometrica ed elementare. Le rette di ugual distanza sono chiamate da *Clifford* rette parallele; noi non abbiamo adottato tale definizione per non recar confusione col nostro criterio del parallelismo, specialmente nel passaggio dal sistema Riemanniano al sistema Euclideo nello spazio a quattro dimensioni.

Teor. II. Il cilindro viene diviso da ogni piano passante per ciascuno dei suoi assi in due parti simmetriche rispetto al piano.

Ogni piano **A** passante per uno degli assi per es. a' è perpendicolare all'altro asse a (teor. III, 100), e indicando con A e A' i punti d'intersezione di questo piano con a, in esso piano sono contenuti due cerchi del cilindro di centri A e A' e di ugual raggio. Immaginiamo due piani **B**, $\mathbf{B}_1$ passanti per a, che facciano angoli uguali col piano **A**. Essi tagliano la retta a in punti B e B_1 equidistanti da **A** (coroll. teor. I, 112). Sia X un punto del cerchio del cilindro sul piano **A** di centro B e di raggio r; e conduciamo da X la perpendicolare b al piano **A**, la quale dovrà passare pei poli di **A** situati in a. Sia Y il piede del segmento normale minimo da X ad **A**, e X_1 il suo punto d'incontro col piano $\mathbf{B}_1$, tale che (XX_1) contenga Y. Il piano ab è normale alla retta a', e la incontra in due punti ZZ'. Gli angoli YZX, YZX_1 misurano gli angoli diedri $(\mathbf{AB})$, $(\mathbf{AB}_1)$ (teor. III, 112), e perciò i triangoli ZXY, ZX_1Y sono uguali per avere il lato ZY comune, $\widehat{XZY} \equiv \widehat{X_1ZY}$ e gli angoli in Y retti (oss. I, 74), dunque

$$(XY) \equiv (X_1Y).$$

Vale a dire il punto X_1 è simmetrico di X rispetto al piano **A**.

Ci resta da dimostrare che X_1 è pure un punto del cerchio del cilindro di centro B_1 nel piano $\mathbf{B}_1$. Infatti i triangoli rettangoli AXY, AX_1Y, sono uguali per avere i due cateti uguali, e quindi $(AX) \equiv (AX_1)$.

Gli angoli BAY, B_1AY sono retti, perchè la retta a è perpendicolare al piano A e perciò ad ogni retta passante pel punto A nel piano (coroll. teor. II, 110), dunque essendo $\widehat{XAY} \equiv \widehat{X_1AY}$ nel medesimo fascio di raggi, si ha $\widehat{BAX} \equiv \widehat{B_1AX_1}$. I due triangoli BAX, B_1AX_1 sono uguali per avere due lati e l'angolo compreso uguali, dunque

$$(BX) \equiv (B_1X_1) \qquad \text{(fig. 98)}.$$

fig. 98

Teor. III. Per ogni punto del cilindro passano due rette situate sul cilindro.

Sono le due rette di ugual distanza che passano pel punto dato da uno o dall'altro asse del cilindro (teor. IV e def. II, 114 e teor. I).

Teor. IV. Una retta non può avere più di due punti (e i due punti opposti) comuni col cilindro senza giacere in esso.

Sia b la retta che abbia tre punti A, B, C non opposti comuni col cilindro. Da A, B, C tiriamo i segmenti normali all'asse a, che sono uguali al raggio del cilindro relativo ad a, la retta b sarebbe quindi una retta di ugual distanza da a (teor. VI, 114) e alla distanza data dal raggio del cilindro, vale a dire la retta b giacerebbe nel cilindro stesso.

Coroll. Le rette del cilindro non possono incontrarsi tutte a due a due, nè tutte le rette di un piano possono appartenere al cilindro.

Difatti, nel primo caso le rette del cilindro o passerebbero per un punto o sarebbero situate in un piano, ciò che non è possibile. Così è escluso il secondo caso.

Teor. V. Ogni piano che passa per una retta del cilindro taglia il ci-

lindro in un'altra retta, e non ha altri punti fuori delle due rette in comune col cilindro.

Sia g la retta del cilindro e π un piano passante per g. Non può essere g incontrata da tutte le rette del cilindro, perchè le rette di esso passanti per un punto fuori di g sarebbero con g in un piano, e tutte le rette di questo piano sarebbero situate sul cilindro (teor. IV), il che è assurdo (coroll. teor. III). Siano dunque B e C i punti d'intersezione di π con due altre rette del cilindro, che non incontrino la retta g. La retta BC incontra la retta g in un punto D, e quindi la retta BC avendo tre punti comuni con la superficie vi giace per intero (teor. IV).

Se fuori delle due rette BC e g il piano avesse un altro punto E in comune colla superficie, ogni retta passante per E, che incontra in due punti le due rette BC e g, sarebbe situata sul cilindro: vale a dire ogni retta del piano apparterrebbe al cilindro, e il piano sarebbe parte del cilindro stesso, ciò che è assurdo (coroll. teor. III).

Teor. VI. Nel cilindro vi sono due sistemi di rette, quelle di uno stesso sistema non si incontrano, mentre una retta di uno qualunque di essi incontra le rette dell'altro sistema.

Difatti siano g ed l le rette che passano per un punto P del cilindro. Il piano che passa per la retta g e per un'altro punto qualunque P_1 del cilindro taglia il cilindro in un'altra retta l_1 che incontra la retta g. Ma la retta l_1 non può incontrare la retta l altrimenti le rette g, l, l_1 sarebbero in un piano, ciò che è impossibile (teor. V).

Così facendo per ogni punto P della superficie si ottengono tutte le rette l di un sistema. I piani passanti per le rette l danno invece le rette dell'altro sistema.

Teor. VII. Una retta che incontra il cilindro in un punto (o nel suo opposto) lo incontra in un altro punto (e nel suo opposto), che può coincidere col primo.

Sia b la retta data, A il punto dato e g una retta del cilindro passante per A. Il piano bg incontra la superficie in un'altra retta l, che incontra b in una coppia di punti opposti B, B', che appartengono al cilindro. Se B coincide con A, ciò significa che la retta b, oltre che essere situata nel piano gl, passa anche pei loro punti d'incontro.

Def. III. Una retta che incontra in due soli punti opposti il cilindro si chiama *tangente* al cilindro in questi punti.

Teor. VIII. Una tangente al cilindro ha con ciascuno degli assi una distanza uguale al raggio del cilindro rispetto all'asse considerato.

Difatti condotta da B la normale all'asse a, questa è normale alle due rette g e l, perchè g e l sono con a rette di ugual distanza (def. II, 114 e teor. III), e quindi la normale da B all'asse a è anche normale al piano gl, e perciò anche alla retta b che passa per B (coroll. teor. II, 110).

Teor. IX. Tutte le tangenti in un punto al cilindro sono situate in un piano, che contiene le due rette del cilindro passanti pel punto dato, ed è perpendicolare alla normale condotta dal punto all'uno e all'altro asse.

Difatti siano g ed l le rette passanti pel punto A. Ogni retta tangente in

A ha per normale la normale p condotta da A all'asse a del cilindro. Ora le normali condotte da A alla retta p sono in un piano (teor. IV, 110, def. V, coroll. II, teor. IV, 108; teor. VIII, 110), il quale contiene anche le due rette g ed l.

Def. IV. Il piano, che contiene tutte le tangenti in un punto al cilindro, si chiama piano *tangente* in questo punto e nel suo opposto.

Teor. X. Due rette sghembe a e b, che non sono rette di ugual distanza, hanno due segmenti normali comuni disuguali.

Difatti scegliamo un punto B di b, e sia A il piede della normale condotta da B ad a. Costruito il cilindro, di asse a e di raggio (AB), la retta b incontrerà il cilindro in un altro punto B' (e nel suo opposto). Il piede della normale condotto da B' ad a sia A' (fig. 94).

Si ha $(AB) \equiv (A'B')$, e inoltre $\widehat{ABB'} \equiv \widehat{A'B'B}$ (teor. VI, 17). La retta che unisce i punti di mezzo dei segmenti (BB'), (AA') è perpendicolare comune ad a e b (teor. VI, 17). L'altra perpendicolare è la retta polare (cor. I, teor. VIII 110).

Oss. IV. Due rette dunque nello spazio completo hanno due segmenti normali comuni e disuguali; o ne hanno infiniti uguali e sono rette di ugual distanza; oppure ne hanno infiniti di uguali ad un retto, e in tal caso sono rette polari.

Se il raggio del cilindro è uguale ad un segmento retto, il cilindro si riduce alla polare dell'asse relativo.

Teor. XI. Due coppie di rette che hanno una medesima distanza sono identiche.

Difatti se (ab), (a_1b_1) sono due coppie di rette, (AB), $(A'B')$, (A_1B_1); $(A'_1B'_1)$ i segmenti normali di essi, si ha per dato $(AB) \equiv (A'B')$. Siccome $(AA') \equiv (BB') \equiv (A_1A'_1) \equiv (B_1B'_1) \equiv \frac{\pi}{2}$, i triangoli ABB', $A_1B_1B'_1$ sono uguali e perciò anche i loro lati (AB'), $(A_1B'_1)$. Così sono uguali (BA') e $(B_1A'_1)$.

I triangoli rettangoli $AB'A'$, $A_1B'_1A'_1$ sono uguali per avere un cateto e l'ipotenusa uguali, quindi $(A'B') \equiv (A'_1B'_1)$. Le due figure ABB_1A_1 $A_1B_1B'_1A'_1$ sono dunque identiche (teor. VII, 17, opp. oss. II, 116).

118. *Oss. I.* Per la superficie sferica e per la sfera valgono le stesse definizioni date nello spazio Euclideo (101), soltanto è da osservare che una superficie sferica di centro C ha anche un altro centro, cioè il punto opposto e quindi anche un altro raggio supplementare al primo, e racchiude due sfere. Però la superficie sferica che ha per raggio un segmento retto è il piano polare del centro, e quindi ogni superficie sferica che non sia un piano è situata tutta da una parte del piano polare dei suoi centri, e dalla parte, s'intende, del raggio minore di un retto.

Come per le circonferenze nel piano completo, possiamo considerare, finché non si dica diversamente, che una superficie sferica abbia un solo centro e un raggio minore di un segmento retto, e quindi determini una sola sfera.

Oss. II. Per le sfere nello spazio completo valgono gli stessi teoremi con le stesse dimostrazioni dati al n. 101 per le sfere nel campo Euclideo.

Teor. I. La sfera ha tutti i suoi punti equidistanti dal piano polare del suo centro.

Difatti tutti i raggi della sfera sono perpendicolari al piano polare del centro (coroll. I, teor. III, 110), e prolungati fino all'incontro con questo piano sono retti, e quindi ogni punto della sfera è distante dal piano polare del centro di un segmento complementare al raggio.

Oss. III. Data una sfera di centro C e di raggio r, essa determina un'altra sfera dello stesso raggio col centro nel punto C' opposto a C, la quale contiene i punti opposti a quelli della prima.

Una retta che incontra in un punto la prima incontra la seconda nel punto opposto; una tangente alla prima in un punto è tangente alla seconda nel punto opposto, un piano tangente alla prima è perciò anche tangente alla seconda. Le due sfere opposte sono situate da parti opposte rispetto ad un loro piano tangente, perchè i loro centri sono situati da parti opposte (coroll. I. teor. IV, 109; teor. V, 101 e oss. II).

Oss. IV. Valgono con le stesse dimostrazioni i teor. I, II, III del n. 96.

§ 11.

Sistemi continui di figure identiche e movimento reale nello spazio completo — Spazî a tre dimensioni limiti assoluti di un punto.

119. *Oss.* Valgono le stesse definizioni dei sistemi continui e gli stessi teoremi dati pei sistemi circolari di figure invariabili nel campo Euclideo (103, 105) eccettuato il sistema parallelo (104).

Soltanto è da osservare che nelle dimostrazioni al piano all'infinito rispetto a un punto si sostituisce il piano polare del punto.

Valgono pure nello spazio completo le proprietà del movimento reale delle figure date nel campo Euclideo (106, 107), eccettuato il movimento di traslazione che equivale nel campo completo ad un movimento di rotazione infinitesima.

Teor. I. Quattro punti del campo limite assoluto di un punto A determinano uno spazio situato tutto nel medesimo campo.

Dati quattro punti X_∞, Y_∞, Z_∞, W_∞, del campo limite assoluto di un punto A, le rette e i piani da essi determinati giacciono in questo campo (teor, I 32, teor. I, 78), e poichè tutte le rette dello spazio $X_\infty Y_\infty Z_\infty W_\infty$ incontrano i piani suddetti, risulta che ognuna di esse è retta limite assoluta del punto A, e perciò ogni punto dello spazio suddetto giace nel campo limite assoluto di A.

§ 12.

Assioma III pratico.

120. *Oss* Finora, pur avendo accompagnati i nostri ragionamenti coll'intuizione spaziale, necessaria per la geometria (def. II, 2 e pref.), ma non necessaria per lo svolgimento logico della geometria stessa, non abbiamo avuto bisogno di dire qual è la figura che corrisponde allo spazio intuitivo dal quale siamo partiti (oss. emp, I) per stabilire i nostri assiomi. Noi possiamo ora dire:

Ass. III. prat. — **Lo spazio intuitivo è una figura a tre dimensioni rispetto ai suoi punti.**

Limitandosi alle grandezze intuitive secondo l'assioma I pratico (28), che è sotto altra forma l'assioma della nota XVI, si ha:

Teor. Nello spazio intuitivo valgono le proprietà dello spazio Euclideo a tre dimensioni.

PARTE SECONDA

LO SPAZIO A QUATTRO E A N DIMENSIONI NELLO SPAZIO GENERALE.

LIBRO III.

LO SPAZIO A QUATTRO DIMENSIONI.

Capitolo I.

Lo spazio Euclideo a quattro dimensioni.

§ 1.

Costruzione della stella di 2ª specie dello spazio a quattro dimensioni. — Prime loro Proprietà.

121. *Def. I.* Sia dato uno spazio a tre dimensioni S_3 e un punto S_0 fuori di esso, o in altre parole che non appartenga ad S_3 (oss. II, 2 e int. *a*, 37). Congiungendo tutti i punti dello spazio S_3 col punto S_0, le rette che così si ottengono, considerate quali elementi, determinano una figura (def. I, 2), che chiameremo *stella di seconda specie*, di cui S_0 è il *centro*, S_3 lo *spazio direttore*.

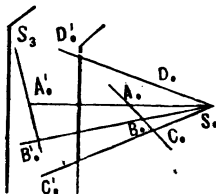



fig. 99

La indicheremo col simbolo $(S_1 S_3)$.

Lo stesso dicasi se in luogo della retta si considera il raggio limitato nel punto S_0 quale elemento (fig. 99).

Oss. I. Dalla definizione stessa si ha che ogni retta della stella, ogni piano ed ogni spazio a tre dimensioni incontrano lo spazio direttore rispettivamente in un punto, in una retta e in un piano.

Es. Diamo il seguente esempio a solo titolo di schiarimento e per rendere dirò così più intuitiva la nostra costruzione della def. I, ma non già come prova dell'esistenza materiale della quarta dimensione o del nostro spazio generale, che noi non ci siamo mai immaginati neppure di discutere, nè come prova della validità della nostra def. I o di quella dello spazio generale (def. II, 2), la quale ha il suo appoggio sul principio *a* del n. 37 dell'introduzione come la def. I, 82.

Immaginiamo che nel piano, esista un ente ragionevole a due dimensioni, il cui mondo non sia che il piano e che colla sua esperienza possa provare soltanto l'esistenza della parte del piano in cui esso può eseguire le sue osservazioni. Per immaginarci meglio questo essere ipotetico, figuriamoci la nostra ombra sopra un piano; ad ogni nostro movimento corrisponde un movimento di essa, e se noi facciamo astrazione dalla nostra persona, ci pare che quell'ombra sia un ente che abbia vita e si muova nel piano.

Supponiamo inoltre che per quest' ombra valgano le stesse nozioni comuni che

abbiamo svolto nel cap. I dell'introduzione, e dotiamo inoltre quest' ombra di sensi coi quali non possa osservare invece che una parte del piano in cui esso si trova; avremo così l'ente supposto [1].

Dato così questo ente, esso non può provare coll'osservazione che una retta può avere un punto comune col suo piano senza che vi giaccia per intero: esso vede che da un punto di una retta del suo piano si può inalzare una sola perpendicolare alla retta che giace nel piano, ma non può provare invece colla sua osservazione che le perpendicolari condotte nello spazio nostro sono infinite e giacciono in un piano perpendicolare alla retta; e così via.

Ma col suo raziocinio esso potrà generarsi il suo piano, e valendo per esso il principio *a* del n. 37 dell'introduzione, nell'identico modo da noi adoperato e per analogia potrà colla sua ragione immaginarsi che fuori del piano esista un punto. *Posto ciò*, assoggettando tutti i punti agli stessi assiomi da noi dati e che valgono anche per esso, l'essere suddetto giungerà alla stessa nostra costruzione dello spazio a tre dimensioni. Per esso la geometria a tre dimensioni sarebbe puramente ideale, ma matematicamente vera. Quell'ente potrà utilizzare le proprietà delle figure del nostro spazio per dimostrare proprietà delle figure del suo piano, che trattate direttamente cogli elementi del piano sono meno facili ad essere dimostrate, come spesso noi stessi facciamo. Ed anche indipendentemente da ciò, la geometria a tre dimensioni avrà logicamente per quell'ente lo stesso diritto di esistenza della geometria del suo piano.

Mettiamoci ora noi al posto di quell'essere rispetto all'ambiente delle nostre osservazioni. Noi possiamo logicamente supporre che fuori del nostro spazio vi sia un altro punto, senza che questa ipotesi conduca da sola allo spazio a quattro dimensioni; assoggettando poi questo punto agli assiomi già dati noi ricaviamo tosto l'esistenza ideale dello spazio a quattro dimensioni (def. II), in cui è compreso lo spazio ordinario; nello stesso modo che il piano dell'ente suddetto è compreso nello spazio comune.

Teor. I. Due rette (o due raggi) di una stella di 2ª specie determinano un fascio appartenente alla stella. Tre raggi non appartenenti ad un fascio determinano una stella di 1ª specie appartenente alla stella data.

Difatti due punti in cui le due rette date incontrano lo spazio S_3 (oss. I) determinano una retta r che giace in S_3 (teor. II, 82), i cui punti congiunti con S_0 danno il fascio della stella determinata dalle due rette; e siccome ogni retta del fascio è determinata dal punto S_0 con un punto della retta r (se è parallela la incontra all'infinito) la prima parte del teorema è dimostrata (fig. 99).

Analogamente, i tre punti d'incontro dei tre raggi dati con S_3 determinano un piano che giace tutto in S_3 (teor. III, 82), i cui punti congiunti con S_0 danno una stella di 1ª specie (def. I, 82), appartenente alla stella (S_0 S_3). E poichè ogni retta della stella di 1ª specie incontra il piano direttore (oss. I, 82), essa appartiene allo spazio S_3, e la seconda parte è pure dimostrata.

Oss. II. D'ora innanzi faremo uso anche delle definizioni date al n. 110 dell'int. sulle forme a più dimensioni.

Da ciò si deduce tosto che la stella di 2ª specie è a tre dimensioni rispetto alle sue rette o ai suoi raggi, perchè lo spazio direttore è a tre dimensioni.

Def. II. Se nella stella di 2ª specie si considera il punto come elemento,

---

1) In una breve nota a pag. 28 della Memoria. «Saggio d'interpretazione della geometria non Euclidea» *Beltrami* ricorre a un essere le cui osservazioni non eccedano il campo a due dimensioni, come le nostre non eccedono quello a tre. Di questi esseri ipotetici si è servito poi anche *Helmoltz* nelle sue Populäre Vorles ungen, per scopi diversi dal nostro. (vedi append.).

la figura risultante è a quattro dimensioni rispetto al punto, quale elemento. Chiameremo questa figura *spazio a quattro dimensioni.*

Lo indicheremo con una lettera accompagnata dalla cifra 4, per es. S_4.

Def. III. Ogni piano di S_3 e il punto S_0 individuano uno spazio a tre dimensioni (def. IV, 82). Diremo per maggiore chiarezza che il piano *congiunto* col punto S_0 fuori di esso determinano uno spazio a tre dimensioni, che *passa* pel punto e pel piano.

Oss. III. I primi elementi dello spazio a quattro dimensioni sono dunque il punto, la retta, il piano e lo spazio a tre dimensioni, che chiameremo perciò elementi fondamentali, e che indicheremo rispettivamente con lettere aventi al piede un indice uguale al numero delle dimensioni di essi rispetto ai loro punti; vale a dire li indicheremo ad es. rispettivamente coi simboli S_0, S_1, S_2, S_3.

Quando parleremo di spazio soltanto intenderemo quello a tre dimensioni.

Teor. II. Una retta che ha due punti comuni con lo spazio a quattro dimensioni vi giace interamente.

Se A_0, B_0 sono i punti che la retta ha in comune con lo spazio S_4 (fig. 99), le due rette S_0A_0, S_0B_0 sono contenute in S_4, e incontrano lo spazio generatore S_3 in due punti A'_0, B'_0 la cui retta congiungente giace in S_3 (oss. I; teor. II, 82). Ma il piano $S_0A'_0B'_0$ è situato nello spazio S_4, mentre la retta A_0B_0 giace nel piano $S_0A'_0B'_0$ (oss. I e teor. IV, 46); dunque il teorema è dimostrato.

Teor. III. Un piano che ha tre punti indipendenti comuni con lo spazio a quattro dimensioni vi giace per intero.

Siano infatti A_0, B_0, C_0 i tre punti (fig. 99). Per la proprietà precedente le rette A_0B_0, A_0C_0, B_0C_0 appartengono allo spazio S_4. Una retta qualunque del piano incontra le due rette A_0B_0, B_0C_0 in due punti che giacciono in S_4, e quindi tutte le rette del piano dato appartengono allo spazio S_4 (teor. II), dunque anche il piano (def. I, 2, opp. int. def. IV, 13).

Teor. IV. Se uno spazio ha quattro punti non situati in un piano con lo spazio S_4, esso giace interamente in esso.

Difatti se A_0, B_0, C_0, D_0 sono i quattro punti indipendenti (def. I, 115) che uno spazio R_3 ha in comune con lo spazio S_4, le rette e i piani determinati dai quattro punti giacciono in S_4 (teor. II e III), e quindi ogni retta di R_3 incontrando ciascun piano del tetraedro $A_0B_0C_0D_0$ (teor. I, 83), è situato tutta in S_4 (teor. II), ed il teorema è dimostrato (fig. 99).

Teor. V. Lo spazio a quattro dimensioni (S_0S_3) *può essere generato da uno spazio S'_3 e da un punto S'_0 qualunque di esso, purchè il punto giaccia fuori di S'_3.*

Gli spazi (S_0S_3); (S'_0S_3) coincidono, perchè ogni retta che congiunge un punto di S_3 con S'_0 giace nello spazio (S_0S_3) (teor. II), e perciò ogni punto di (S'_0S_3) è un punto dello spazio (S_0S_3). E inversamente, S_0 è un punto dello spazio (S'_0S_3), perchè la retta $S_0S'_0$ incontra lo spazio S_3 in un punto P_0, essendo S'_0 un punto dello spazio (S_0S_3) (oss. I). Dato un punto qualunque R_0 di (S_0S_3), la retta S_0R_0 incontra S_3 in un punto R'_0, che può essere all'infinito (oss. I).

La retta S'_0R_0 nel piano $S_0S'_0R'_0$ incontra la retta P_0R_0 in un punto (coroll. II, teor. III, 46), dunque R_0 è un punto dello spazio (S'_0S_3), vale a dire ogni punto di (S_0S_3) appartiene a (S'_0S_3).

Lo stesso accade degli spazî (S_0S_3) $(S_0S'_3)$. Difatti se A_0, B_0, C_0, D_0 sono quattro punti non situati in un piano di S'_3, le quattro rette S_0A_0, S_0B_0, S_0C_0, S_0D_0 incontrano lo spazio S_3 in quattro punti $A'_0B'_0C'_0D'_0$, perchè $A_0B_0C_0D_0$ giacciono in (S_0S_3) come S'_3 (oss. I), e perciò lo spazio S_3 è contenuto nello spazio $(S_0S'_3)$ (teor. IV), ed ogni retta che congiunge S_0 con un punto di S_3 è situata tutta nello spazio $(S_0S'_3)$ (teor. II). Si conclude che coincidono anche gli spazî $(S_0S'_3)$, $(S'_0S'_3)$, e quindi anche (S_0S_3), $(S'_0S'_3)$.

Coroll. Cinque punti indipendenti determinano un solo spazio a quattro dimensioni, il quale viene determinato da cinque qualunque dei suoi punti indipendenti [1]).

§ 2.

Intersezioni di rette, piani e spazî a tre dimensioni. Fascio di spazî.

122. *Teor. I. Una retta ed un piano dello spazio S_4 non si incontrano, e se si incontrano sono situati in uno spazio a tre dimensioni.*

Si considerino infatti cinque punti A_0, B_0, C_0, D_0, E_0 non situati in uno spazio S_3 dello spazio S_4; la retta di due di essi non incontra il piano determinato dagli altri tre, perchè altrimenti i cinque punti sarebbero situati in uno spazio a tre dimensioni determinato dal punto comune, da due punti del piano e da un altro punto della retta (coroll. teor. IV, teor. II, III, 82).

Teor. II. Una retta ed uno spazio a tre dimensioni dello spazio S_4 si incontrano in un punto, se la retta non giace nello spazio.

Siano infatti S_3 ed S_1 lo spazio e la retta dati (fig. 100). Su questa consideriamo un punto S_0 non situato nello spazio S_3, ciò è sempre possibile perchè supponiamo che la retta per ipotesi giaccia fuori dello spazio S_3 (int. def. VI, 13). Lo spazio S_4 può essere generato dal punto S_0 e dallo spazio S_3, ma tutte le rette passanti per S_0 in S_4 si ottengono congiungendo i punti di S_3 con S_0 (teor. V, oss. I, 121), e perciò la retta S_1 incontra lo spazio S_3 in un punto X_0.

fig. 100

Teor. III. Un piano S_2 e uno spazio a tre dimensioni dello spazio S_4 si incontrano in una retta.

Si può dimostrare in modo analogo al precedente, oppure in quest'altro modo (fig. 100).

Siano S_3 ed S_2 lo spazio ed il piano dati. Ogni retta di S_2 incontra S_3 in un punto; quindi la figura comune a S_2 e S_3 ha in S_2 un solo punto comune con ogni retta di S_2; essa è dunque una retta (teor. VI, 48).

---

1) Come si vede le dimostrazioni di queste prime proprietà sono analoghe a quelle date al n. 82 per lo spazio a tre dimensioni; così è di molte proprietà che incontreremo in seguito, parecchie delle quali, come ad es. quelle del teor. II e del teor. V, si ottengono da quelle dello spazio a tre dimensioni scambiando alcuni enti fondamentali fra loro. Abbiamo dato per disteso queste dimostrazioni dapprincipio per farne meglio risaltare il confronto con quelle date nello spazio a tre dimensioni e il carattere puramente geometrico di esse.

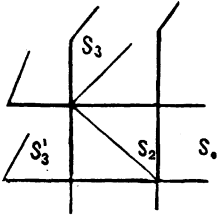
Teor. IV. Due spazi a tre dimensioni dello spazio S_4 si incontrano in un piano.

Questo teorema si dimostra in modo analogo ai due precedenti considerando un punto S_0 in uno dei due spazi, ma non compreso nell'altro. Oppure anche osservando che ogni retta dell'uno incontra in un solo punto l'altro, e quindi la figura comune è un piano (teor. VII, 84) (fig. 101).

fig. 101

Teor. V. Tre spazi a tre dimensioni, che non hanno in comune un piano, hanno in comune una retta, e quattro spazi un solo punto.

Difatti se S_3, S'_3, S''_3 sono i tre spazi, il piano comune a due di essi incontra il terzo in una retta comune a tutti e tre (teor. III).

Analogamente si vede che quattro spazî a tre dimensioni in generale si incontrano in un punto teor. II).

Oss. I. Tre spazî (oss. III, 121) possono avere anche un piano comune, e quattro spazî un piano o una retta.

Teor. VI. Due piani dello spazio S_4 si incontrano in un punto; se si incontrano in una retta giacciono in uno spazio S_3.

Siano dati i due piani S_2, S'_2 (fig. 102). Facciamo passare per uno di essi, per es. per S_2, uno spazio S_3. Il piano S'_2 incontra questo spazio in una retta X_1, la quale incontra il piano S_2 in un punto X_0 che è comune ai due piani (teor. I, 83).

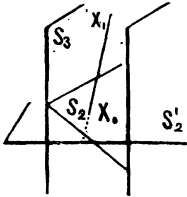



fig. 102

Se invece i due piani S_2, S'_2 avessero due punti comuni, e per conseguenza la retta che li congiunge, (teor. IV, 46), allora sarebbero situati nello spazio a tre dimensioni determinato dalla retta comune e da altri due punti scelti rispettivamente sui due piani S_2, S'_2 (teor. III, 82).

Teor. VII. Tutti i piani dello spazio S_4 passanti per una retta si ottengono congiungendo la retta con tutti i punti di un piano che non la incontra. Essi formano un sistema a due dimensioni, e contengono tutti i punti dello spazio S_4.

Siano S_1 ed S_2 una retta e un piano che non si incontrano (fig. 103). Ogni punto A_0 di S_2 dà uno ed un solo piano passante per S_1. Difatti se due punti A_0, B_0 fossero situati in un medesimo piano colla retta S_1, la retta S_1 incontrerebbe il piano S_2 nel suo punto d'intersezione colla retta A_0B_0, ciò che è contrario al dato. Per conseguenza, congiungendo i punti di S_2 con la retta S_1 mediante dei piani, questi costituiscono un sistema a due dimensioni di piani, poichè tale è anche il piano rispetto ai suoi punti (def. II, 46).

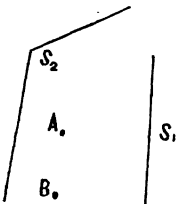



fig. 103

Se si considera un altro piano S'_2, il sistema a due dimensioni di asse S_1, che esso determina nel modo indicato, coincide con quello determinato da S_2, perchè tutti i piani che incontrano S_2 in un punto incontrano in un punto anche S'_2, e inversamente (teor. VI).

Def. I. La retta S_1 la chiameremo *asse* del sistema.

Teor. VIII. Tutti gli spazi a tre dimensioni dello spazio S_4 passanti per un piano si ottengono congiungendo il piano coi punti di una retta, che non lo incontra. Essi formano un sistema ad una dimensione, e contengono tutti i punti dello spazio S_4.

Ogni punto della retta S_1 congiunto con S_2 dà uno spazio a tre dimensioni passante per S_2, e anche in questo caso due punti di S_1 non possono dare lo stesso spazio a tre dimensioni passante per S_2, perchè altrimenti la retta giacerebbe in esso, contrariamente al dato (fig. 103).

Il sistema di spazî a tre dimensioni passanti pel piano S_2 così ottenuto è ad una dimensione, perchè tale è anche la retta S_1 rispetto ai suoi punti.

Def. II Questo sistema si chiama *fascio di spazî a tre dimensioni*, di cui il piano S_2 è *l' asse.*

Teor. IX. Esiste una sola retta che incontra tre rette date S'_1, S''_1, S'''_1, non situate in uno spazio S_3.

Le tre rette due a due determinano tre spazi S'_3, S''_3, S'''_3, i quali si incontrano nella trasversale comune. Infatti lo spazio $S'_1S''_1$, ossia S''_3, incontra la terza retta S'''_1 in un punto, che è comune ai tre spazi S_3. Conducendo quindi da questo punto la trasversale alla retta $S'_1S''_1$ in S''_3 (teor. V, 83), si ha la trasversale richiesta, che è comune ai tre spazî S_3.

Teor. X. Dati due piani non situati in uno spazio S_3 e un punto fuori di essi, vi è un solo piano che passa pel punto e incontra ciascuno dei due piani in una retta.

Basta unire il punto coi due piani per mezzo di due spazî a tre dimensioni, i quali si incontrano in un piano, che incontra ciascun dei due dati in una retta (teor. III, 83).

Teor. XI. Dati tre piani e un punto indipendenti, vi è una sola retta che passa pel punto e incontra i tre piani.

Si congiunga il punto coi tre piani, si ottengono tre spazî a tre dimensioni che hanno in comune la retta del teorema (teor. V).

Teor. XII. Dati quattro piani, vi sono infinite rette che incontrano i quattro piani, delle quali una sola passa per un punto di ciascuno di essi, eccettuati i sei punti d' intersezione dei quattro piani. Le rette passanti per ciascuno di questi punti giacciono in un piano.

Si dimostra facilmente coll'aiuto dei teor. XI e IV.

Oss. II. Quando parliamo di una figura dello spazio intendiamo che i suoi punti appartengano allo spazio, senza che tutti i punti di questo appartengano alla figura data.

Teor. XIII. Se una figura contenuta nello spazio S_4 viene incontrata da ogni retta di esso in un punto, essa è uno spazio a tre dimensioni.

Infatti due punti A_0B_0 della figura determinano una retta appartenente per dato alla figura. In una retta dello spazio S_4, che non incontra la retta A_0B_0, deve esservi un punto C_0 appartenente a quella figura, e quindi una retta che passa per C_0 e si appoggia sulla A_0B_0 fa parte di essa, e perciò anche il piano $A_0B_0C_0$. Se si considera un' altra retta dello spazio, che non incontra questo piano, su essa deve trovarsi un altro punto D_0 della figura e quin-

di lo spazio a tre dimensioni $A_0B_0C_0D_0$ giace anche esso nella figura. Dico che fuori di questo spazio non vi sono altri punti della figura data. Difatti se ve ne fosse uno, per es. X_0, questo e lo spazio $A_0B_0C_0D_0$ determinerebbero lo spazio S_4 (teor. V, 121), dunque la figura sarebbe l'intero spazio S_4, ciò che è contrario al dato.

Coroll. Se una figura dello spazio S_4 ha con tutti i piani o con tutti gli spazî a tre dimensioni di esso una retta o un piano in comune, essa è uno spazio a tre dimensioni.

Difatti da ciò risulta che ogni retta ha un solo punto comune con la figura data.

Teor. XIV. Se una figura formata da piani è tale che i suoi piani si incontrano a due a due in una retta senza passare per uno stesso punto o per una stessa retta, essa è uno spazio a tre dimensioni o giace in uno di questi spazî.

Dim. analoga a quella del teor. VIII, 85 (teor. VI).

§ 3.

Spazio all'infinito — Rette, piani e spazî paralleli dello spazio S_4. Loro costruzione con elementi del campo finito.

123. *Teor. I. Il campo limite assoluto dello spazio S_4 intorno ad ogni suo punto è uno spazio S_3 completo, che si può ritenere quale spazio limite assoluto di un punto qualunque del campo finito rispetto all'unità di questo campo.*

Si possono considerare nello spazio S_4 quattro raggi passanti per il punto A_0, che non siano situati in uno spazio S_3, e quindi i loro quattro punti limiti assoluti (def. II, 32) non sono situati in un piano: essi determinano uno spazio a tre dimensioni $\pi_{3\infty}$ che è nel campo limite assoluto di A_0 (teor. I, 119).

Le rette del tetraedro determinato dai quattro punti all'infinito sono situate nello spazio S_4, cioè nei piani dei quattro raggi suddetti (oss. IV, 68), e quindi sono situate in S_4 tutte le rette che incontrano due di esse e perciò anche tutti i piani del tetraedro (teor. I, 84); così pure tutte le rette che incontrano due di questi piani, che sono precisamente quelle dello spazio $\pi_{3\infty}$. La seconda parte deriva dal teor. IV, 32.

Coroll. Si può ritenere che il campo all'infinito dello spazio S_4 rispetto all'unità Euclidea sia uno spazio a tre dimensioni.

Dim. analoga a quella del coroll. del teor. I, 84.

Def. I. Chiameremo un tale spazio, *spazio all'infinito dello spazio S_4* rispetto all'unità Euclidea (oss. 31).

Oss. I. Vale l'oss. analoga all'oss. I del n. 84.

124. *Oss. I.* Le definizioni del parallelismo di due rette, di una retta e di un piano e di due piani dati al n. 26 e al n. 85 valgono anche per lo spazio S_4. Si vede adunque che una retta e un piano, o due piani paralleli dello spazio S_4 sono situati in uno spazio S_3. Sussistono dunque per essi nello spazio S_4 i teoremi già dimostrati nel piano e nello spazio S_3.

Def. II. Una retta, o un piano, ed uno spazio sono *paralleli* quando il punto all'infinito della retta, o la retta all'infinito del piano, sono situati nel piano all'infinito dello spazio.

Def. II. Due spazî a tre dimensioni sono *paralleli* quando hanno il medesimo piano all'infinito.

Teor. I. In uno spazio S_3 parallelo ad una retta vi sono infinite parallele ad una retta data.

Dim. analoga a quella del teor. I, 85.

Teor. II. Da un punto fuori di uno spazio a tre dimensioni si possono condurre infinite rette parallele ad esso, che sono situate nello spazio parallelo al primo.

Dim. analoga a quella del teor. II, 85.

Teor. III. Data una retta e un piano che non si incontrano, per la retta passa un solo spazio a tre dimensioni parallelo al piano, e reciprocamente.

Difatti il punto all'infinito della retta e la retta all'infinito del piano determinano il piano all'infinito degli spazî a tre dimensioni paralleli alla retta e al piano, dei quali uno solo passa per la retta e uno pel piano (def. I).

Teor. IV. Per un punto fuori di una retta e di un piano si può condurre uno solo spazio a tre dimensioni parallelo ad entrambi.

È lo spazio determinato dal punto col piano dato dal punto all'infinito della retta e dalla retta all'infinito del piano.

Teor. V. Due spazî a tre dimensioni paralleli vengono intersecati da un piano, non parallelo ad essi, in due rette parallele.

Difatti il piano interseca i due spazî in due rette che hanno il medesimo punto all'infinito, cioè il punto d'intersezione del piano col piano all'infinito dei due spazî.

Coroll. I. Se una retta è parallela ad uno spazio a tre dimensioni, ogni piano passante per essa, non parallelo allo spazio, taglia lo spazio in una retta parallela alla data.

Coroll. II. Se una retta è parallela ad un piano, ogni spazio a tre dimensioni passante per essa, non parallelo al piano, taglia il piano in una retta parallela alla prima.

Teor. VI. Se un piano e uno spazio a tre dimensioni sono paralleli, sono intersecati rispettivamente da uno spazio qualunque a tre dimensioni, non parallelo ad essi, in una retta e in un piano paralleli.

Infatti il punto d'incontro del secondo spazio colla retta all'infinito comune al piano e allo spazio dati è precisamente comune alla retta e al piano d'intersezione di esso col piano e col primo spazio.

Coroll. I. Se un piano è parallelo ad uno spazio a tre dimensioni, ogni spazio a tre dimensioni passante pel piano, e non parallelo al primo spazio, incontra questo spazio in un piano parallelo al dato.

Teor. VII. Due rette parallele incontrano due spazî paralleli a tre dimensioni, e non paralleli ad esse, nei vertici di un parallelogrammo.

Dim. analoga a quella del teor. IV, 85.

Teor. VIII. Due piani paralleli sono tagliati da uno spazio a tre dimensioni, non perallelo ad essi, in due rette parallele.

Difatti le due rette d'intersezione hanno un punto all'infinito, il punto di intersezione dello spazio dato colla retta all'infinito dei due piani.

Teor. IX. Se due rette sono parallele, due spazî a tre dimensioni che

passano rispettivamente per esse, e non sono paralleli, si incontrano in un piano parallelo alle rette date.

Difatti la retta all'infinito del loro piano comune contiene il punto comune alle due rette date.

Oss. II. **In modo analogo si dimostrano questi altri teoremi:**

Teor. X. Se due rette sono parallele, un piano e uno spazio a tre dimensioni che passano rispettivamente per esse, e non sono paralleli, si incontrano in una retta parallela alle rette date (teor. III, 122).

Teor. XI. Se una retta e un piano sono paralleli, un piano e uno spazio a tre dimensioni non paralleli, passanti rispettivamente per la retta e pel piano, si incontrano in una retta parallela alla retta e al piano dato (teor. III, 122).

Teor. XII. Se due piani sono paralleli, due spazi a tre dimensioni passanti rispettivamente per essi, e non paralleli, si incontrano in un piano parallelo ai due piani (teor. IV, 122).

125. *Oss. I.* **Due piani sono paralleli secondo la def. II del n. 85 quando hanno la stessa retta all'infinito. In tal caso però sono situati in uno spazio a tre dimensioni (teor. VI, 122). Ma se due piani sono indipendenti in S_4, essi si incontrano in un solo punto che in generale é situato nel campo finito (teor. VI, 122 coroll. teor. I, 123).**

Def. I. Due piani che non hanno una retta comune si dicono *paralleli di 2ª specie* quando il loro punto comune è all'infinito. Chiameremo perciò i piani paralleli secondo la def. II, 85 *paralleli di 1ª specie* o *paralleli* soltanto.

Oss. II. **In ciascuno di due piani paralleli di 2ª specie vi è una sola direzione di rette parallele all'altro piano.**

Coroll. Se un piano e una retta sono paralleli, tutti i piani passanti per la retta sono paralleli di 2ª specie al piano dato.

Oss. III. **Dato un piano e uno spazio a tre dimensioni che non contiene il piano, nello spazio vi è un sistema di piani paralleli di 2ª specie al piano dato, il sistema cioè di tutti i piani contenuti nello spazio, e che passano pel punto dove il piano all' infinito dello spazio incontra la retta all'infinito del piano dato.**

Teor. I. Dati due piani non paralleli di 1ª specie, che si incontrano o non in una retta, e una retta che non è in uno spazio a tre dimensioni con ciascuno di essi, vi è un solo piano che passa per la retta ed è parallelo di 2ª specie ai piani dati.

Se i due piani dati sono paralleli di 1ª specie, per la retta passano infiniti piani paralleli di 2ª specie ai primi due.

Difatti pel punto all'infinito della retta passa una sola retta che incontra le rette all'infinito dei due piani (teor. II, 30, teor. I, 123 e teor. I, 68; teor. V, 83 e oss. V, 107).

Dopo ciò, l'altro caso è evidente.

Teor. II. Per un punto fuori di due piani paralleli di 2ª specie passa uno spazio parallelo ad essi.

È lo spazio che congiunge il punto colle rette all'infinito dei due piani (def. I).

Teor. III. Per un punto fuori di due piani paralleli di 2ª specie passa una sola retta parallela ad essi,

È la retta che passa pel punto dato e pel punto all'infinito comune ai due piani.

126. *Costruzione di enti paralleli con elementi del campo finito.*

a) Spazio parallelo ad un altro spazio da un punto fuori dello spazio dato.

Basta condurre pel punto tre rette parallele a tre rette non situate in un piano dello spazio dato (oss. III, 60); queste tre parallele determinano lo spazio richiesto.

b) Spazio parallelo ad un piano passante per una retta che non incontra il piano.

Basta da un punto della retta condurre il piano parallelo al dato come nello spazio a tre dimensioni (oss. II, 85).

c) Spazio parallelo ad una retta, passante per un piano che non incontra la retta data.

Per un punto del piano si conduca la parallela alla retta data, la quale col piano determina lo spazio domandato.

d) Spazio passante per un punto e parallelo ad una retta e ad un piano.

Basta condurre dal punto la parallela alla retta e il piano parallelo al piano dato, come nello spazio a tre dimensioni (oss. II, 85). La retta e il piano suddetto determinano lo spazio richiesto.

e) Piano parallelo di 2ª specie a due piani dati, e che passa per una retta.

Per la retta si conducano gli spazî paralleli ai due piani (*b*), i quali si intersecano nel piano richiesto (teor. I, 125).

f) Spazio parallelo per un punto a due piani paralleli di 2ª specie.

Basta condurre per il punto i piani paralleli di 1ª specie ai piani dati che sono appunto situati nello spazio richiesto (oss. II, 85).

g) Retta parallela a due piani paralleli di 2ª specie passante per un punto.

Siccome i due piani paralleli sono di 2ª specie, il loro punto all'infinito deve essere determinato da una retta; quindi basterà per il punto condurre la parallela a questa retta (oss. III, 60).

§ 4.

Identità dello spazio S_4 intorno ai suoi punti del campo finito e infinito — Parti in cui S_4 viene diviso da un suo spazio a due dimensioni.

127. *Teor. I. Lo spazio S_4 è identico intorno ad ogni suo punto del campo finito.*

Dim. analoga al teor. I, 86.

Teor. II. Le stelle dello spazio aventi i loro centri nel campo finito sopra un piano vengono divise da questo piano in due parti identiche, che giacciono nelle stesse due parti dello spazio.

Uno spazio A_3 della stella di centro A_0 ha un piano $\alpha_{2\infty}$ all'infinito, il quale divide lo spazio $\pi_{3\infty}$ in due parti identiche (coroll. I, teor. III, 109), e si sa pure che due punti opposti $X_{0\infty}$, $X'_{0\infty}$ sono situati da parti opposte di $\alpha_{2\infty}$, e che ogni retta $\beta_{1\infty}$ e ogni altro piano $\beta_{2\infty}$ sono situati per metà nelle parti opposte rispetto al piano $\alpha_{2\infty}$ (teor. IV, V, 109).

Congiungendo con A_0 le parti $\pi'_{3\infty}$, $\pi''_{3\infty}$ dello spazio $\pi_{3\infty}$ opposte al piano $\alpha_{2\infty}$, le due parti $(A_0\pi'_{3\infty})$, $(A_0\pi''_{3\infty})$ della stella di centro A_0 in S_4 sono identiche per l'identità di $\pi'_{3\infty}$ e $\pi'_{3\infty}$ e per essere uguali le distanze da A_0 dai punti di $\pi'_{3\infty}$, $\pi''_{3\infty}$ (fig. 104).

Queste due parti della stella di centro A_0 determinano due parti dello spazio.

Sia ora B_0 un altro punto dello spazio A_3. Scelto un raggio ad arbitrio A_0X_0 della parte $(A_0\pi'_{3\infty})$, dimostriamo che ogni punto X_0 di esso giace nella parte $(B_0\pi_{3\infty})$. Difatti il piano $A_0X_0B_0$, ossia β_2, viene tagliato dalla retta A_0B_0 in due parti, una delle quali è situata nella parte $(A_0\pi'_{3\infty})$, perchè ha una semiretta all'infinito $b'_{1\infty}$ avente per estremi i due punti all'infinito di A_0B_0 e situata in $\pi'_{3\infty}$ (fig. 104).

fig. 104

Il punto all'infinito del raggio B_0X_0 è situato in $b'_{1\infty}$ (teor. II, 50), e quindi giace nella parte $(B_0\pi'_{3\infty})$ della stella di centro B_0. Coincidendo le due parti $(A_0\pi'_{3\infty})$, $(B_0\pi'_{3\infty})$, coincidono anche le parti opposte, ed il teorema è dimostrato.

Def. I. Queste parti si chiamano le parti dello spazio S_4 *opposte* allo spazio A_3.

Coroll. I. Le parti in cui lo spazio S_4 viene diviso da uno spazio S_3 sono identiche.

Ognuna di queste parti si ottiene congiungendo i punti di una delle metà dello spazio $\pi_{3\infty}$ determinate dal piano all'infinito di A_3 con un punto qualunque del campo finito di A_3 stesso (coroll. teor. III, 109 e def. I, 123).

Teor. III. Una retta, un piano ed uno spazio paralleli ad uno spazio a tre dimensioni giacciono dalla stessa parte di questo spazio.

Nel piano β_2 sia data una parallela alla retta A_0B_0 (fig. 104). Essa è situata tutta da una parte della retta A_0B_0 (teor. I, 50), e siccome le parti del piano β_2 separate dalla retta A_0B_0 appartengono alle due parti della stella di centro A_0 rispetto allo spazio A_3, il teorema è nella sua prima parte dimostrato. Ed è dimostrata pure la seconda parte, perchè le rette di ogni piano o di ogni spazio S_3 parallelo ad uno spazio dato a tre dimensioni sono ad esso parallele, e devono quindi giacere tutte dalla stessa parte di questo spazio. Difatti se due punti del piano e dello spazio fossero da parti opposte di S_3, per quanto sopra si è detto, la loro retta congiungente non sarebbe parallela ad S_3.

Teor. IV. Le due parti di un piano (o di uno spazio) in cui esso viene diviso dalla retta (o dal piano) d'intersezione con uno spazio S_3, non parallelo al piano (o allo spazio), giacciono nelle parti dello spazio S_4 opposte allo spazio S_3.

La dim. di questo teorema è analoga a quella del teor. IV, 86.

Coroll. I. Le parti di una retta, determinate su di essa dal suo punto d'incontro con uno spazio S_3 non parallelo alla retta, giacciono nelle parti di S_4 opposte allo spazio S_3.

Coroll. II. Se due punti giacciono da parti opposte rispetto ad uno spazio S_3, il segmento che li congiunge incontra lo spazio S_3.

Dim. analoghe a quelle dei coroll. I e II del teor. IV, 86 [1]).

1) Dando un'occhiata alle proprietà fin qui svolte, il lettore si persuaderà ancora meglio di quanto abbiamo detto nella nota del n. 121.

§ 5.

Rette, piani e spazî perpendicolari.

128. *Oss.* Lo spazio $\pi_{3\infty}$ all'infinito di S_4 è uno spazio a tre dimensioni completo (coroll. teor. I e def. I, 123).

Le definizioni già date dell'ortogonalità di due rette. di una retta e di un piano e di due piani (def. V, 40, def. I, III, 87) valgono anche nello spazio a quattro dimensioni [1]).

Teor. I. La retta all'infinito di un piano perpendicolare ad una retta è sul piano polare del punto all'infinito della retta; e inversamente.

Difatti essendo retto il segmento normale del punto all'infinito della retta dalla retta all'infinito del piano, il punto è il polo della retta nel piano da essi determinato (teor. I, 73), e quindi la retta è situata nel piano polare del punto (teor. I e def. I, 108); e inversamente (teor. VI e I, 69 e oss.).

Coroll. Una retta perpendicolare ad un piano riesce perpendicolare a tutte le rette del piano.

Difatti il punto all'infinito di ogni retta del piano è coniugato al punto all'infinito della retta (def I, 69 e def. V, 40).

Def. I. Una retta e uno spazio a tre dimensioni sono *perpendicolari* se il segmento normale del punto all'infinito della retta al piano all'infinito dello spazio è retto (def. II, 111).

Def. II. Un piano e uno spazio a tre dimensioni sono *perpendicolari* quando i segmenti normali della retta all'infinito del piano e del piano all'infinito dello spazio sono retti (def. IV, 111).

Def. III. Due spazî a tre dimensioni sono *perpendicolari* quando i segmenti normali dei loro piani all'infinito sono retti (def. III, 111).

Teor. II. Il punto all'infinito di una retta perpendicolare ad uno spazio S_3 è il polo del piano all'infinito dello spazio S_3; e inversamente.

Poichè la distanza del punto al piano è un segmento retto, il piano è polare del punto nello spazio $\pi_{3\infty}$ (teor. I, 111); e inversamente (teor. I, 108; coroll. I, teor. III, 110 e oss.).

Def. IV. Il punto d'intersezione di una perpendicolare ad uno spazio S_3 collo spazio stesso si chiama *piede* della perpendicolare.

Coroll. I. Tutte le rette parallele ad una retta perpendicolare ad uno spazio S_3 sono perpendicolari al medesimo spazio.

Perchè hanno lo stesso punto all'infinito.

Coroll. II. Tutte le perpendicolari ad uno spazio S_3 sono parallele fra loro.

Perchè hanno lo stesso punto all'infinito.

Coroll. III. Tutti gli spazi a tre dimensioni, paralleli ad uno spazio S_3 perpendicolare ad una retta, sono essi pure perpendicolari alla retta.

Difatti il loro piano all'infinito è il piano polare del punto all'infinito della retta.

---

1) Vedi nota, 87.

Coroll. IV. Tutti gli spazî perpendicolari ad una retta sono paralleli.

Perchè hanno lo stesso piano all'infinito.

Coroll. V. Una retta perpendicolare ad uno spazio a tre dimensioni è perpendicolare a tutte le rette e a tutti i piani dello spazio dato.

Difatti i punti del piano all'infinito dello spazio S_3 sono coniugati al polo di esso (teor. I, 108 e def. I, 69), che è il punto all'infinito della retta, e quindi la retta data e una retta qualunque dello spazio S_3 sono ad angolo retto (def. V, 40). La seconda parte del corollario è immediata conseguenza della prima (teor. I, 87 e oss.).

Coroll. VI. Per un punto passa un solo spazio a tre dimensioni perpendicolare ad una retta data.

Basta congiungere il punto col piano polare del punto all'infinito della retta data.

Coroll. VII. Tutte le perpendicolari condotte da un punto ad una retta sono situate in uno spazio a tre dimensioni (def. V, 40 e teor. I, 108).

Coroll. VIII. Per un punto passa una sola retta perpendicolare ad uno spazio S_3.

La retta cioè che congiunge il punto dato col polo del piano all'infinito dello spazio.

Def. V. Il punto d'incontro della normale condotta da un punto ad uno spazio si chiama *piede* di essa.

129. *Teor. I. Le rette all'infinito di due piani non situati in uno spazio S_3 e perpendicolari, sono rette polari. Se i due piani si intersecano in una retta, o sono paralleli di 2ª specie, le loro rette all'infinito sono coniugate intorno al punto comune. E inversamente.*

Difatti i due piani si incontrano in un solo punto (teor. VI, 122), e quindi le loro rette all'infinito in generale non si incontrano. E quando i loro segmenti normali sono retti (oss. 128) esse sono rette polari (teor. II, 114); e inversamente.

Se invece i piani si incontrano in una retta, o sono paralleli di 2ª specie, le loro rette all'infinito, segandosi in un punto, sono rette coniugate nel piano che le contiene; e inversamente (def. III, 69 e coroll. II, teor. VII, 73).

Oss. I. Rispetto dunque alla posizione delle rette all'infinito di due piani si hanno due casi di ortogonalità, come si hanno due casi di parallelismo.

Def. I. Quando le rette all'infinito di due piani perpendicolari si incontrano all'infinito, essi si chiamano *perpendicolari di 2ª specie*, altrimenti si dicono *perpendicolari di 1ª specie* od anche soltanto *perpendicolari*.

Coroll. I. Due piani perpendicolari di 2ª specie, che non hanno una retta comune, sono anche piani paralleli di 2ª specie.

Oss. II. Che realmente vi siano piani perpendicolari di 2ª specie ad un piano e che non lo incontrano in una retta, si vede come segue. Siano $a_{1\infty}$, $b_{1\infty}$ le rette all'infinito di due piani A_2, B_2 normali di 2ª specie che hanno una retta comune. Tutti i piani paralleli di 1ª specie ad A_2 che incontrano B_2 in una retta, sono situati nello spazio a tre dimensioni $(B_2 a_{1\infty})$ e sono normali a B_2. Ma per la retta $a_{1\infty}$ passano infiniti altri piani, perchè il sistema di piani che passano per una retta in S_4 è un sistema a due dimensioni (teor. VII, 122), mentre il sistema di piani passanti per una retta nello spazio a tre dimensioni è ad una dimensione (teor. VIII, 83). Questi altri piani sono appunto perpendicolari e paralleli di 2ª specie al piano B_2.

Coroll. II. I piani paralleli di 1ª *specie a due piani perpendicolari di* 1ª *o di* 2ª *specie sono rispettivamente perpendicolari fra loro di* 1ª *o di* 2ª *specie.*

Perchè la retta all'infinito degli uni è polare o coniugata alla retta all'infinito degli altri.

Coroll. III. Le rette di uno qualunque di due piani perpendicolari di 1ª *specie, sono perpendicolari all'altro.*

Difatti i punti di due rette polari all'infinito sono coniugati (coroll. I, teor. I, 108 e def. V, 40).

Coroll. IV. In due piani perpendicolari di 2ª *specie vi è una sola direzione di rette dell'uno perpendicolare all'altro.*

Difatti le due rette all'infinito nel piano comune, essendo coniugate, contengono ciascuna i poli dell'altra. Le rette dei due piani, che passano per questi poli, hanno le proprietà suddette (oss. 128).

Coroll. V. Da un punto si può condurre un solo piano perpendicolare di 1ª *specie ad un altro piano.*

Basta congiungere il punto dato colla retta polare della retta all'infinito del piano dato.

Coroll. VI. Da un punto si possono condurre infiniti piani perpendicolari di 2ª *specie ad un piano dato.*

Difatti le rette che si appoggiano alla retta all'infinito del piano dato e alla retta polare di essa sono rette all'infinito di piani normali di 2ª specie (coroll. IV, teor. II, 108 e def. III, 69).

Coroll. VII. Due piani perpendicolari di 1ª *specie a due piani paralleli di* 2ª *specie, e non situati in uno spazio* S_3, *sono pure paralleli di* 2ª *specie.*

Difatti le loro rette all'infinito si incontrano nei poli del piano che congiunge le rette all'infinito dei due piani paralleli di 2ª specie dati (teor. IV, 108).

Teor. II. Un piano β *perpendicolare di* 2ª *specie ad un piano* α, *è perpendicolare di* 2ª *specie ad ogni piano perpendicolare di* 1ª *specie al piano* α.

Siano b_∞, a_∞ le rette all'infinito di β ed α, e a'_∞ la retta polare di a_∞. La retta b_∞ deve incontrare la retta a_∞ (def. I), e poichè è coniugata a questa retta nel piano $a_\infty b_\infty$, il quale incontra la retta a'_∞ nei poli di a_∞ in questo piano, la retta b_∞ deve passare per questi punti (def. III, 69), cioè deve incontrare la retta a'_∞, e quindi è coniugata a questa retta nel piano $b_\infty a'_\infty$. Ma ogni piano perpendicolare di 1ª specie ad α passa per a'_∞, dunque il teor. è dimostrato (def. I).

Def. II. Il punto d'incontro di un piano con un piano ad esso perpendicolare di 1ª specie si chiama *piede* del primo piano sul secondo.

Teor. III. Il piede del piano normale di 1ª *specie condotto da un punto ad un piano è il piede della normale condotta dal punto al piano.*

Il piano normale di 1ª specie condotto dal punto al piano contiene la retta normale condotta dal punto e incontra il piano dato, perchè il punto all'infinito della normale suddetta è il punto d'intersezione dello spazio a tre dimensioni determinato dal punto e dal piano dato, colla retta polare della retta all'infinito del piano, per la quale passa il piano normale di 1ª specie.

130. *Teor. I. La retta all'infinito di un piano perpendicolare ad uno spazio*

S_3 *è coniugata al piano all'infinito dello spazio; e inversamente* (def. II, 128; coroll. I, teor. V, 111).

Coroll. I. Se un piano e uno spazio sono perpendicolari, i piani e gli spazî paralleli ai dati sono pure perpendicolari fra loro.

Coroll. II. Un piano perpendicolare ad uno spazio è perpendicolare di 2ª *specie a tutti i piani passanti per la sua retta d'intersezione con lo spazio dato (e perciò anche con tutti i piani ad essi pararalleli in questo spazio).*

Perchè la retta all'infinito di ciascuno dei piani suddetti in S_3 e quella del piano ad esso perpendicolare sono in un piano e coniugate in questo piano.

Coroll. III. Da una retta si può condurre un solo piano perpendicolare ad uno spazio a tre dimensioni.

Basta congiungere la retta col polo del piano all'infinito dello spazio S_3.

Coroll. IV. Per una retta passa un solo spazio S_3 *perpendicolare ad un piano.*

È lo spazio S_3 che congiunge la retta colla retta polare della retta all'infinito del piano, imperocchè un piano all'infinito che passa per una retta è coniugato alla retta polare della prima (coroll. IV, teor. IV, 108).

Teor. II. Le normali condotte dai punti di una retta ad uno spazio S_3 *sono situate nel piano perpendicolare condotto dalla retta allo spazio.*

Difatti il punto all'infinito di ognuna di queste normali è il polo del piano all'infinito di S_3, e per il polo di questo piano passa anche la retta all'infinito del piano perpendicolare della retta allo spazio (def. V, 108 e teorema I).

Coroll. I piedi delle normali condotte dai punti di una retta ad uno spazio sono situati in una retta, che passa pel punto ove la retta data incontra lo spazio dato (teor. III, 122 e def. V, 128).

Def. I. Questa retta si chiama *proiezione ortogonale*, o semplicemente *proiezione*, della retta data sullo spazio.

Teor. III. Le normali condotte dai punti di una retta ad un piano sono situate nello spazio a tre dimensioni, che passa per la retta ed è normale al piano.

Difatti ogni retta normale al piano ha il suo punto all'infinito nella polare $a_{1\infty}$ della retta all'infinito del piano (teor. I, 128 e teor. IV, 108); e siccome lo spazio normale condotto dalla retta al piano dato contiene la retta $a_{1\infty}$, così contiene anche le perpendicolari condotte dai punti della retta al piano dato (teor. I).

Coroll. I piedi delle normali condotte dai punti di una retta ad un piano e incontrano questo piano sono situati in una retta (teor. III, 122).

Def. II. Questa retta si chiama *proiezione ortogonale* o *proiezione* della retta sul piano.

Teor. IV. I piani normali di 1ª *specie condotti dai punti di una retta ad un piano sono situati nello spazio normale* S_3 *condotto dalla retta al piano.*

Difatti questi piani si ottengono congiungendo i punti della retta colla polare all'infinito della retta all'infinito del piano dato; e siccome essi hanno con lo spazio S_3 un punto ed una retta in comune, così essi giacciono in questo spazio (teor. III, 82).

Coroll. I piedi dei piani normali di 1[a] specie condotti dai punti di una retta ad un piano sono situati in una retta.

Ciascuno dei piani normali incontra il piano dato in un solo punto, perchè se i piani suddetti si incontrassero in una retta, essi sarebbero situati in uno spazio a tre dimensioni e non sarebbero quindi normali di 1[a] specie. Il punto d'intersezione deve essere situato sulla retta d'intersezione dello spazio normale S_3 condotto dalla retta al piano dato (teor. III, 122).

131. *Teor. I. I piani all'infinito di due spazî perpendicolari a tre dimensioni sono coniugati; e inversamente* (def. III, 128, coroll. I, teor. IV, 111).

Coroll. I. Gli spazî a tre dimensioni paralleli ad uno spazio perpendicolare ad un altro sono perpendicolari allo spazio dato.

Perchè il loro piano all'infinito è coniugato al piano dello spazio dato.

Coroll. II. Per un piano passa un solo spazio normale ad uno spazio dato.

È lo spazio che congiunge il piano col polo del piano all'infinito dello spazio dato (def. II, 108).

Teor. II. Le perpendicolari condotte dai punti di un piano ad uno spazio S_3 sono situate nello spazio normale condotto dal piano allo spazio S_3.

Difatti esse passano pel polo del piano all'infinito di S_3, che è contenuto nello spazio normale condotto dal piano a S_3 (teor. I).

Coroll. I piedi delle normali condotte dai punti di un piano ad uno spazio sono situati in un altro piano, che passa per la retta d'intersezione del piano con lo spazio dato (teor. IV, 122).

Def. I. Il piano nel quale giacciono i piedi delle normali condotte dai punti di un piano P_2 ad uno spazio S_3 chiamasi *proiezione ortogonale,* o semplicemente *proiezione,* del piano P_2 sullo spazio S_3.

Teor. III. Ciascuno di due spazî perpendicolari contiene infinite rette perpendicolari all'altro.

Siano S_3, S'_3 i due spazî perpendicolari, $X_{0\infty}, Y_{0\infty}$ i poli dei loro piani all'infinito; S_3 contiene $Y_{0\infty}$ e S'_3 contiene $X_{0\infty}$ (teor. I). Le rette di S_3 che passano per $Y_{0\infty}$ sono evidentemente perpendicolari allo spazio S'_3 (def. I, 128), così quelle di S_3 che passano per $X_{0\infty}$ rispetto a S_3.

132. *Teor. I. Vi è una sola direzione di piani perpendicolari a due rette date.*

Se un piano è normale a due rette, la sua retta all'infinito deve essere l'intersezione dei piani polari dei punti all'infinito delle due rette (teor. I, 128), e perciò deve essere la retta polare congiungente i punti all'infinito delle due rette.

Coroll. Per ogni punto dello spazio S_4 passa un solo piano perpendicolare a due rette.

Teor. II. Vi è un solo piano normale a due rette che le incontra. Esso passa per la trasversale normale comune dello spazio a tre dimensioni determinato dalle rette date, ed è normale a questo spazio.

Siano A_1 e B_1 le due rette date e $Y_{1\infty}$ la polare della congiungente i punti all'infinito delle due rette. Ogni piano passante per $Y_{1\infty}$ è normale alle

due rette e al loro spazio (teor. I, 128 e 130). Le due rette A_1, $Y_{1\infty}$ determinano uno spazio che incontra la retta B_1 in un punto B_0 (teor. II, 122); e il piano $B_0 Y_{1\infty}$ essendo situato nello spazio $(A_1 Y_{1\infty})$ incontra la retta A_1 in un punto A_0 (teorema I, 83), ed è normale alle due rette. La retta $A_0 B_0$ è evidentemente normale alle due rette nello spazio $(A_1 B_1)$ (coroll. V, teor. I, 87).

Teor. III. Vi è una sola direzione di rette perpendicolari a tre rette date.

Basta infatti osservare che il piano determinato dai punti all'infinito delle tre rette ha un polo, che dà la direzione della perpendicolare alle tre rette date.

Oss. Siccome due sole rette, nello spazio da esse determinato, hanno una normale comune che le incontra, così é chiaro che in generale tre rette non hanno una normale comune che le incontra.

Coroll. I. Per un punto passa una sola perpendicolare a tre rette date.

Teor. IV. Vi è una sola direzione di rette perpendicolari ad una retta e ad un piano che non si intersecano, ed una sola perpendicolare incontra la retta e il piano.

La direzione delle perpendicolari alla retta A_1 e al piano A_2 dati ha per punto all'infinito il polo $X_{0\infty}$ del piano $E_{2\infty}$ determinato dal punto all'infinito di A_1 e dalla retta all'infinito di A_2. Per dimostrare la seconda parte del teorema basta congiungere la retta A_1 col punto $X_{0\infty}$, il piano $(X_{0\infty} A_1)$ incontra il piano A_2 in un punto A_0. La normale condotta da A_0 alla retta A_1, che la incontra, è la retta richiesta.

Teor. V. Vi è una sola direzione di piani perpendicolari a due spazî dati.

Questa direzione è data dalla retta polare della retta d'intersezione dei piani all'infinito dei due spazì (teor. I).

Coroll. I Un piano perpendicolare a due spazî è perpendicolare di 1ª *specie al loro piano d'intersezione* (teor. I e def. I, 129).

Coroll. II. Per un punto passa un solo piano perpendicolare a due spazî dati.

Teor. VI. Vi è una sola direzione di rette e di spazî perpendicolari a due piani paralleli di 2ª *specie.*

Le rette $a_{1\infty}$, $b_{1\infty}$ all'infinito dei due piani sono distinte, e si incontrano in un punto $A_{0\infty}$, il quale ha un piano polare $A_{2\infty}$. In $A_{2\infty}$ sono situate le rette polari $\alpha_{1\infty}$, $\beta_{1\infty}$ di $a_{1\infty}$, $b_{1\infty}$ (coroll. II, teor. II, 108), che sono distinte come le rette $a_{1\infty}, b_{1\infty}$. Esse si incontrano in un punto $A'_{0\infty}$ coniugato al punto $A_{0\infty}$, e il piano polare di $A'_{0\infty}$ è il piano $(a_{1\infty} b_{1\infty})$; $A'_{0\infty}$ dà la direzione delle perpendicolari ai due piani (teor. I, 128). Il piano $(\alpha_{1\infty} \beta_{1\infty})$ dà invece la direzione degli spazî normali ai due piani (teor. I, 130).

Coroll. Per un punto passano una sola retta e un solo spazio normali a due piani paralleli di 2ª *specie.*

Teor. VII. Vi sono infinite rette perpendicolari a due piani paralleli di 2ª *specie che li incontrano e sono situate in un piano. Questo piano li taglia in due rette parallele, ed è perpendicolare di* 2ª *specie ai due piani dati.*

Siano S_2 e S'_2 i due piani, $A_{0\infty}$ il loro punto all'infinito, $A'_{0\infty}$ il punto

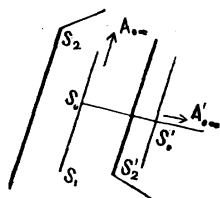



fig. 105

all' infinito delle rette perpendicolari ai due piani (teor. VI) (fig. 105). Lo spazio $(S_2A'_{0\infty})$ incontra S'_2 in una retta S_1. Congiungendo un punto S'_0 di S'_1 col punto $A'_{0\infty}$ si ha una retta perpendicolare ai due piani, e che incontra S_2 in un punto S_0, essendo situata col piano S_2 nello spazio $(S_2A'_{0\infty})$. I punti S_0 sono situati evidentemente sulla retta d'intersezione dello spazio $(S'_2A'_{0\infty})$ col piano S_2, che passa per $A_{0\infty}$ ed è quindi parallela alla retta S'_1. Il piano $(S_1S'_1)$ è perpendicolare ai due piani S_2 e S'_2 negli spazî a tre dimensioni che esso determina con ciascuno di essi (teor. III, 87).

Teor. VIII. Esistono due piani che passano pel punto comune di due piani dati, sono a questi perpendicolari di 2ª specie e li incontrano ciascuno in una retta. I due piani sono fra loro perpendicolari di 1ª specie.

Se ne hanno più di due, ne hanno infiniti.

Siano A_2, B_2 i due piani, $a_{1\infty}$, $b_{1\infty}$ le loro rette all'infinito, $\alpha_{1\infty}$, $\beta_{1\infty}$ le loro rette polari, C_0 il punto comune dei due piani. Le due rette $a_{1\infty}$, $b_{1\infty}$ ammettono due trasversali normali $r_{1\infty}$, $s_{1\infty}$ (teor. X, 117) che incontrano le rette polari $\alpha_{1\infty}$, $\beta_{1\infty}$ e che sono fra loro polari (teor. VIII, e coroll. I, 110). I piani $(C_0\, r_{1\infty})$, $(C_0\, s_{1\infty})$ tagliano i piani dati ciascuno secondo una retta, la quale ha i suoi punti all'infinito sull'una o sull'altra delle rette $r_{1\infty}$, $s_{1\infty}$ e sull'una o l'altra delle rette $a_{1\infty}$, $b_{1\infty}$. Essi sono perpendicolari ai piani dati, perchè, per es., le rette $r_{1\infty}$ e $a_{1\infty}$ sono coniugate, perchè $r_{1\infty}$ incontra la retta $\alpha_{1\infty}$ nel polo di $a_{1\infty}$ nel piano $(r_{1\infty}a_{1\infty})$ (coroll. IV, teor. II, 108). Sono perpendicolari di 1ª specie fra loro, perchè le due rette $r_{1\infty}$, $s_{1\infty}$ sono polari (teor. I e def. I, 129). Inoltre se due rette nello spazio completo a tre dimensioni hanno più di due rette normali comuni, esse ne hanno infinite (oss. I, teor. IV, 114); dunque anche l'ultima parte del teorema è dimostrata.

Teor. IX. Per un punto dello spazio S_4 passano infiniti gruppi di quattro rette due a due perpendicolari. I piani e gli spazî che le congiungono due a due, tre a tre, so o due a due perpendicolari (teor. V e coroll., 108).

133. *Costruzione di enti perpendicolari con elementi del campo finito.*

a) Spazio normale ad una retta che passa per un punto dato.

Se il punto è situato sulla retta, basta condurre dalla retta tre piani non situati in uno spazio S_3 e su questi le perpendicolari dal punto alle rette, le quali determinano lo spazio richiesto (oss. III, 60).

Se invece il punto è fuori della retta basta condurre da esso la perpendicolare alla retta nel piano da essa determinato col punto. Lo spazio perpendicolare nel piede di questa perpendicolare alla retta data è lo spazio domandato.

b) Retta normale ad uno spazio e che passa per un punto dato.

Se il punto è situato nello spazio basta condurre in esso tre rette non situate in un piano. I tre spazi passanti pel punto dato e normali alle tre rette (*a*) si incontrano nella retta domandata. Analogamente se il punto è fuori dello spazio.

c) Piano perpendicolare di 1ª specie ad un altro piano e che passa per un punto dato.

Basta condurre per il punto gli spazî normali a due rette del piano dato (*a*) i quali s'intersecano nel piano normale richiesto.

d) Piano passante per una retta e normale ad uno spazio.

Basta condurre per due punti della retta le perpendicolari allo spazio dato, le quali determinano il piano domandato.

e) Spazio passante per una retta e normale ad un piano.

Basta condurre da due punti della retta le perpendicolari al piano, che lo incontrino (costr. II, 87), le quali determinano lo spazio richiesto.

f) Spazio passante per un piano e perpendicolare ad un altro spazio.

Si conduca da un punto del piano la perpendicolare allo spazio dato, la quale col piano dato determina lo spazio richiesto.

g) Piano passante per un punto, normale a due rette, e che incontra le rette date.

Per la trasversale normale comune alle due rette (costr. V, 87) si conduca il piano normale allo spazio da esse determinato (*d*).

h) Retta normale a tre rette e che passa per un punto dato.

Basta condurre per il punto i tre spazî perpendicolari alle tre rette (*a*), i quali si incontrano nella retta richiesta.

i) Retta normale ad una retta e ad un piano, e che li incontra ambedue.

Pel piano dato si conduca lo spazio parallelo alla retta data (*c*, 126), poi dalla retta si conduca il piano perpendicolare a questo spazio (*d*). La retta d'intersezione del piano e dello spazio così costruiti incontra il piano dato nel punto ove viene incontrato dalla perpendicolare comune richiesta.

Per avere questa retta dal punto trovato basta condurre la perpendicolare alla retta (vedi dim. teor. IV, 132).

l) Piano passante per un punto e perpendicolare a due spazî dati.

Per il punto si conducano le normali ai due spazî (*b*), che sono situate nel piano richiesto.

Oppure: si conduca dal punto il piano normale di 1ª specie al piano d'intersezione dei due spazi (*c*).

m) Spazio passante per un punto e normale a due piani paralleli di 2ª specie.

Ai due piani si conducano due piani perpendicolari di 1ª specie (*c*), e a questi due piani, che sono pure paralleli di 1ª o 2ª specie (coroll. VII, teor. I, 129), e per il punto dato lo spazio parallelo.

n) Retta passante per un punto dato e normale a due piani paralleli di 2ª specie.

Costruiti i due piani perpendicolari di 1ª specie ai due piani dati (*c*), basta condurre dal punto la retta parallela ad essi (oss. III, 60).

o) Piano normale di 2ª specie a due piani paralleli di 2ª specie.

Costruita una normale comune a questi piani, basta condurre a questa gli spazî paralleli passanti pei due piani dati, che si incontrano nel piano richiesto (vedi dim. teor, VII, 132).

p) Costruzione di un gruppo di quattro rette che passano per un medesimo punto e sono due a due perpendicolari.

Per il punto si conducano due rette perpendicolari in un piano qualunque passante pel punto dato; poi dallo stesso punto si conduca la normale a questo piano, e finalmente la normale allo spazio determinato dalle prime tre (*b*).

§ 6.

Distanze.

134. *Oss. I.* La proprietà della distanza di un punto da una retta e di un punto da un piano, dei punti di una retta parallela da un piano, di due piani paralleli di 1ª specie, di due rette fra loro, date ai n. 88 e 89, valgono anche nello spazio a quattro dimensioni.

Teor. I. Il segmento normale ad una retta e ad un piano dà la distanza minima tra i punti della retta e quelli del piano, e inversamente.

Infatti la distanza di un punto di una retta dal piano è misurata sulla normale condotta da questo punto al piano e che lo incontra, mentre la distanza minima di un punto del piano S_2 dalla retta S_1 è data dalla normale condotta dal punto alla retta S_1 nel piano che lo congiunge con questa retta; e quindi il segmento normale comune alla retta e al piano, e che ha i suoi estremi su di essi (teor. IV, 132), dà la distanza minima tra i punti della retta e i punti del piano.

Def. I. Questa distanza la chiameremo *distanza della retta e del piano.*

Teor. II. I segmenti normali di due piani paralleli di 2ª *specie, che hanno i loro estremi nei due piani, sono uguali.*

Infatti gli estremi di questi sono compresi fra due rette parallele (teorema VII, 132).

Def. II. La distanza normale di due piani paralleli di 2ª specie si chiama *distanza dei due piani.*

Oss. II. Questa proprietà non ha luogo per due piani che si incontrano in un punto del campo finito, perchè in tal caso non vi è alcuna perpendicolare comune ai due piani (teor. I, 128).

Probl. Costruire un piano che sia parallelo di 2ª specie ad un piano dato S_2, e abbia da questo una distanza data d.

Per una retta S_1 di S_2 si faccia passare un piano R_2 perpendicolare a S_2, e in R_2 si scelga una retta parallela ad S_1 e alla distanza d. Sia $r_{1\infty}$ la retta all'infinito di R_2 e $\rho_{1\infty}$ la sua polare. La retta $\sigma'_{1\infty}$ del piano S'_2 che si cerca, deve essere coniugata alla retta $r_{1\infty}$, e quindi deve incontrare le rette $r_{1\infty}$, $\rho_{1\infty}$; inoltre deve segare la retta σ_1 di S_2. La retta $\sigma'_{1\infty}$ é dunque una retta che incontra le tre rette $\sigma_{1\infty}$, $r_{1\infty}$, $\rho_{1\infty}$, e poichè le rette che incontrano queste tre rette sono infinite e passano pel punto comune a $\sigma_{1\infty}$ e $r_{1\infty}$ cioè pel punto all'infinito di S_1, così infiniti sono i piani che soddisfano alla condizione del problema, scelti che siano la retta S_1 e il piano R_2.

135. *Teor. I. Il minimo della distanza di un punto fuori di uno spazio ai punti di questo spazio è la distanza del punto dal piede della sua perpendicolare allo spazio.*

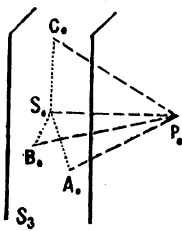



fig. 106

Dim. analoga a quella del teor. I, 88 (fig. 106).

Def. I. La distanza minima di un punto P_0 da uno spazio S_3 si chiama *distanza* del punto dallo spazio.

I segmenti con un estremo nel punto P_0 e l'altro estremo nello spazio S_3, che non sono normali allo spazio, si chiamano *obliqui.*

Teor. II. I segmenti obliqui aventi uguali proiezioni sono uguali e formano il medesimo angolo col segmento perpendicolare. Di due siffatti segmenti è maggiore quello che ha il suo estremo nello spazio a maggiore distanza dal piede della normale.

Dim. analoga a quella del teor. II, 88 (fig. 106).

Coroll. I. Vale il teorema inverso.

Coroll. II. I punti di una superficie sferica di uno spazio a tre dimensioni sono equidistanti da un punto qualunque della perpendicolare inalzata dal suo centro al suo spazio.

Si dimostra come il coroll. analogo del teor. II, 88.

Coroll. III. Tutti i punti di uno spazio equidistanti da un punto fuori

di esso sono situati in una sfera che ha per centro il piede della perpendicolare condotta dal punto allo spazio.

La dim. è la stessa di quella del coroll. III, teor. II, n. 88; basta scambiare in essa la parola piano colla parola spazio.

Teor. III. Tutti i punti, da ciascuno dei quali sono equidistanti i punti di una sfera, sono situati sulla perpendicolare inalzata dal centro della sfera al suo spazio.

La dimostrazione è la stessa di quella data pel teor. III, 88; basta scambiare le parole circonferenza e piano, colle parole sfera e spazio.

Teor. IV. Se due punti A_0, A'_0 hanno rispettivamente la medesima distanza da due spazî A_3 e A'_3, i segmenti che essi determinano coi punti di questi spazî sono a due a due uguali, e le figure (A_0A_3), $(A'_0A'_3)$ sono identiche.

Si dimostra come il teor. IV, 88.

Corol. I. Se due punti hanno la medesima distanza da uno spazio, i segmenti che essi determinano rispettivamente coi punti dello spazio sono a due a due uguali, e le due figure che essi formano collo spazio dato sono identiche.

Coroll. II. Se due punti giacciono in una perpendicolare ad uno spazio e alla medesima distanza da questo, essi hanno la medesima distanza da ogni punto dello spazio.

Come i coroll. I e II del teor. IV, 88.

Teor. V. Data una retta, o un piano, parallela ad uno spazio a tre dimensioni, le distanze dei punti della retta, o del piano, allo spazio sono uguali.

Difatti le normali dei punti di una retta, o del piano, ad uno spazio a tre dimensioni sono parallele (coroll. II, teor. II, 128), e quindi se la retta (il piano) è parallela allo spazio, i piedi delle normali giacciono in un' altra retta (o piano) parallela alla retta data (piano dato) (coroll. I, teor. II, 130 o 131 e coroll. I, teor. V o coroll. I, teor. VI, 124), ed il teorema è dimostrato (teor. VI, 54 e teor. VI, 88).

Def. II. La distanza dei punti di una retta, o di un piano, ai punti di uno spazio a tre dimensioni parallelo si chiama *distanza della retta* o *del piano dallo spazio.*

Coroll. La distanza di una retta (o di un piano) da uno spazio parallelo ad essa è la minore distanza fra i punti della retta (del piano) e quelli dello spazio (teor. I).

Teor. VI. Le distanze dei punti di uno spazio parallelo ad un altro spazio sono uguali (coroll. II, teor. II e teor. VI, 124).

Dim. analoga a quella del teor. VI, 88.

Def. III. La distanza dei punti di uno spazio a tre dimensioni da uno spazio parallelo al primo, si chiama *distanza dei due spazî.*

Teor. VII. Due coppie di spazî paralleli, che hanno la medesima distanza, sono due figure identiche.

La dimostrazione è analoga a quella data per due coppie di piani paralleli (teor. VII, 88); basta scambiare la parola piano con la parola spazio,

§ 7.

Angoli.

136. *Angoli di un raggio e di una retta con un piano.*

Oss. I. Le definizioni già date di angolo di due raggi e di angolo di due rette, di un raggio e di un piano, e di due piani che si incontrano in una retta, valgono anche nello spazio a quattro dimensioni. Siccome due rette sono situate sempre in uno spazio a tre dimensioni, così sussistono anche nello spazio a quattro dimensioni i teoremi del n. 89. Dobbiamo far sì, come abbiamo sempre fatto, che le definizioni degli angoli siano tali che essi possano considerarsi come elementi di determinazione della figura, in modo che quando due figure in cui questi elementi soli o con altri sono uguali, le due figure siano identiche.

Oss. II. Se il raggio o la retta e il piano si incontrano, vale la definizione già data (def. I, 90), perchè sono contenuti in uno spazio a tre dimensioni.

Teor. I. Se un raggio e un piano non sono situati in uno spazio a tre dimensioni, l'angolo che il raggio fa con ogni piano che lo incontra ed è parallelo al piano dato è costante; ed è uguale all'angolo che il piano fa con ogni raggio che lo incontra ed è parallelo al raggio dato.

Difatti gli angoli suddetti sono misurati dalle distanze del punto all'infinito del raggio dalla retta all'infinito del piano (def. I, 90 e oss. I).

Def. I. Questo angolo costante lo chiameremo *angolo* del raggio col piano.

Teor. II. Gli angoli che una retta fa con un piano sono uguali a quello che essa fa colla sua proiezione sul piano.

Questa proiezione si ottiene conducendo dalla retta lo spazio S_3 normale al piano (teor. III, 130). Questo spazio incontra la retta all'infinito del piano nei punti all'infinito della proiezione della retta, che sono anche i piedi della normale condotta dal punto all'infinito della retta alla retta all'infinito del piano. Difatti questa retta essendo coniugata al piano all'infinito dello spazio S_3 (teor. I, 130) è perpendicolare al piano stesso (teor. III, 110), e quindi anche alla retta che congiunge il loro punto d'incontro col punto all'infinito della retta (coroll. teor. II, 110, def. I e oss. I).

Teor. III. L'angolo che un raggio fa con la sua proiezione sopra un piano è l'angolo minimo che il raggio fa con tutti i raggi del piano.

La dimostrazione di questo teorema è identica a quella del teor. II, 90; soltanto che in quel teorema il raggio e il piano si considerano compresi nello spazio a tre dimensioni. Essa vale dunque in generale.

Coroll. L'angolo che il raggio fa col prolungamento della sua proiezione è massimo.

Def. II. Per angoli di una retta con un piano si intendono gli angoli che i due raggi opposti di essa formano col piano.

137. *Angoli di un raggio e di una retta con uno spazio a tre dimensioni.*

Oss. I. Siano dati ora un raggio a_1 e uno spazio a tre dimensioni S_3, e A_0 sia

fig. 107

il punto d'intersezione del raggio a_1 con S_3 (fig. 107). Siano $X_{0\infty}$ e $\alpha_{2\infty}$ gli elementi all'infinito del raggio a_1 e dello spazio S_3. La distanza del punto $X_{0\infty}$ dai punti del piano $\alpha_{2\infty}$ ha un minimo e un massimo misurato sulla normale condotta da $X_{0\infty}$ al piano $\alpha_{2\infty}$ (teor. II, 111). Se si ha all'infinito un altro piano $\alpha'_{2\infty}$ e un altro punto $X'_{0\infty}$, e se la distanza minima o la massima di questo punto dal piano $\alpha'_{2\infty}$ è la medesima di quella del punto $A_{0\infty}$ al piano $\alpha_{2\infty}$, le distanze del punto $X'_{0\infty}$ dai punti del piano $\alpha'_{2\infty}$ sono uguali rispettivamente a quelle del punto X_{∞} ai punti del piano $\alpha_{2\infty}$, vale a dire le due figure $(X_{0\infty}\alpha_{2\infty})$, $(X'_{0\infty}\alpha'_{2\infty})$ sono identiche (oss. II, 111). Ma se un segmento obliquo avente per estremi il punto A_{∞} e un punto $B_{0\infty}$ del piano $\alpha_{2\infty}$ è uguale ad un segmento avente i suoi estremi nel punto $X'_{0\infty}$ e nel piano $\alpha'_{2\infty}$, per questo solo fatto le due figure $(X_{0\infty}\alpha_{2\infty})$, $(X'_{0\infty}\alpha'_{2\infty})$ non possono dirsi identiche; vale a dire la distanza dei punti $X_{0\infty}$, $X'_{0\infty}$ rispettivamente dai due piani $\alpha_{2\infty}$, $\alpha'_{2\infty}$ non sono uguali Per angolo del raggio a_1 e dello spazio S_3 non si può dunque considerare l'angolo che esso forma con un segmento b_1 qualunque dello spazio S_3 limitato per es. in A_0. Difatti questo angolo viene misurato dal segmento del punto $X_{0\infty}$ e dal punto $B_{0\infty}$ all'infinito di b_1, che è un segmento obliquo rispetto al piano $\alpha_{2\infty}$. Quindi se si ha un'altra coppia di un raggio a'_1 e di uno spazio a tre dimensioni S'_3 e se b'_1 è un raggio dello spazio S'_3 che forma con a'_1 il medesimo angolo del raggio a_1 con b_1, non possiamo concludere, perciò che si è detto, che gli angoli formati dal raggio a_1 con tutte le rette dello spazio S_3 siano rispettivamente uguali a quelli che il raggio a'_1 forma coi raggi dello spazio S'_3.

Ma se invece come angolo del raggio a_1 collo spazio S_3 definiamo la distanza minima del suo punto all'infinito dal piano all'infinito di esso spazio, allora, se un altro raggio a'_1 fa lo stesso angolo con un altro spazio S'_3, le figure (a_1S_3), $(a'_1S'_3)$ sono identiche. Dunque:

Def. I. Per angolo di un raggio con uno spazio intenderemo l'angolo che viene misurato dalla distanza minima del punto all'infinito del raggio dal piano all'infinito dello spazio (oss. I).

Teor. I. L'angolo che un raggio fa con uno spazio è uguale a quello che esso fa colla sua proiezione sullo spazio.

Dim. analoga a quella del teor. I, 90.

Teor. II. L'angolo che un raggio fa con la sua proiezione in uno spazio a tre dimensioni è l'angolo minimo che il raggio fa con tutti i raggi dello spazio.

Dim. analoga a quella del teor. II, 90.

Coroll. L'angolo che il raggio fa col prolungamento della sua proiezione è massimo.

Def. II. Per *angoli* di una retta A_1 con uno spazio S_3 si intendono gli angoli che i due raggi di essa (def. I, 7) formano con questo spazio.

Oss. II. Questi angoli sono misurati dalla distanza dei punti all'infinito della retta dal piano all'infinito dello spazio, e quindi sono a due a due uguali e a due a due supplementari.

Probl. Costruire con elementi del campo finito un raggio che formi un angolo dato con uno spazio a tre dimensioni.

La costruzione è uguale a quella data per il problema analogo del n. 90 nello spazio a tre dimensioni, soltanto che invece di avere un piano abbiamo qui uno spazio a tre dimensioni.

138. *Angoli di un semipiano e di un piano con uno spazio a tre dimensioni.*

Oss. I. Sia ora dato un semipiano a_2 e uno spazio a tre dimensioni S_3, e supponiamo che la retta del campo finito che limita il semipiano sia situata nello spazio dato. Lo spazio S_3 determina all'infinito un piano $\alpha_{2\infty}$ e il semipiano a_2 una semiretta $a_{1\infty}$ compresa fra i due punti d'intersezione col piano $\alpha_{2\infty}$. Vi è un solo segmento normale ad entrambi e che ha in essi i suoi estremi, e dà la distanza minima della retta al piano (coroll. II, teor. V, 111). Se è data un'altra semiretta $a'_{1\infty}$ ed un altro piano $\alpha'_{2\infty}$, essi formano una figura identica alla prima se la distanza di $a'_{1\infty}$ e $\alpha'_{2\infty}$ è la medesima di quella di $a_{1\infty}$ e $\alpha_{2\infty}$, e se $a_{1\infty}$ ha i suoi estremi in $\alpha_{2\infty}$; vale a dire le distanze dei punti di $a_{1\infty}$ dai punti di $\alpha_{2\infty}$ sono rispettivamente uguali a quelle dei punti di $a'_{1\infty}$ da $\alpha'_{2\infty}$ (coroll. III, teor. V, 111). Non si può dire la stessa cosa se invece ha luogo l'uguaglianza fra due segmenti obliqui. Dunque:

Def. I. Per angolo di un semipiano con uno spazio contenente la retta che lo limita, s'intende l'angolo che viene misurato dalla distanza minima della semiretta all'infinito del semipiano dal piano all'infinito dello spazio.

Teor. I. L'angolo di un semipiano con uno spazio è uguale all'angolo che il semipiano fa colla sua proiezione sullo spazio.

Il segmento normale alla semiretta $a_{1\infty}$ e al piano $\alpha_{2\infty}$ è situato nella retta che passa pei poli del piano $\alpha_{2\infty}$ e incontra la retta $a_{1\infty}$ e la sua polare (teor. VII, VIII, 110). Congiungendo la retta suddetta col semipiano a_2 si ottiene lo spazio normale condotto da a_2 allo spazio dato, che incontra questo spazio in un piano passante per la retta d'intersezione del piano e dello spazio dati, il quale contiene i piedi delle normali condotte dai punti del semipiano a_2 allo spazio S_3 (coroll. I, teor. II, 131).

Il segmento normale anzidetto misura dunque l'angolo diedro formato dal semipiano con la sua proiezione nello spazio S_3 (teor. V, 91).

Teor. II. L'angolo che un semipiano fa con uno spazio è il minimo fra gli angoli che esso fa con gli altri semipiani dello spazio dato.

Perchè ogni altro segmento obliquo $(A_{0\infty}B_{0\infty})$ i cui estremi sono situati sulla semiretta $a_{1\infty}$ e sul piano $\alpha_{2\infty}$ non è minimo per tutti e due i suoi estremi.

Probl. Costruire con elementi del campo finito un semipiano che formi un angolo dato con uno spazio a tre dimensioni.

Basta scegliere a questo scopo un piano dello spazio S_3 dato, far passare per questo piano lo spazio normale S'_3 a S_3. Scelta poi sul piano una retta, si conduca per questa retta un semipiano che formi col piano dato l'angolo dato in S_3.

Il problema, come si vede, ammette infinite soluzioni.

Def. II. Per angoli di un piano con uno spazio a tre dimensioni si intendono gli angoli che le due metà del piano, a partire dalla sua retta d'intersezione con lo spazio, formano con questo spazio.

Oss. II. Poichè gli angoli del piano collo spazio sono misurati da segmenti di una stessa retta a due a due uguali e supplementari, lo stesso accade degli angoli che un piano fa con uno spazio a tre dimensioni.

139. *Diedri e angoli diedri di due semispazî e angoli di due piani che non si incontrano in una retta.*

Def. I. Un fascio di spazî incontra lo spazio all'infinito $\pi_{3\infty}$ in un fascio di piani che ha per asse la retta $a_{1\infty}$ all'infinito dell'asse del fascio dato.

Ai semispazî del fascio corrispondono i semipiani del fascio all'infinito limitati all'asse $a_{1\infty}$. Ai diedri di due semipiani $a_{2\infty}$, $b_{2\infty}$ del fascio corrispon-

dono due parti del fascio di due semispazî α_3, β_3, che si chiamano *diedri* dei semispazî α_3, β_3 e che insieme presi costituiscono l'intero fascio.

Per *diedro* di due semispazî intenderemo sempre quello che corrisponde al diedro minore dei loro semipiani all'infinito, eccetto che i due diedri non siano uguali. I due semispazî si chiamano *facce*, l'asse del fascio *asse* del diedro.

Def. II. Se un tal diedro si sostituisce ad un altro ad esso identico in ogni unione con altri diedri di semispazî, esso si chiama *angolo diedro delle sue facce* [1]).

Se α_3 e β_3 sono le facce di un diedro, lo indicheremo col simbolo $(\alpha_3\beta_3)$.

Def. III. Come i due semipiani $a_{2\infty}$, $b_{2\infty}$ determinano due diedri a tre dimensioni nello spazio $\pi_{3\infty}$, che insieme presi costituiscono lo spazio completo quando si considera il punto come elemento, così due semispazî di un fascio determinano due parti dello spazio S_4 intorno all'asse del fascio considerando ugualmente il punto come elemento, le quali si chiamano pure *diedri*. Anche in questo caso per *diedro* di due semispazî intenderemo la parte dello spazio che corrisponde al loro diedro nel fascio.

Oss. I. Vale l'osservazione analoga all'oss. I, 91.

Teor. I. Un diedro di due semispazî è formato dai semispazî che congiungono l'asse del diedro coi raggi di ogni angolo, i cui lati sono rispettivamente situati sulle facce di esso.

Ciò deriva dalla proprietà analoga del diedro all'infinito (oss. II, 112).

Teor. II. Un diedro di due semispazî è tagliato da piani o spazî paralleli secondo angoli diedri uguali.

La dimostrazione per i piani è analoga a quella del teor. II, 91. Per gli spazî basta osservare che due spazî paralleli tagliano i semispazî in semipiani paralleli, che formano in questo caso il medesimo angolo (coroll. II, teor. III, 91).

Coroll. Due semispazî qualunque sono segati da piani e da spazî paralleli in raggi e in piani che formano lo stesso angolo.

Difatti sono intersecati in raggi o in semipiani paralleli. I raggi nel medesimo semispazio sono diretti nel medesimo verso e i semipiani hanno la stessa semiretta all'infinito.

Teor. III. A diedri uguali nel piano all'infinito corrispondono diedri uguali del fascio di semispazî, i cui assi passano per l'asse dei diedri dati.

Dim. analoga a quella data pel teor. III, 91.

Coroll. I. Due diedri disuguali $(\alpha_{2\infty}\beta_{2\infty}) > (\alpha'_{2\infty}\beta'_{2\infty})$ *determinano intorno a due piani* A_2, A'_2 *passanti per i loro assi, diedri disuguali, e propriamente* $A_2(\alpha_{2\infty}\beta_{2\infty}) > A'_2(\alpha'_{\infty}\beta'_{2\infty})$.

Dim. analoga a quella del coroll. II, 91.

Coroll. II. Due diedri di semispazî colle facce rispettivamente parallele sono uguali o supplementari.

Teor. IV. Due diedri di semispazî uguali determinano all'infinito diedri uguali.

Dim. analoga a quella del teor. IV del n. 91.

1) L'angolo diedro di due semispazî è la grandezza intensiva del diedro da essi formato (int. a, p c, 111(.

Teor. V. L'angolo diedro di due semispazî è misurato dalla distanza normale dei due semipiani all'infinito della facce del diedro.

Dim. analoga a quella del teor. V, 91,

Teor. VI. Un fascio di spazî è identico nella posizione delle sue parti.

Perchè tale è la proprietà della retta polare della retta all'infinito dell'asse del fascio.

Teor. VII. Un diedro $(\alpha_3\beta_3)$ è identico allo stesso diedro nel verso opposto.

Perchè tale è pure la proprietà del segmento che il diedro taglia sulla retta polare suddetta.

Def. IV. Se si taglia un fascio di spazî o un diedro di semispazî con un piano normale all'asse, il fascio di rette o l'angolo che ne risulta si chiama *sezione normale* del fascio o del diedro.

Teor. VIII. Secondochè due diedri $(\alpha_3\beta_3)$, $(\alpha'_3\beta'_3)$ sono uguali (disuguali), le loro sezioni normali sono uguali (disuguali), e inversamente.

Congiunto un punto A_0 dell'asse di un diedro $(\alpha_3\beta_3)$ con due punti $A_{0\infty}$, $B_{0\infty}$ estremi del segmento normale ai due semipiani $a_{2\infty}$, $b_{2\infty}$ di α_3 e β_3, si ha un piano normale di 1ª specie all'asse, perchè la retta $A_{0\infty}B_{0\infty}$ è polare della retta $(a_{2\infty}b_{2\infty})$ (teor. I, 129), quindi secondochè i segmenti normali alle coppie di semipiani all'infinito delle facce dei due diedri dati sono uguali o disuguali, gli angoli delle sezioni normali corrispondenti sono uguali o disuguali.

Se invece sono uguali o disuguali le sezioni normali, ciò significa che i segmenti suddetti sono uguali o disuguali, e perciò i due diedri sono uguali o disuguali (teor. V).

Def. V. Per angolo di due semispazî qualunque s'intende quello misurato dal segmento normale dei due semipiani all'infinito dei due semispazî (coroll. II, teor. IV, 111).

Teor. IX. L'angolo di due semispazî è il minimo o il massimo degli angoli che un raggio di uno di essi fa con un raggio dell'altro, e reciprocamente che questo fa col primo, secondo che esso è minore o maggiore di un retto.

Dim. analoga a quella del teor. IX, 91.

Oss. II. Vale qui l'osservazione analoga all'oss. II, 91.

Coroll. L'angolo supplementare dei due semispazî è nel primo caso il massimo, nel secondo caso il minimo fra i raggi dei due semispazî.

Teor. X. Due diedri di semispazî opposti sono uguali.

Difatti essi hanno all'infinito due diedri opposti che sono uguali (teor. X, 91, oss. III, 112 e teor. III).

Def. VI. Per diedri e angoli diedri di due spazî A_3, B_3 intendiamo i diedri e gli angoli diedri formati dalle quattro coppie di semispazî (a_3b_3), $(b_3a'_3)$, $(a'_3b'_3)$ (b'_3a_3); essendo a_3, a'_3, b_3, b'_3 i semispazî nei quali gli spazî dati vengono divisi dal loro piano comune.

Oss. III. Osservazione analoga all'oss. III. 91.

Teor. XI. I diedri di due spazî hanno due spazî bissettori.

Dim. analoga a quella del teor. XI, 91.

Probl. Costruire con elementi del campo finito un semispazio a tre dimensioni che forma con un altro semispazio, avente lo stesso piano limite, un angolo dato.

Da un punto A_0 del piano σ_2 che limita il semispazio dato si conduca un piano perpendicolare ad esso, che lo intersecherà in un raggio a_1. Nel suddetto piano normale si conduca da A_0 un altro raggio b_1 che formi con a_1 l'angolo dato (oss. III, 60). Il semispazio determinato dal piano σ_2 e dal raggio b_1 sarà il richiesto.

Il problema ammette due soluzioni.

140. *Angoli di due piani.*

Oss. I. Se due piani si incontrano in una retta abbiamo già dato la definizione dei loro angoli (def. I e VI, 91). Se si incontrano in un solo punto la definizione data non basta più; essi non formano più alcun diedro, come due rette che non si incontrano non formano alcun settore angolare.

Teor. I. Due coppie di piani qualunque sono identiche, se le coppie di rette all' infinito di essi hanno le medesime distanze.

Siano A_2, B_2 i due piani dati, $a_{1\infty}, b_{1\infty}$ le loro rette all'infinito e $c_{1\infty}, d_{1\infty}$ siano le due normali comuni, $A_{0\infty}, A'_{0\infty}$; $B_{0\infty}, B'_{0\infty}$ i punti d'intersezione di $c_{1\infty}$, $d_{1\infty}$ con $a_{1\infty}, b_{1\infty}$ (teor. X, 117).

Se si ha un' altra coppia di rette $a'_{1\infty}, b'_{1\infty}$ colle medesime distanze, le due coppie di rette $(a_{1\infty}b_{1\infty})$, $(a'_{1\infty}b'_{1\infty})$ sono identiche (oss. II, 114), e quindi anche le due coppie di piani che le congiungono con due punti qualunque A_0, B_0 dello spazio S_4 (teor. III, 15).

Def. I. Per *angoli* dei due piani intendiamo dunque quelli misurati dai segmenti normali alle rette all'infinito dei due piani.

Def. II. Se si taglia un fascio di piani, o un diedro di piani, con uno spazio normale all'asse o allo spigolo, il fascio di rette, o l'angolo, che ne risulta si chiama *sezione normale* del fascio o del diedro.

Teor. II. Il diedro di due piani, viene misurato dall' angolo delle due rette secondo le quali i due piani vengono intersecati da uno spazio normale alla loro intersezione.

Difatti queste due rette sono situate nello spazio dei due piani e il loro piano è perpendicolare alla comune intersezione (coroll. V, teor. II, 128 e teor. VIII, 91).

Teor. III. Due piani, che si incontrano in un solo punto del campo finito hanno due angoli disuguali, e se sono uguali ne hanno infiniti, tutti uguali (teor. X, 117 e teor. IV, 114).

Def. III. Nel secondo caso del teor. III chiameremo i due piani *piani di uguali angoli.*

Oss. II. Le rette all'infinito di questi piani sono rette di ugual distanza (def. II, 114).

Teor. IV. Un piano trasversale che passa pel punto comune a due piani di uguali angoli e li taglia in rette, forma con essi angoli esterni interni uguali (teor. V, 114).

Teor. V. Dato un piano e una retta che lo incontra in un punto, per la retta passano due piani di uguali angoli col piano dato (teor. VII, 114).

Probl. Dato un piano A_2 e un punto A_0 di esso, costruire con elementi del campo finito un piano che passi per A_0 e formi col dato angoli dati.

Si conduca da A_0 un piano B_2 normale di 2ª specie ad A_2 (coroll. VI, teor. I, 129), il quale interseca A_2 in una retta a_1 e il piano A'_2 normale di 1ª specie ad A_2 passante per A_0 in una retta a'_1. Si costruisca in B_2 una retta b_1 passante per A_0 che formi

con a_1 uno degli angoli dati. Il piano B'_2 normale di 1ª specie condotto da A_0 a B_2 passa per le rette normali $a_1^{(1)}$, $a'_1^{(1)}$ condotte da A_0 in A_2 e A'_2 alle rette a_1, a'_1. Costruita in B'_2 una retta $b_1^{(1)}$ che formi con $a_1^{(1)}$ il secondo angolo dato, il piano $(b_1 b_1^{(1)})$ è il piano richiesto (teor. VIII, 112).

Def. IV. Per angolo di due piani paralleli di 2ª specie intendiamo l'angolo misurato dalla distanza minima della retta normale alle due rette all'infinito del piano.

Coroll. Due piani che si incontrano in una retta e sono rispettivamente paralleli di 1ª specie a due piani paralleli di 2ª specie formano lo stesso angolo.

Probl. Dato un piano A_2 e una retta A_1 ad esso parallela costruire con elementi del campo finito un piano parallelo di 2ª specie che passi per A_1 e formi con A_2 un angolo dato.

Da una retta parallela alla data A_1 e in uno spazio passante per A_2 ma non per la retta A_1, si conduca un piano B_2 che formi con A_2 l'angolo dato; il piano parallelo di 1ª specie a B_2 passante per la retta data A_1 è il piano richiesto.

§ 8.

Identità dello spazio S_4 intorno a suoi punti all'infinito, alle sue rette e ai suoi piani.

141. *Teor. I. Lo spazio S_4 è identico intorno ai suoi punti all'infinito.*

Dim. analoga a quella del teorema I, 92.

Teor. II. Tutti i fasci di spazî sono identici (teor. V, 139).

Coroll. Lo spazio S_4 é identico intorno ad ogni suo piano del campo finito.

Teor. III. Un fascio di spazî paralleli è identico nella posizione delle sue parti e continuo.

Dim. analoga a quella del teor. III, 92.

Teor. IV. Tutti i fasci di spazî paralleli sono identici.

Perchè tali sono le rette che li misurano.

Coroll. Lo spazio S_4 è identico intorno ad ogni piano all' infinito.

Teor. V. I sistemi di piani intorno ad una retta sono identici.

Perchè sono identiche le stelle che essi determinano nello spazio all'infinito (teor. I, 109, teor. III, teor. I e coroll. teor. II, 15).

Coroll. Lo spazio S_4 è identico attorno alle sue rette del campo finito.

§ 9.

Triedri di 2ª specie.

142. *Def. I.* Chiameremo *triedro di 2ª specie* la figura formata da tre semipiani limitati ad un raggio comune. Per *triedro di 1ª specie,* o semplicemente per *triedro*, intenderemo sempre quello determinato da tre raggi uscenti da un punto, i quali sono sempre compresi in uno spazio a tre dimensioni (def. II. 93 e coroll. I, teor. IV, 82).

Il raggio dato è l'*asse*, i semipiani sono le *facce* piane del triedro.

I diedri formati dai semipiani si chiamano *facce a tre dimensioni;* i diedri di questo, *diedri a quattro dimensioni* rispetto ai loro punti, o *diedri* del triedro.

Ind. I. Se A_2, B_2, C_2 sono i tre semipiani, il triedro si indica col simbolo $A_2B_2C_2$; le facce a tre dimensioni coi simboli (A_2B_2), (B_2C_2), (C_2A_2).

I diedri invece a quattro dimensioni del triedro li indicheremo anche coi simboli $\widehat{A_2B_2C_2}$, $\widehat{B_2C_2A_2}$, $\widehat{C_2A_2B_2}$.

Oss. I. **Lo spazio all'infinito taglia un triedro di 2ª specie in un triedro, il quale viene misurato dal triangolo d'intersezione col piano polare del vertice del triedro stesso (oss. I e II, 113).**

Def. II. Come nel triangolo abbiamo i prolungamenti dei lati che con essi costituiscono le rette del triangolo, così nel triedro di 2ª specie abbiamo i *prolungamenti delle facce* a tre dimensioni che con queste costituiscono gli spazî a tre dimensioni del triedro. Ogni vertice del triangolo è opposto al lato degli altri due; così ogni faccia piana del triedro di 2ª specie è opposta alle facce a tre dimensioni determinate dagli altri due piani del triedro. Ogni diedro del triedro di 2ª specie è opposto alla faccia a tre dimensioni opposta al suo asse: ad es. il diedro $A_2B_2C_2$ è opposto alle facce (A_2C_2).

Def. III. Alla parte interna od esterna del triangolo all'infinito (oss. I) corrisponde la parte *interna* od *esterna* del triedro di 2ª specie, appunto come avviene pel triedro di 1ª specie (def. II, 93).

Def. IV. Il perimetro del triangolo ci dà la *superficie* del triedro di 2ª specie, che è a tre dimensioni.

Oss. II. **Le proprietà del triedro di 2ª specie si deducono come per quello di 1ª specie (93) dal triangolo completo all'infinito per mezzo dei teoremi dei n. 15, 16, 17. Esaminiamo le sue proprietà riferendoci ai teoremi del triangolo, dai quali le deduciamo per mostrare come si deve procedere in casi simili per conoscere o assicurarsi di una data proprietà di enti che non si possono intuire completamente.**

Teor. I. I diedri $\widehat{A_2B_2C_2}$, $\widehat{B_2C_2A_2}$ $\widehat{C_2A_2B_2}$ di un triedro di 2ª specie limitati dalle facce opposte a tre dimensioni coincidono (teor. I, 72 e oss. II).

Coroll. I. Un diedro di due semipiani collo spigolo nello spigolo del triedro di 2ª specie e colle facce interne al triedro o su due facce a tre dimensioni di esso, giace nell' interno del triedro (cor. III, teor. I, 51; oss. I, 72 e oss. II).

Coroll. II. Due spazî, che passano per due facce piane e per due punti interni delle facce opposte del triedro di 2ª specie, si incontrano in un semipiano della parte interna limitato all' asse del triedro (coroll. II, teor. I, 51; oss. I, 72 e oss. II).

Coroll. III. La parte interna di ogni triangolo avente i suoi vertici interni al triedro di 2ª specie, o almeno su due facce a tre dimensioni di esso, è interna al triedro.

Coroll. IV. La parte interna di ogni triedro di 1ª specie avente il suo vertice sull' asse del triedro di 2ª specie e i suoi spigoli interni al triedro, o almeno sue due facce a tre dimensioni di esso, è interna al triedro di 2ª specie.

Basta scegliere tre punti sugli spigoli del triedro di 1ª specie che saranno vertici di un triangolo la cui parte interna è interna al triedro di 2ª specie. I raggi che congiungono il vertice del triedro di 1ª specie coi punti

della parte interna del suddetto triangolo sono interni al triedro di 1ª e di 2ª specie (coroll. III, teor. I, 93).

Def. V. I prolungamenti delle facce piane di un triedro di 2ª specie sono facce di un altro triedro che si chiama *opposto* al primo.

Teor. II. Ai semipiani interni di un triedro di 2ª specie sono opposti i semipiani interni del triedro opposto (teor. II, 72 e oss. II).

Coroll. I. Se un semipiano limitato all'asse di un triedro di 2ª specie è esterno al triedro e non interno al triedro opposto, uno solo dei tre spazî che lo congiungono colle facce piane incontra una faccia opposta a tre dimensioni in un semipiano interno (coroll. teor. II, 72 e oss. II).

Teor. III. Uno spazio passante per l'asse del triedro di 2ª specie o incontra internamente due facce a tre dimensioni ed esternamente la terza, oppure incontra tutte e tre queste facce esternamente (teor. III e oss. II, 72; oss. II).

Coroll. Una retta che non incontra una faccia piana del triedro (compreso il suo opposto) incontra o due delle facce a tre dimensioni in punti interni e la terza in un punto esterno, oppure incontra le tre facce a tre dimensioni in punti esterni.

Basta considerare a tale scopo lo spazio che passa per l'asse del triedro e per la retta data.

Oss. III. Rispetto ai punti d'intersezione di una retta colle facce di un solo triedro valgono gli stessi casi considerati pel triedro di 1ª specie (oss. II, 93).

Teor. IV. In ogni triedro di 2ª specie la somma di due facce a tre dimensioni è maggiore della terza (teor. I, 76 e oss. II).

Coroll. Ogni faccia a tre dimensioni di un triedro di 2ª specie è maggiore della differenza delle altre due (coroll. teor. I, 76).

Teor. V. In un triedro di 2ª specie alla faccia a tre dimensioni maggiore è opposto il diedro maggiore, e inversamente (teor. VI, 55; oss. I, 76 e oss. II).

Coroll. Se due diedri di un triedro di 2ª specie sono uguali, le facce opposte sono uguali, e inversamente (teor. III, 42; teor. V, 55 e oss. I, 76).

Def. VI. In tal caso il triedro di 2ª specie dicesi *isoedro.* Ad ogni triangolo equilatero all'infinito corrisponde nel modo stabilito un triedro di 2ª specie che ha tutte e tre le facce a tre dimensioni uguali, e si chiama *equiedro.*

Se il triangolo all'infinito del triedro di 2ª specie è polare (def. IV, 69) i diedri delle facce a tre dimensioni e i diedri delle facce piane sono retti, e il triedro dicesi *trirettangolo.*

Teor. VI. In un triedro di 2ª specie isoedro lo spazio che unisce il piano bissettore della base con la faccia piana opposta è normale alla base, e bisseca il diedro delle facce uguali (teor. IV, 42, def. II; teor. V, 69, teor. I, 131).

Teor. VII. In due triedri di 2ª specie che hanno due facce a tre dimensioni uguali, la terza faccia è maggiore in quel triedro in cui le sta opposto il diedro maggiore; e inversamente (teor. VII, 55, oss. I, 76 e oss. II).

Def. VII. Al triangolo reciproco o supplementare di un triangolo dato all'infinito (def. I, 76) corrisponde un triedro di 2ª specie *reciproco* o *supplementare* al triedro che corrisponde al triangolo dato. Dato il triedro $A_2B_2C_2$ per ottenere il triedro reciproco basta condurre per l'asse del primo i semipiani

perpendicolari agli spazî delle facce a tre dimensioni e dalla stessa parte della faccia piana rimanente.

Teor. VIII. Se un triedro di 2ª specie è supplementare ad un altro, questo è supplementare al primo (teor. II, 76 e oss. II).

Teor. IX. I diedri delle facce e i diedri di un triedro di 2ª specie sono supplementari rispettivamente ai diedri e ai diedri delle facce del triedro supplementare (teor. III, 76 e oss. II).

Teor. X. In ogni triedro di 2ª specie ciascun angolo diedro delle facce a tre dimensioni aumentato di due retti è maggiore della somma degli altri due (teor. V, 76 e oss. II).

Teor. XI. In ogni triedro di 2ª specie la somma delle facce è minore di quattro angoli retti (teor. VI, 76 e oss. II).

Teor. XII. In ogni triedro di 2ª specie la somma degli angoli diedri delle facce a tre dimensioni è maggiore di due e minore di sei retti (teor. VII, 76).

Teor. XIII. La somma degli angoli diedri o delle facce di un triedro trirettangolo di 2ª specie è uguale a tre retti (teor. VIII, 76 e oss. II).

§ 10.

Triedri di 2ª specie uguali.

143. *Teor. I. I triedri di 2ª specie che hanno le facce parallele colla stessa semiretta all'infinito sono uguali.*

Dim. analoga a quella del teor. I, 94.

Teor. II. Due triedri di 2ª specie che hanno le facce a tre dimensioni uguali sono uguali.

Perchè i loro triangoli all'infinito corrispondenti hanno i tre lati uguali (teor. III, 17 e oss. II, 142).

Teor. III. Due triedri di 2ª specie che hanno i diedri uguali sono uguali (teor. IV, 76 e oss. II, 142).

Teor. IV. Due triedri di 2ª specie che hanno due facce a tre dimensioni, e il diedro compreso uguali sono uguali (teor. II, 42 e oss. II, 142).

Teor. V. In triedri di 2ª specie uguali a facce uguali stanno opposti diedri uguali, e inversamente (teor. I, 42 e oss. II, 142).

Teor. VI. In una delle parti in cui lo spazio S_4 è diviso da uno spazio a tre dimensioni non esistono due triedri di 2ª specie uguali aventi una faccia comune nello spazio dato (teor. IX, 55; oss. I, 74 e oss. II, 142).

Teor. VII. Due triedri di 2ª specie, che hanno due diedri e la loro faccia a tre dimensioni comune uguali, sono uguali (teor. X, 55 ; oss. I, 74 e oss. II, 142).

Teor. VIII. Due triedri di 2ª specie opposti all'asse sono uguali (teor. III, 30).

Teor. IX. I triedri trirettangoli di 2ª specie sono uguali (coroll. II, teor. III, 69).

Teor. X. Gli spazî delle facce di un triedro trirettangolo di 2ª specie dividono lo spazio S_4 in otto triedri trirettangoli di 2ª specie (teor. IV, 72; oss. II, 142) [1]).

1) Avremmo potuto tralasciare questi teoremi riferendoci all'osservaz. II, ma li abbiamo dati perchè si tratta di proprietà fondamentali dello spazio S_4 come quelle dei triedri di 1.a specie nello spazio S_3 e che servono poi a dimostrare altre proprietà fondamentali di S_4. I coroll. III, IV del teorema I, e il coroll. III del teor. II del n. 142 non derivano però per semplice proiezione in conformità al teor. III, 15 dal triangolo completo (Vedi pref.).

§ 11.

Angoloide di m spigoli e Quadriedro.

144. *Def. I.* La figura formata da m raggi $a_1, b_1, \ldots m_1$ uscenti da un punto P_0 dello spazio S_4 chiamasi *angoloide* o angolo solido a quattro dimensioni. Gli m raggi si chiamano i suoi spigoli, P_0 il suo *vertice*, i settori angolari $(a_1 b_1)$ $(a_1 c_1)\ldots$ le sue *facce piane*, i triedri $(a_1 b_1 c_1)$, $(a_1 c_1 d_1)\ldots$ le sue *facce a tre dimensioni;* i diedri formati dalle facce a tre dimensioni si chiamano i suoi *diedri a quattro dimensioni* o anche *diedri.*

I triedri di 2ª specie che hanno per assi gli spigoli dell'angoloide, e le cui facce piane contengono un altro spigolo, sono i *triedri di 2ª specie* dell'angoloide.

L'insieme delle facce a tre dimensioni dell'angoloide si chiama *superficie* dell'angoloide.

Ind. I. Il diedro formato dalle due facce $(a_1 b_1 c_1)$, $(b_1 c_1 d_1)$ lo indicheremo col simbolo $a_1 \overline{b_1 c_1} d_1$. Il triedro di 2ª specie determinato dagli spigoli $b_1 c_1 d_1$ coll'asse a_1 lo indicheremo col simbolo $a_1 . b_1 c_1 d_1$.

Def. II. La figura formata da quattro raggi a_1, b_1, c_1, d_1 uscenti da un punto P_0 dello spazio S_4 si chiama *angoloide quadrispigolo* o semplicemente *quadriedro.*

Ind. II. Lo indicheremo col simbolo $a_1 b_1 c_1 d_1$. Se P_0 è il vertice e A_0, B_0, C_0, D_0 quattro punti degli spigoli, lo indicheremo col simbolo $P_0 . A_0 B_0 C_0 D_0$.

Oss. I. Se a_1, b_1, c_1, d_1 sono gli spigoli del quadrispigolo, essi hanno all'infinito quattro punti $\alpha_{0\infty}, \beta_{0\infty}, \gamma_{0\infty}, \delta_{0\infty}$ che determinano un tetraedro. Gli angoli delle facce piane del quadriedro sono misurate dagli spigoli del suo tetraedro all'infinito, così gli angoli delle sue facce a tre dimensioni e i suoi diedri sono misurati dagli angoli delle facce piane e dagli angoli diedri del tetraedro. Per conseguenza, le proprietà degli spigoli degli angoli delle facce piane e dei diedri del tetraedro all'infinito, ossia di uno spazio completo a tre dimensioni, danno altrettante proprietà degli angoli delle facce piane a tre dimensioni e dei diedri del quadriedro.

Def. III. La parte interna ed esterna del tetraedro $\alpha_{0\infty}\beta_{0\infty}\gamma_{0\infty}\delta_{0\infty}$ dà la parte interna ed esterna del quadriedro.

Def. IV. Come nel tetraedro all'infinito abbiamo i prolungamenti dei lati e delle facce che con essi costituiscono le sei rette e i quattro piani del tetraedro, così nel quadriedro abbiamo i *prolungamenti* delle facce piane e di quelle a tre dimensioni, che con queste costituiscono i sei piani del triedro e i quattro spazî a tre dimensioni del quadriedro.

Ogni vertice del tetraedro è opposto alle facce degli altri tre, ogni spigolo è opposto allo spigolo degli altri due, così ogni spigolo del quadiedro è *opposto* alle facce a tre dimensioni degli altri tre, e ogni faccia piana è *opposta* alla faccia piana che contiene gli altri due spigoli.

Ogni triedro del tetraedro è opposto alla faccia opposta al suo vertice, ogni diedro è opposto al diedro dello spigolo opposto, così ogni triedro di 2ª specie del quadriedro è *opposto* alla faccia opposta al suo spigolo, ogni diedro

a quattro dimensioni è *opposto* al diedro che ha per asse la faccia piana opposta.

Oss. II. Gli spazî di un quadriedro separano lo spazio S_4 intorno al suo vertice in 16 quadriedri (oss. II, 115).

Teor. I. Le parti interne dei triedri di 2ª *specie del quadriedro limiati alle facce opposte coincidono* (teor. I, 95; oss. I, 115 e oss. I).

Coroll. I. Le parti interne dei diedri a quattro dimensioni del quadriedro limitate dalle facce stesse a quattro dimensioni coincidono (coroll. I, teor. I, 95).

Coroll. II. Ogni angolo, che ha i suoi lati interni al quadriedro o su due facce a tre dimensioni di esso e collo stesso vertice del quadriedro, è interno al quadriedro (coroll. II, teor. I, 95).

Coroll. III. La parte interna di un triedro di 1ª *specie collo stesso vertice del quadriedro e cogli spigoli interni ad esso, o almeno su due facce a tre dimensioni di esso, giace nell' interno del quadriedro* (coroll. III, teor. 95).

Coroll. IV. La parte interna di ogni tetraedro avente i suoi vertici nell'interno del quadriedro, o almeno su due facce a tre dimensioni di esso, giace internamente al quadriedro.

La facce del tetraedro sono interne al quadriedro (coroll. III), e ogni segmento interno al tetraedro che ha i suoi estremi, ad es. A_0,B_0, nell'interno di due facce del tetraedro dà un angolo P_0. A_0B_0 interno al quadriedro, e poichè (A_0B_0) giace internamente all'angolo P_0.A_0B_0, giace pure internamente al quadriedro (coroll. II). Ma ogni segmento interno (X_0Y_0) incontra (prolungato, se occorre) due facce almeno del tetraedro in punti interni (teor. V, 95), il cui segmento che comprende (X_0Y_0) è situato internamente al quadriedro, quindi il corollario è dimostrato.

Teor. II. Ai raggi interni di un quadriedro sono opposti i raggi interni del quadriedro opposto (teor. I, 115 e oss. I).

Teor. III. Uno spazio che passa pel vertice del quadriedro, non passa per alcun spigolo di esso e incontra una faccia piana in un raggio interno:

1° *o incontra in un raggio interno altre due facce piane che passano colla prima per lo stesso spigolo.*

2° *o incontra in punti interni altre tre facce piane, una delle quali è opposta alla prima e le altre due sono opposte fra loro* (teor. II, 95 e oss. II, 115).

Teor. IV. Se un piano passante pel vertice del quadriedro non sega alcuna delle sue facce piane in una retta, incontra una faccia a tre dimensioni in un raggio interno, esso taglia un'altra di queste faccie in un raggio interno e le altre in raggi esterni (teor. III, 95 e oss. II, 115).

Coroll. Un piano passante pel vertice del quadriedro che sega tre facce a tre dimensioni in raggi esterni taglia esternamente la quarta faccia.

Teor. V. Un piano passante pel vertice del quadriedro, che ha un raggio interno ad esso, incontra la superficie del quadriedro in due raggi (teor. IV, 95 e oss. II, 115).

Teor. VI. Due quadriedri i cui spigoli sono paralleli nel medesimo verso sono uguali.

Difatti hanno lo stesso tetraedro all'infinito.

Teor. VII. Due quadriedri opposti al vertice sono uguali.

Difatti i loro tetraedri all'infinito essendo opposti sono uguali (teor. II, 115).

Teor. VIII. Non vi sono due quadriedri uguali aventi tre spigoli comuni e gli altri due dalla stessa parte rispetto alla loro faccia comune a tre dimensioni (teor. V, 95 e oss. I, 115).

Def. V. Se il tetraedro all' infinito del quadriedro è coniugato polare (def. VI, 108), il quadriedro si chiama *quadrirettangolo.*

Teor. IX. In un quadriedro quadrirettangolo gli angoli piani, i diedri della facce piane e i diedri della facce a tre dimensioni sono retti (teor. XI, 110; def. I, 39, oss. I. 136 e teor. V, 139).

Teor. X. I quattro spazì a tre dimensioni di un quadriedro quadrirettangolo dividono lo spazio S_4 in 16 *quadriedri quadrirettangoli due a due opposti* (teor. II, 115).

Teor. XI. I quadriedri quadrirettangoli sono identici in 24 maniere diverse (teor. XII, 110).

§ 12.

Pentaedro.

145. *Def. I.* La figura formata da cinque punti dello spazio S_4 non situati in uno spazio S_3, dalle rette e dai piani e dagli spazî a tre dimensioni determinati dai cinque punti si chiama *pentaedro.* I punti si chiamano *vertici,* i loro segmenti *spigoli,* i loro triangoli *facce piane,* i loro tetraedri *facce a tre dimensioni* del pentaedro. Così i quadriedri formati cogli spigoli, i triedri di 1ª e di 2ª specie, i diedri della facce a tre dimensioni aventi per vertici e per assi i vertici e gli spigoli si chiamano *quadriedri, triedri di* 1ª *e di* 2ª *specie* e *diedri del pentaedro.*

Un vertice dicesi *opposto* alla faccia a tre dimensioni che contiene gli altri quattro; così un spigolo è *opposto* alla faccia piana che contiene gli altri tre.

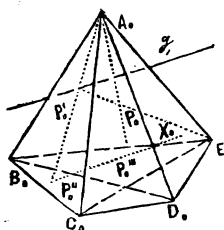
Ind. I. Il pentaedro dato dai punti A_0, B_0, C_0, D_0, E_0 lo indicheremo col simbolo $A_0B_0C_0D_0E_0$.

Teor. I. Le parti dello spazio interno ai cinque quadriedri del pentaedro limitate dalle faccie opposte ai loro vertici coincidono.

La parte interna del tetraedro $A_0B_0C_0D_0$ è situata nell'interno del quadriedro $E_0 . A_0B_0C_0D_0$ (coroll. IV, teor. I, 144). Sia P'_0 un punto interno del tetraedro anzidetto, il segmento $E_0P'_0$ giace nell'interno dello stesso quadriedro.

Sia P_0 un punto di questo segmento, basta dimostrare che esso è interno ad uno qualunque degli altri quadriedri del pentaedro.

Il raggio $A_0P'_0$ è situato dentro al triedro $A_0 . B_0C_0D_0$ e quindi $E_0A_0P_0$ è in-

fig. 108

terno al quadriedro $A_0 . B_0C_0D_0E_0$ (cor. II, teor. I, 144), e perciò anche il segmento A_0P_0 è interno al medesimo quadriedro. Dunque il punto P_0 giace nell'interno del quadriedro $A_0 . B_0C_0D_0E_0$, e per la stessa ragione anche degli altri tre. (fig. 108).

Def. II. Le parti interne dei quadriedri di un pentaedro costituiscono ciò che si chiama la *parte interna* del pentaedro. La parte rimanente dello spazio S_4, compresa la superficie, si chiama *parte esterna.*

Def. III. Per un punto *interno* o *esterno* al pentaedro s'intende un punto della parte interna od esterna, ma non situato sulla superficie.

Se una figura ha tutti i suoi punti interni o esterni al pentaedro, anche se ne ha alcuni sulla superficie di esso, si chiama *interna* o *esterna* al pentaedro.

Coroll. I. Le parti interne dei triedri di 2ª specie e dei diedri a quattro dimensioni limitate dalle facce a tre dimensioni del pentaedro coincidono.

Coroll. II. Il segmento di due punti interni del pentaedro o di due facce a tre dimensioni di esso giace nell'interno del pentaedro.

Siano X_0, Y_0 i due punti interni. L'angolo $A_0X_0Y_0$ giace nell'interno del quadriedro $A_0 . B_0C_0D_0E_0$ (coroll. II, teor. I, 144 e teor. I).

Siano X'_0, Y'_0 i punti d'intersezione dei raggi A_0X_0, A_0Y_0 colla faccia opposta $B_0C_0D_0E_0$. Il triangolo $A_0X'_0Y'_0$ giace nell'interno del quadriedro suddetto, perchè vi giace pure il triedro $A_0 . B_0X'_0Y'_0$ (coroll. II, teor. I, 144). Giacendo (X_0Y_0) nell'interno di questo triangolo (coroll. III, teor. II, 51), esso è situato nell'interno del pentaedro.

Coroll. III. La parte interna di un triangolo che ha i suoi vertici interni al pentaedro o sulla superficie, ma non sulla stessa faccia a tre dimensioni, giace nell'interno del pentaedro.

Dim. analoga a quella del coroll. III del teor. I, n. 95.

Teor. II. Uno spazio a tre dimensioni che non passa per alcuno dei vertici del pentaedro, e incontra uno dei suoi spigoli in un punto interno, incontra internamente:

1.° *o quattro spigoli che passano per un medesimo vertice;*

2.° *oppure due terne di spigoli passanti per due vertici, eccettuati lo spigolo comune e gli spigoli della faccia opposta.*

Difatti siano A_0, B_0, C_0, D_0, E_0 i vertici del pentaedro, e supponiamo che uno spazio S_3, che non passa per alcuno dei vertici, incontri lo spigolo (A_0B_0) in un punto interno. Consideriamo lo spazio del tetraedro $A_0B_0C_0D_0$ che verrà incontrato dallo spazio S_3 in un piano S_2. Questo piano incontrerà internamente o altri due spigoli che passano per A_0 o per B_0, per es. gli spigoli (A_0C_0), (A_0D_0), oppure incontrerà lo spigolo opposto ad (A_0B_0), cioè (C_0D_0), e due altri spigoli opposti, per es. (A_0C_0), (B_0D_0). Abbiamo dunque due soli casi possibili (teor. II, 95), cioè lo spazio S_3 o incontra gli spigoli

$$(A_0B_0),\ (A_0C_0),\ (A_0D_0) \qquad (1)$$

oppure gli spigoli:

$$(A_0B_0),\ (A_0C_0),\ (C_0D_0),\ (B_0D_0) \qquad (2)$$

In uno e nell'altro caso dobbiamo ritenere dato un piano di S_3 situato nello spazio $A_0B_0C_0D_0$. Consideriamo ora il tetraedro $A_0B_0C_0E_0$. Il piano S'_2 d'intersezione di S_3 collo spazio di questo tetraedro incontra internamente nel 1° e nel 2° caso gli spigoli (A_0B_0), (A_0C_0), quindi o incontra internamente (teor. II, 95), gli spigoli:

$$(A_0B_0),\ (A_0C_0),\ (A_0E_0) \qquad (1')$$

oppure gli spigoli:

$$(A_0B_0),\ (A_0C_0),\ (C_0E_0),\ (B_0E_0) \qquad (2')$$

Rispetto ai due tetraedri $A_0B_0C_0D_0$, $A_0B_0C_0E_0$ lo spazio S_3 può segare internamente gli spigoli del tipo

$$(A_0B_0),\ (A_0C_0),\ (A_0D_0),\ (A_0E_0) \qquad (3)$$

oppure

$$(A_0B_0),\ (A_0C_0),\ (C_0D_0),\ (B_0D_0),\ (C_0E_0),\ (B_0E_0) \qquad (4)$$

Gli altri due casi sono contenuti nel tipo (4).

Poichè lo spazio S_3 si può comportare in due modi diversi rispetto al tetraedro $A_0B_0C_0E_0$, ed è pienamente determinato tanto in uno come nell'altro caso, prendendo cioè nel 2° un punto interno allo spigolo (C_0E_0), oppure (B_0E_0), così dobbiamo ritenere lo spazio S_3 pienamente determinato rispetto agli altri tetraedri, e quindi determinati anche dai precedenti i suoi modi d'intersezione cogli spigoli rimanenti.

Consideriamo dunque il tetraedro $A_0B_0D_0E_0$.

Nel caso (3) lo spazio S_3 interseca internamente gli spigoli (A_0B_0), (A_0D_0), (A_0E_0), e quindi non incontrerà altri spigoli di esso in punti interni (teor. II, 95).

Nel caso (4) taglia invece gli spigoli (A_0B_0), (B_0D_0), (B_0E_0).

Il tetraedro $A_0C_0D_0E_0$ è incontrato internamente nel caso (3) negli spigoli (A_0C_0), (A_0D_0), (A_0E_0); e nel caso (4) negli spigoli (A_0C_0), (C_0D_0), (C_0E_0).

Il rimanente tetraedro $B_0C_0D_0E_0$ nel primo caso viene incontrato esternamente, mentre nel secondo caso viene segato internamente negli spigoli (C_0D_0), (B_0D_0), (C_0E_0), (B_0E_0) a due a due opposti.

Il teorema è dunque pienamente dimostrato.

Coroll. I. Separati i vertici del pentaedro in due gruppi, uno spazio può incontrare internamente gli spigoli che uniscono i vertici di un gruppo con quelli dell'altro; e quando esso incontra internamente uno spigolo, rispetto ai suoi punti d'intersezione interni cogli spigoli, questi si separano sempre in due tali gruppi.

Ciò risulta evidentemente dalla dimostrazione precedente. I gruppi possibili sono dunque della forma A_0 $(B_0C_0D_0E_0)$; A_0B_0 $(C_0D_0E_0)$.

Coroll. II. Se uno spazio che non passa per alcuno dei vertici di un pentaedro interseca quattro spigoli passanti per un vertice in punti esterni, esso taglia tutti gli altri spigoli in punti esterni.

Teor. III. Se una retta non incontra alcuna delle facce piane del pentaedro e interseca una faccia a tre dimensioni in un punto interno, taglia un'altra di queste facce in un punto interno e le altre in punti esterni.

Siano g_1 la retta e $A_0B_0C_0D_0E_0$ il pentaedro, P'_0 il punto comune a g_1

e alla faccia $A_0B_0C_0D_0$. Il piano A_0g_1 incontra la faccia $A_0B_0C_0D_0$ secondo la retta $A_0P'_0$ che taglia la faccia piana $B_0C_0D_0$ in un punto interno P''_0, perchè P'_0 è per ipotesi interno al tetraedro $A_0B_0C_0D_0$. Il piano A_0g_1 incontra inoltre la faccia a tre dimensioni $B_0C_0D_0E_0$ secondo una retta, la quale passando per il punto P''_0 deve segare un'altra faccia di esso, per es. $B_0D_0E_0$ in un punto interno P'''_0. Il segmento $A_0P'''_0$ è l'intersezione del piano A_0g_1 colla faccia $A_0B_0D_0E_0$.

Ora la retta g_1, incontrando il lato $A_0P'_0$ del triangolo $A_0P''_0P'''_0$ in un punto interno P'_0, deve intersecare un'altro lato in un punto interno (teor. III, 51), e poichè il triangolo $A_0P''_0P'''_0$ è interno al pentaedro, vuol dire che la retta g_1 sega almeno un'altra faccia del pentaedro in un punto interno, per es. la faccia $A_0B_0D_0E_0$. Non può essere che incontri un'altra faccia in un punto interno. Intanto da ciò che precede risulta che non può incontrare il lato $(P'_0P'''_0)$ in un punto interno, e quindi nemmeno la faccia $B_0C_0D_0E_0$. Sia X_0 il punto di intersezione della retta $P''_0P'''_0$ col piano $B_0C_0E_0$, il quale deve essere esterno a questa faccia (teor. III, 95), e quindi la retta A_0X_0 è esterna al triedro $A_0 . B_0C_0E_0$. Il punto comune alla retta g_1 e alla faccia $A_0B_0C_0E_0$ è situato sulla retta A_0X_0, dunque esso è esterno al pentaedro. Analogamente per la rimanente faccia $A_0C_0D_0E_0$, ed il teorema è così dimostrato (fig. 108).

Teor. IV. Una retta che ha un punto interno a un pentaedro incontra la superficie di esso in due punti.

Dim. analoga a quella del teor. IV, 95.

Teor. V. Non vi sono due pentaedri identici aventi una faccia a tre dimensioni in comune e coi vertici opposti dalla stessa parte di questa faccia.

Dim. analoga a quella del teor. V del n. 95 basandosi sul teor. VIII, 144.

§ 13.

Versi della stella di 2ª specie, dei triedri di 2ª specie e dei quadriedri — Versi dello spazio e dei pentaedri.

146. *Def. I.* Nella stella (P_0S_3) i versi dello spazio direttore (def. IV, 96) determinano i *versi della stella.* Come spazio direttore di ogni stella si può considerare lo spazio $\pi_{3\infty}$ all'infinito (teor. I, def. I, 123).

Teor. I. I versi della stella di 2ª specie sono determinati da quelli di un diedro di un suo triedro di 2ª specie.

Perchè tale è la proprietà dei versi dello spazio all'infinito rispetto a quelli di un diedro di un suo triedro (teor. XVII, 96 e oss. I, 116).

Coroll. Un verso di una stella determina versi uguali dei diedri dei suoi triedri di 2ª specie (coroll. teor. XVII, 96 e oss. I, 116).

Teor. II. Un verso di un diedro in un triedro di 2ª specie determina i due versi di una stella a cui appartiene secondo che la si considera dall' uno o dall' altro punto all' infinito dello spigolo del triedro.

Difatti un verso dello spazio all'infinito non viene determinato dal verso di una terna di raggi $(a_{1\infty}b_{1\infty}c_{1\infty})$ di un triedro senza che sia dato il vertice del triedro stesso (oss. I, 116).

Teor. III. I triedri di 2ª specie $a_1 . b_1 c_1 d_1$, $b_1 . a_1 d_1 c_1$, $c_1 . d_1 a_1 b_1$, $d_1 . c_1 b_1 a_1$ *di un quadriedro* $a_1 b_1 c_1 d_1$ *sono dello stesso verso.*

Difatti tale è la proprietà dei triedri all'infinito del quadriedro (teor. XIV, 96 e oss. I, 116).

Def. II. I versi dei diedri di 2ª specie del quadriedro si chiamano *versi* del quadriedro. Cogli stessi simboli indicheremo anche i versi della superficie a tre dimensioni del quadriedro.

Oss I. Per questa indicazione seguiamo la stessa regola del tetraedro (ind. I, 96).

Teor. IV. Le permutazioni pari nel simbolo $a_1 b_1 c_1 d_1$ *di un quadriedro danno uno dei suoi versi, le dispari il verso opposto* (teor. XV, 96 e oss. I, 116).

Teor. V. Se due triedri di 2ª specie di due quadriedri di una stella di 2ª specie sono dello stesso verso, sono pure dello stesso verso i due quadriedri (teor. XVI, 96 e oss. I, 116).

Teor. VI. Se due triedri di 2ª specie di due quadriedri sono dello stesso verso o di verso opposto lo sono pure i due quadriedri.

Come pel teor. VII, 96.

Teor. VII. Due quadriedri $a_1 b_1 c_1 d_1$, $a_1 b_1 c_1 d_1$ *aventi il medesimo vertice* P_0 *e una faccia a tre dimensioni comune sono dello stesso verso o di verso opposto secondo che i rimanenti spigoli* d_1 *ed* e_1 *di essi sono situati dalla stessa parte o da parti opposte rispetto alla faccia comune.*

Difatti nel primo caso sono dello stesso verso, perchè lo sono i loro tetraedri all'infinito, mentre nel secondo sono di verso opposto (coroll. I, teor. VIII, teor. XVI, 96 e oss. I, 116) (fig. 109).

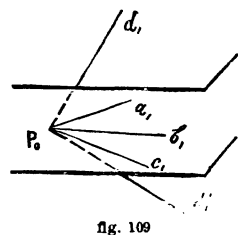



fig. 109

Coroll. I. Due quadriedri $A_0 . B_0 C_0 D_0 E_0$, $A'_0 . B_0 C_0 D_0 E_0$ *i cui spigoli si incontrano in uno spazio negli stessi quattro punti* $B_0 C_0 D_0 E_0$ *sono dello stesso verso o di verso opposto secondo che i loro vertici* A_0 *e* A'_0 *sono situati dalla stessa parte o da parti opposte dello spazio dato.*

Difatti nel primo caso i quadriedri $C_0 . A_0 B_0 D_0 E_0$, $C_0 . A'_0 B_0 D_0 E_0$ sono diretti nel medesimo verso, e quindi anche i triedri di 2ª specie $C_0 A_0 . B_0 D_0 E_0$ $C_0 A_0' . B_0 D_0 E_0$ nella stella di centro C_0. Gli stessi triedri considerati invece nella direzione opposta del loro spigolo, cioè nelle stelle di centri A_0 e A'_0, sono di verso opposto ai primi due (teor. II), ossia hanno lo stesso verso dei triedri opposti in C_0, i quali sono dello stesso verso (coroll. teor. I, 116 e teor. IX, 96 e oss. I, 116 e oss. I).

Dunque i due quadriedri $A_0 . B_0 C_0 D_0 E_0$, $A'_0 . B_0 C_0 D_0 E_0$ sono dello stesso verso perchè lo sono quelli di due loro triedri di 2ª specie (teor. VI).

Coroll. II. Un verso di uno spazio determina versi uguali nelle stelle i cui centri sono dalla stessa parte dello spazio, e versi opposti se i loro centri sono situati da parti opposte dello spazio dato.

Teor. VIII. Stelle di 2ª specie dello stesso verso o di verso opposto ad una terza hanno versi uguali.

Come pel teor. IX, 96.

Coroll. *Due stelle di 2ª specie l'una dello stesso verso l' altra di verso opposto ad una terza sono di verso opposto.*

Teor. IX. Due quadriedri $a_1b_1c_1d_1$, $a_1b'_1c'_1d'_1$ *che hanno uno spigolo comune e le due facce* $(b_1c_1d_1)$, $(b'_1c'_1d'_1)$ *in un medesimo spazio dello stesso verso o di verso opposto, sono dello stesso verso o di verso opposto.*

Dim. analoga a quella del teor. X, 96.

Teor. X. Due quadriedri $A_0.B_0C_0D_0E_0$. $A_0.B'_0C'_0D'_0E'_0$, *collo stesso vertice* A_0 *e i cui spigoli incontrano uno spazio in due tetraedri* $B_0C_0D_0E_0$, $B'_0C'_0D'_0E'_0$ *diretti o no nello stesso verso, sono dello stesso verso o di verso opposto.*

Dim. analoga a quella del teor. XI, 96.

Teor. XI. Due quadriedri $A_0.B_0C_0D_0E_0$, $A'_0.B'_0C'_0D'_0E'_0$ *sono dello stesso verso o di verso opposto secondo che le loro sezioni* $B_0C_0D_0E_0$, $B'_0C'_0D'_0E'_0$ *con uno spazio* S_3 *sono o no dello stesso verso, e i loro vertici sono o no situati dalla stessa parte di* S_3.

Se invece le due sezioni sono di verso opposto i due quadriedri nel primo caso sono di verso opposto, nel secondo dello stesso verso.

Difatti nel primo caso i quadriedri $A_0.B_0D_0D_0E_0$, $A'_0.B_0C_0D_0E_0$ sono dello stesso verso (coroll. I, teor. VII).

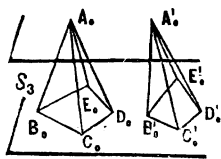



fig 110.

Ma $A'_0.B_0C_0D_0E_0$ e $A'_0.B'_0C'_0D'_0E'_0$ sono pure dello stesso verso (teor. X), dunque i due quadriedri dati sono dello stesso verso (teor. VIII) (fig. 110).

Coroll. I. Due quadriedri $a_1b_1c_1d_1$, $a'_1b'_1c'_1d'_1$ *aventi tre spigoli* $b_1c_1d_1$, $b'_1c'_1d'_1$ *in un medesimo spazio a tre dimensioni e i triedri* $b_1c_1d_1$, $b'_1c'_1d'_1$ *diretti nello stesso verso, sono dello stesso verso o di verso opposto, secondo che gli spigoli rimanenti* a_1 *e* a'_1 *sono o no situati dalla stessa parte dello spazio.*

Se invece i due triedri $b_1c_1d_1$, $b'_1c'_1d'_1$ *sono di verso opposto, nel primo caso i due quadriedri sono di verso opposto e nel secondo sono dello stesso verso.*

Difatti se E_0, E'_0 sono i vertici dei due quadriedri, scelti in $a_1b_1c_1d_1$, $a_1b'_1c'_1d'_1$ i punti A_0, B_0, C_0, D_0; A'_0, B'_0, C'_0, D'_0, i quadriedri $A_0.B_0C_0D_0E_0$, $A'.B'_0C'_0D'_0E'_0$ sono nel primo caso dello stesso verso (teor. XI).

Sono dunque del medesimo verso i due triedri di 2ª specie $A_0E_0.B_0C_0D_0$, $A'_0E'_0.B_0C_0D_0$ nelle stelle di centri A_0 e A'_0, e quindi anche gli stessi triedri nelle stelle di centri E_0 ed E'_0, dunque ancora i quadriedri $E_0.A_0B_0C_0D_0$, $E'_0.A'_0B'_0C'_0D'_0$, ossia i quadriedri dati (fig. 110).

Coroll. II. Due quadriedri $a_1b_1c_1d_1$, $a'_1b'_1c'_1d'_1$ *con due spigoli* b_1 *e* b'_1 *sulla medesima retta e diretti in verso contrario, e tali che gli spigoli* c_1, c'_1 *si incontrino in un punto* C_0; d_1 *e* d'_1 *in un punto* D_0 *e i rimanenti spigoli* a_1 *e* a'_1 *siano situati dalla stessa parte dello spazio* $c_1c'_1d_1d'_1$, *sono di verso opposto.*

Se invece a_1 *e* a'_1 *sono situati da parti opposte rispetto a quello spazio, i due quadriedri sono dello stesso verso.*

Se b_1 *e* b'_1 *sono diretti nel medesimo verso, nel primo caso i due quadriedri hanno il medesimo verso e nel secondo versi opposti.*

Difatti se b_1 e b'_1 sono sulla medesima retta e di verso opposto, ed E_0, E'_0 i

fig. 111

vertici dei due quadriedri, i triedri $(b_1c_1d_1)$, $(b'_1c'_1d'_1)$ sono nel primo caso di verso opposto nel tetraedro $E_0E'_0C_0D_0$; basta per persuadersi adoperare per i due triedri suddetti le indicazioni $E_0.E'_0C_0D_0$ $E'_0.E_0C_0D_0$ (teor. XV, 96).

I quadriedri $a_1b_1c_1d_1$, $a'_1b'_1c'_1d'_1$, se a_1 e a'_1 sono dalla stessa parte dello spazio $E_0E'_0C_0D_0$, sono di verso opposto, altrimenti sono dello stesso verso (coroll. I) (fig. 111). Similmente, se b_1 e b'_1 sono dello stesso verso, i triedri $b_1c_1d_1$, $b'_1c'_1d'_1$ sono invece dello stesso verso.

Teor. XII. Dato un quadriedro $a_1b_1c_1d_1$, se si scambia un numero dispari di spigoli coi loro prolungamenti si ottiene un quadriedro di verso opposto al dato; se invece si fa uno scambio pari il quadriedro che si ottiene è del medesimo verso.

Perchè ciò avviene rispetto ai vertici di un tetraedro nello spazio all'infinito (teor. I, 116).

Coroll. I. Due quadriedri (o due angoloidi) opposti al vertice sono dello stesso verso (teor. I e II, 116).

Coroll. II. Se gli spigoli di un quadriedro sono paralleli a quelli di un altro quadriedro, e inoltre due o tutti quattro gli spigoli dell'uno sono diretti nello stesso verso di quelli dell'altro, i due quadriedri sono dello stesso verso. Negli altri casi sono di verso opposto.

Perchè tale è la proprietà dei loro tetraedri all'infinito (teor. I, 116).

Teor. XIII. I versi dei quadriedri $A_0.B_0C_0D_0E_0$, $B_0.C_0D_0E_0A_0$, $C_0.D_0E_0A_0B_0$, $D_0.E_0A_0B_0C_0$, $E_0.A_0B_0C_0D_0$ del pentaedro $A_0B_0B_0D_0E_0$ sono uguali.

Se nel teorema precedente i due spigoli a_1 ed a'_1 si incontrano in un punto E_0, essi sono situati dalla medesima parte dello spazio $A_0B_0C_0D_0$, e si ha in tal caso un pentaedro $A_0B_0C_0D_0E_0$ (fig. 108).

Pel teorema precedente i due quadriedri $A_0.B_0C_0D_0E_0$ e $B_0.A_0C_0D_0E_0$ sono diretti in verso opposto, mentre il primo e il quadriedro $B_0.C_0D_0E_0A_0$ sono diretti nel medesimo verso (teor. XV, 96 e teor. X). Lo stesso accade per gli altri quadriedri.

Teor. XIV. Le permutazioni pari dei vertici di un pentaedro danno un verso dello spazio S_4, quelle dispari il verso opposto.

Siccome in ogni quadriedro del pentraedro, per es. $A_0.B_0C_0D_0E_0$ si ottiene lo stesso verso sostituendo alla permutazione $B_0C_0D_0E_0$ una permutazione pari qualsiasi dei quattro vertici, e siccome d'altra parte tenendo fissi i vertici A_0, B_0, C_0, D_0, E_0 dei cinque quadriedri del pentraedro, e facendo sui loro simboli l'operazione testè indicata, si ottengono tutte le permutazioni pari dei cinque vertici $A_0B_0C_0D_0E_0$, così il teorema è dimostrato.

Def. III. I versi di un quadriedro di un pentraedro si chiamano *versi* del pentaedro.

Oss. II. Vale pei versi dello spazio S_4 l'analoga definizione a quella dello spazio S_3 (def. IV, 96).

Teor. XV. I versi dello spazio S_4 sono determinati da quelli di un diedro di un triedro di 2ª specie.

Perchè lo sono quelli di una sua stella di 2ª specie (teor. I).

Coroll. Un verso dello spazio determina uguali versi dei suoi triedri di seconda specie collo spigolo limitato ad un punto.

Dim. analoga a quella del coroll, teor. IX, 61.

Teor. XVI. Un verso di un triedro di 2ª specie determina i due versi dello spazio secondo che lo si considera dall'uno o dall' altro punto all'infinito dello spigolo (teor. II).

§ 14.

Versi delle figure identiche. — Figure congruenti e simmetriche.

147. *Def. I.* Due punti aventi la medesima distanza da uno spazio S_3 e situati nella medesima normale a questo spazio si chiamano *simmetrici rispetto allo spazio* S_3, che è lo *spazio di simmetria.*

E due figure sono *simmetriche* rispetto ad uno spazio a tre dimensioni, quando i punti dell'una sono *simmetrici* ai punti dell' altra.

Coroll. Le due parti dello spazio S_4, *in cui viene diviso da uno spazio* S_3, *sono simmetriche rispetto a questo spazio.*

Dim. analoga al coroll. I, def. 97.

Teor. I. Un segmento ha per figura simmetrica rispetto ad uno spazio S_3 *un altro segmento uguale ad esso, e le rette dei due segmenti si incontrano in un punto di questo spazio.*

Se sono date due coppie di punti simmetrici A_0, A'_0; B_0, B'_0; le due rette $A_0 A'_0$, $B_0 B'_0$ sono parallele, perchè sono perpendicolari al medesimo spazio S_3 a tre dimensioni (coroll. II, teor. II, 128), e sono situate in un piano ad esso perpendicolare (teorema II, 130), che lo incontra secondo una retta $S_0 S'_0$, essendo S_0, S'_0 i punti d'intersezione delle rette $A_0 A'_0$, $B_0 B'_0$ con lo spazio S_3 (fig. 112). I due segmenti $(A_0 B_0)$, $(A_0' B'_0)$ sono simmetrici rispetto alla retta $S_0 S'_0$, e quindi anche rispetto allo spazio S_3, perchè una normale alla retta $S_0 S'_0$ nel piano suddetto è pure normale allo spazio S_3. Le loro rette si incontrano dunque in un punto della retta $S_0 S'_0$.

fig. 112

Teor. II. Un piano, o uno spazio, ha per simmetrico un altro piano, o spazio, che incontra il primo in una retta, o in un piano, dello spazio di simmetria.

Come pel teor. II, 97. Per la 2ª parte basta appoggiarsi al teor. XIV, 122.

Teor. III. Due quadriedri simmetrici rispetto ad uno spazio a tre dimensioni sono identici e di verso opposto.

Dim. analoga a quella del teor. IV, 97.

148. *Teor. I. La corrispondenza fra due figure identiche dello spazio* S_4 *è determinata pienamente da due quadriedri corrispondenti uguali.*

Siano $a_1 b_1 c_1 d_1$, $a'_1 b'_1 c'_1 d'_1$ i due quadriedri di vertici A_0, A'_0 (fig. 113). Se

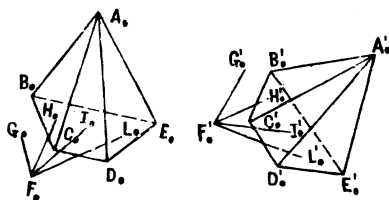



fig. 113

sugli spigoli del primo si prendono i quattro punti B_0, C_0, D_0, E_0 e su quelli corrispondenti del secondo i punti B'_0, C'_0, D'_0, E'_0 a distanze da A'_0 uguali a quelle che hanno i punti B_0, C_0, D_0, E_0 dal punto A_0, i triangoli $A_0B_0C_0$, $A'_0B'_0C'_0$ sono uguali per avere due lati e l'angolo compreso uguali, e quindi $(B_0C_0) \equiv (B'_0C'_0)$; dunque gli spigoli dei due tetraedri $B_0C_0D_0E_0$, $B'_0C'_0D'_0E'_0$ sono uguali, e perciò i due pentaedri $A_0B_0C_0D_0E_0$, $A'_0B'_0C'_0D'_0E'_0$ sono figure corrispondenti.

Sia ora F_0 un punto della prima figura e congiungiamolo con A_0; la retta A_0F_0 incontrerà lo spazio della faccia opposta $B_0C_0D_0E_0$ in un punto X_0. Siccome la figura dello spazio $B_0C_0D_0E_0$ deve essere identica a quella dello spazio $B'_0C'_0D'_0E'_0$, ne viene (teor. I, 98) che in questa vi sarà un punto F'_0 corrispondente a F_0. Prendendo sulla retta $A'_0X'_0$ un punto F'_0 in modo che si abbia $(A'_0F'_0) \equiv (A_0F'_0)$, e inoltre $(X'_0F'_0) \equiv (X_0F_0)$, il punto F'_0 sarà il punto corrispondente del punto F_0.

Coroll. I. La corrispondenza d'identità fra due figure identiche è determinata da due pentraedri corrispondenti.

Dim. analoga a quella del coroll. teor. I, 98.

Coroll. II. Due figure identiche non possono avere cinque punti corrispondenti comuni non situati in uno spazio a tre dimensioni.

Teor. II. Nella corrispondenza di due figure identiche lo spazio all'infinito corrisponde a sè medesimo.

Dim. analoga a quella del teor. II, 98.

Teor. III. I quadriedri corrispondenti di due figure identiche dello spazio S_4 sono dirette nel medesimo verso o in verso opposto secondo che due qualunque di essi hanno o no lo stesso verso.

Dim. analoga a quella del teor. III, 98 (fig. 113).

Def. I. Due figure identiche, i cui quadriedri corrispondenti uguali hanno il medesimo verso, si chiamano *dello stesso verso* o *congruenti*; nel caso contrario si dicono di *verso opposto* o *simmetriche.*

Coroll. I. Due figure congruenti o simmetriche ad una terza sono congruenti fra loro.

Coroll. II. Due figure, l'una congruente e l'altra simmetrica ad un terza sono simmetriche fra loro.

Questi corollari derivano immediatamente dal teor. precedente insieme col teor. VIII. del n. 146.

Teor. IV. Due figure congruenti aventi quattro punti corrispondenti comuni e non situati in un piano coincidono, e se hanno tre punti corrispondenti in comune hanno in comune tutti i punti del piano dei tre punti.

Dim. analoga a quella del teor. IV, 98.

Teor. V. Se due figure simmetriche hanno quattro punti corrispondenti comuni hanno comuni i punti dello spazio determinato dai primi quattro, e sono simmetriche rispetto a questo spazio.

Dim. analoga a quella del teor. V, 98.

Teor. VI. Le figure rettilinee determinate da due gruppi di m punti sono identiche se i segmenti di m — 5 *di essi coi rimanenti e di questi cinque sono ordinatamente uguali.*

Dim. analoga a quella del teor. VI del n. 98.

§ 15.

Cono e Cilindro aventi per vertice una retta. Coni e cilindri di 1ª e di 2ª specie aventi per vertice un punto.

149. *Oss. I.* I piani che congiungono una retta P_1 coi punti di una circonferenza C_∞ situata nel piano polare del punto all'infinito della retta, determinano un cono circolare avente per vertice la retta P_1, e il piano congiungente P_1 col centro di C_∞ per piano asse. Le proprietà di questo cono si deducono in modo analogo a quelle del cono circolare in S_3 (99). Solo osserviamo che ogni piano S_2 normale di 1ª specie al piano asse (def. I, 129) incontra il cono suddetto in un cerchio, col centro S_0 nel punto d'incontro dei due piani (fig. 114).

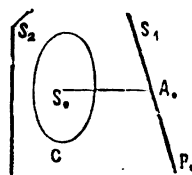



fig. 114

Il cilindro circolare avente per vertice una retta viene appunto generato da un cerchio e dalla retta all'infinito di un piano normale di 1ª specie al piano del cerchio dato.

Così si ha il cono circolare che ha per vertice un punto ed ha all'infinito una sfera e la sua opposta. Le proprietà di questo cono si dimostrano pure in modo analogo a quelle del cono circolare in S_3, sebbene si abbia evidentemente un caso diverso dal primo. Qui svolgeremo soltanto le proprietà del cono di 2ª specie, che serve a risolvere il problema della costruzione degli angoli di due piani, e perchè in S_n non tratteremo di coni circolari fra i quali sia compreso come caso particolare il cono suddetto.

Def. I. I piani che uniscono un punto P_0 colle rette di una superficie cilindrica C_∞ all'infinito di assi $a_{1\infty}$, $a'_{1\infty}$ (117) costituiscono una figura che si chiama *superficie conica circolare di* 2ª *specie.* La parte di spazio S_4 da essa racchiusa dicesi *cono circolare* o *cono di* 2ª *specie,* di cui i piani suddetti sono i piani *generatori,* il punto P_0 il *vertice,* i piani $P_0\,a_{1\infty}$, $P_0\,a'_{1\infty}$ i *piani assi* o *assi,* il cilindro C_∞ il *cilindro direttore* della superficie conica e del cono di 2ª specie. Uno spazio passante per uno dei piani assi si chiama *spazio diametrale.*

Coroll. La superficie conica di 2ª *specie è una figura ad una dimensione rispetto ai suoi piani generatori, e a tre dimensioni rispetto ai suoi punti.*

Difatti il cilindro C_∞ è rispetto alla sue rette una figura ad una dimensione.

Oss. II. Anche qui, quando non vi ha luogo ad equivoci si può scambiare la parola superficie conica con la parola cono.

Teor. I. I piani assi del cono di 2ª *specie sono perpendicolari di* 1ª *specie.*

Difatti gli assi del cilindro C_∞ sono due rette polari (teor. III, 117 e teorema I, 129).

Teor. II. Un piano asse e ogni piano generatore sono piani di uguali angoli (teor. III, 117 e def. III, 142).

Coroll. I piani di uguali angoli con un piano dato e che lo incontrano in uno stesso punto P_0, costituiscono un cono di 2ª specie.

Difatti le rette all'infinito dei piani generatori sono rette di ugual distanza colla retta all'infinito del piano dato.

Teor. III. Un piano S_2 passante pel vertice del cono e che incontra un piano generatore e un piano asse in una retta ed è perdendicolare ad uno di essi, è perpendicolare anche all'altro.

Difatti le rette all'infinito del piano generatore e del piano asse sono rette di ugual distanza, e la retta all'infinito del piano S_2 incontra le due rette suddette ed è perpendicolare ad una di esse, e quindi è normale anche all'altra (def. II, 114).

Teor. IV. Ogni spazio passante pel vertice e normale ad uno dei piani assi taglia il cono di 2ª specie in un cono circolare, che ha per asse la retta d'intersezione dello spazio col piano asse.

Difatti ogni piano perpendicolare ad un asse del cilindro C_∞ contiene due cerchi opposti del cilindro stesso (def. I, 117 e def. I, 99).

Teor. V. Ogni spazio passante per uno dei piani assi incontra i piani generatori in due sistemi di raggi simmetrici rispetto ad esso (teor. II, 117).

Teor. VI. Ogni spazio che contiene un piano generatore incontra il cono di 2ª specie in un altro piano generatore (teor. V, 117).

Teor. VII. Per ogni generatrice del cono di 2ª specie passano due soli piani generatori (teor. III, 117).

Teor. VIII. Un piano passante pel vertice del cono di 2ª specie non può incontrarlo in più di due rette, e se lo incontra in una lo incontra anche in un'altra, che può coincidere colla prima (teor. IV, 117).

Coroll. Ogni retta non può avere col cilindro più di due punti comuni, che possono coincidere.

Def. II. Un piano che incontra il cono in due rette coincidenti si chiama *piano tangente* lungo la retta data, che dicesi *generatrice di contatto.*

Ogni retta che ha due punti coincidenti in comune col cilindro si chiama *tangente* nel punto dato.

Teor. IX. Tutti i piani tangenti lungo una retta del cono di 2ª specie giacciono in uno spazio, che contiene i due piani generatori passanti per la retta data, ed è perpendicolare al piano normale condotto per la retta all'uno e all'altro piano asse (teor. IX, 117).

Def. III. Un tale spazio chiamasi *spazio tangente* lungo la retta data, che è la *generatrice di contatto.*

Teor. X. Nel cono di 2ª specie vi sono due sistemi di piani generatori. Quelli di sistemi diversi si incontrano in una retta, quelli di uno stesso sistema si incontrano nel solo vertice (teor. VI, 117).

Def. IV. Un sistema circolare di rette in uno spazio a tre dimensioni avente per asse una retta data (103), senza che le rette di esso incontrino l'asse stesso, si chiama *iperboloide circolare.* La sua linea all'infinito è un cerchio (teor. X, 103; def. I, 40 e teor. I, 84).

Teor. XI. Un piano perpendicolare ad un piano asse incontra il cono di 2ª specie in un cerchio col centro nel punto d'incontro dei due piani.

Sia V_0 il vertice del cono. Un piano normale di 1ª specie al piano asse A_2 lo incontra in un punto A_0, e incontra un piano generatore G_2 in un punto G_0. La retta G_0A_0 è perpendicolare al piano A_2 (coroll. III, teor. I, 129), e quindi anche alla retta V_0A_0. Il piano $G_0V_0A_0$ è normale di 2ª specie al piano A_2 e quindi anche al piano G_2 (teor. III); dunque $\widehat{G_0V_0A_0}$ è l'angolo dei due piani, e perciò (G_0A_0) è costante per tutti i piani generatori (teor. X, 55); dunque ecc. (fig. 115).

Teor. XII. Uno spazio S_3 normale ad un piano asse taglia il cono di 2ª specie secondo un iperboloide circolare.

Difatti il piano $S_{2\infty}$ di S_3 è perpendicolare alla retta all'infinito del piano asse A_2. Il piano $S_{2\infty}$ incontra il cilindro all'infinito in due cerchi opposti, e quindi le rette g_1 in cui lo spazio taglia i piani generatori formano lo stesso angolo colla retta a_1 d'intersezione di S_3 col piano asse A_2 (teor. I, 130; teorema III, 110 e def. I, 40) (zg. 115).

Il polo $S_{0\infty}$ di $S_{2\infty}$ è situato in $a_{1\infty}$, ed è coniugato al punto $A_{0\infty}$ all'infinito della retta a_1. La retta V_0A_0 sia normale in A_0 alla retta a_1 nel piano A_2; essa passa dunque per $S_{0\infty}$. Da A_0 si conduca in S_3 il piano normale S_2 di 1ª specie ad A_2, che è perciò normale in S_3 ad a_1 (coroll. III, teor. I, 129). Lo spazio V_0S_2 passa per il punto $S_{0\infty}$, e perciò è normale allo spazio S_3 (teor. I, 131 e def. II, 108).

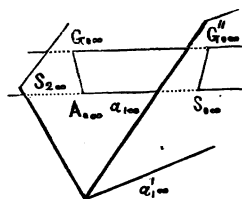
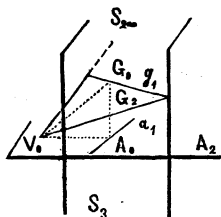



fig. 115

Sia G''_∞ il punto d'incontro della retta $g_{1\infty}$ di G_2 col piano $(a'_{1\infty}S_{0\infty})$, cioè il punto all'infinito della retta V_0G_0, che è l'intersezione del piano G_2 collo spazio (V_0S_2). Ma le rette $g_{1\infty}$ e $a_{1\infty}$ sono rette di ugual distanza (def. I), ed essendo le rette $A_{0\infty}G_{0\infty}$ e $S_{0\infty}G''_{0\infty}$ perpendicolari ad $a_{1\infty}$, perchè incontrano anche la retta polare $a'_{1\infty}$ situata nei piani $S_{2\infty}$ e $(a'_{1\infty}S_{0\infty})$ (teor. IX, 110), esse sono perpendicolari anche alla retta $g_{1\infty}$ (def. II e teor. IV, 114). Di più, essendo $(A_{0\infty}S_{0\infty})\equiv\frac{\pi}{2}$ (teor. I, 108) si ha pure $(G_{0\infty}G''_{0\infty})\equiv\frac{\pi}{2}$ (teor. IV e teor. III, 114). La retta $S_{0\infty}G''_{0\infty}$ è dunque la polare del punto $G_{0\infty}$ nel piano $G_{0\infty}G''_0S_{0\infty}$ (teor. VI, 69), ossia la retta g_1 è perpendicolare al piano $V_0G_0A_0$, e quindi anche alla retta G_0A_0 (coroll. V, teor. I, 87). Ciò ha luogo per ogni generatrice g_1; inoltre i segmenti (A_0G_0) sono uguali (teor. XI); e i segmenti normali comuni alle generatrici g_1 e ad a_1 sono situati nel piano S_2; dunque le rette g_1 formano in S_3 un iperboloide circolare (teor. X; XI e VIII, 103 e def. IV).

Coroll. Ogni spazio S_3 parallelo ad ogni piano asse del cono di 2ª specie taglia il cono in un iperboloide circolare.

Perchè lo spazio S_3 contenendo la retta all'infinito del piano asse A_3 considerato, il suo piano all'infinito è perpendicolare alla retta all'infinito dell'altro piano asse A'_2 (teor. III, 110), vale a dire S_3 è perpendicolare ad A_3.

Oss. III. Siccome $(G_{0\infty} G''_{\infty}) \equiv \frac{\pi}{2}$ si ha che le generatrici g_1 dell'iperboloide formano un angolo retto colle generatrici $V_0 G_0$ del cono circolare che ha per vertice V_0 e per direttrice il cerchio situato nel piano S_2.

Non si può dire che dato lo spazio S_3 e in esso l'iperboloide circolare di asse a_1, ogni punto V_0 del piano A_1 determini con esso un cono circolare di 2ª specie e neppure ogni punto V_0 della perpendicolare ad a_1 in A_0 nel piano A_2. Difatti l'angolo $G_0 V_0 A_0$, essendo dato in tal caso $(G_0 A_0)$, deve essere uguale all'angolo delle due rette a_1, g_1; il che non è se il punto V_0 è qualunque.

Se il punto V_0 cadesse all'infinito, ciò vorrebbe dire che l'angolo $G_0 V_0 A_0$ sarebbe nullo, e perciò anche l'angolo $(g_1 a_1)$, vale a dire in S_3 non si avrebbe più un iperboloide circolare ma un cilindro, e si avrebbe un cilindro i cui piani generatori passerebbero per la retta $V_{0\infty} A_{0\infty}$ e incontrerebbero il piano S_2 nei punti della circonferenza di centro A_0 e di raggio $(A_0 G_0)$, vale a dire un cilindro di 1ª specie (oss. I).

150. *Costruzione degli angoli di due piani con elementi del campo finito.*

In conformità alla costruzione dei segmenti normali a due rette all'infinito, si costruisce un cono di 2ª specie col vertice nel punto d'incontro P_0 dei due piani A_2, B_2. A tal uopo sul piano B_2 scegliamo una retta B_1 passante per P_0, e sia A_1 la sua proiezione in A_2, la quale in generale non ha per proiezione la retta B_1 in B_2. Immaginiamo costruito il cono di 2ª specie di asse A_2 e coll'angolo dei piani generatori uguale all'angolo $(A_1 B_1)$.

Il piano B_2 incontra il cono in un'altra retta B'_1. La proiezione di B'_1 in A_2 sia A'_1. I piani che uniscono le bissettrici degli angoli $(B_1 B'_1)$, $(A_1 A'_1)$ col punto P_0, misurano gli angoli dei due piani.

151. *Oss.* Non ci intratteniamo qui neppure sulle proprietà della sfera e delle intersezioni di più sfere e dei sistemi continui di figure invariabili, che incontreremo nello spazio S_n.

Capitolo II.

Spazio completo a quattro dimensioni.

---

§ 1.

Proprietà principali dello spazio completo.

152. *Oss. I.* Le proprietà dello spazio completo a quattro dimensioni si ottengono facilmente da quelle dello spazio Euclideo considerando come unità di misura delle distanze l' unità infinita che corrisponde all' unità angolare seguendo sempre lo stesso metodo generale tenuto sia per lo studio del piano completo (parte I, libro II, cap. II), come per quello dello spazio completo a tre dimensioni (parte I, libro III, cap. II).

Ogni retta, ogni piano ed ogni spazio dello spazio S_4 completo, sono pure completi; e valgono in esso colle dimostrazioni analoghe i teoremi dei n. 121 e 122; coll'avvertenza che due enti fondamentali (retta, piano e spazio), i quali hanno un punto comune, hanno in comune anche il punto opposto.

153. *Figure polari.*

Teor. I. I punti coniugati di ogni punto sono situati in uno spazio a tre dimensioni.

Dim. analoga a quella del teor. I, 108 appoggiandosi al teor. I, 119.

Def. I. Questo spazio si chiama *spazio polare* del punto, e del suo opposto, e questi punti si chiamano i *poli* dello spazio.

Oss. I. Lo spazio polare di un punto è uno spazio limite assoluto rispetto all'unità Euclidea intorno al punto nello spazio generale, ed è lo spazio all'infinito di ogni punto del campo Euclideo dello spazio a quattro dimensioni intorno al punto dato (teor. I, 123 conv. 28 e oss. 31).

Coroll. I. Lo spazio polare di un punto dello spazio polare di un altro punto passa per questo punto.

Coroll. II. Ogni spazio passante per un punto è spazio polare di due punti opposti dello spazio polare del punto dato.

Dim. analoga a quella del coroll. II, teor. I, 108.

Coroll. III. La retta polare, o il piano polare, di un punto A_0 in un piano, o in uno spazio, passante per esso, è situata nell'intersezione collo spazio polare di A_0.

Come il coroll. IV, del teor. I, 108.

Def. II. Due spazî, uno dei quali contiene i poli dell'altro, si dicono *coniugati.*

Teor. II. Gli spazî polari dei punti di una retta passano per un piano, e gli spazî polari dei punti di questo piano passano per la retta.

Dim. analoga a quella del teor. II, 108.

Def. III. Una retta e un piano nelle condizioni del teorema precedente si chiamano *polari coniugati* o semplicemente *polari.*

Coroll. I segmenti i cui estremi sono in una retta e in un piano polari sono retti.

Perchè i punti della retta sono coniugati a quelli del piano.

Teor. III. Ogni spazio ha due poli opposti.

Difatti gli spazî polari di quattro punti non situati in un piano dello spazio dato si incontrano in due punti opposti A_0 e A'_0. Se si incontrassero in una retta o in un piano, i quattro punti dati sarebbero in un piano o in una retta (teor. II); dunque A_0 e A'_0 hanno per spazio polare lo spazio dato.

Teor. IV. I poli degli spazî passanti per una retta o per un piano sono situati sul piano o sulla retta polare della retta o del piano dato.

Dim. analoga a quella del teor. IV, 108.

Def. IV. Due elementi fondamentali A e B, che non sono elementi polari di S_4 (punto, retta, piano o spazio), e tali che non siano situati in uno spazio S_3 qualora i loro punti di determinazione non siano sempre compresi in un tale spazio, sono *coniugati* in S_4 se l'elemento B è situato nell'elemento polare di A, oppure se passa per questo elemento.

Oss. II. Così ad es. sono coniugati due spazî tali che uno di essi passa pei poli dell'altro, due piani uno dei quali passa per la retta polare dell'altro; e due rette una delle quali è contenuta nel piano polare dell'altra.

Se A e B sono situati in uno spazio S_3, valgono le definizioni date per questo spazio. Così se una retta e un piano si incontrano in un punto, sono coniugati se il piano passa per la retta polare della retta data nello spazio a tre dimensioni da essi determinato.

Teor. V. Se un elemento C è contenuto in un altro elemento A o passa per questo elemento, l'elemento polare C' di C passa per l'elemento polare A' di A o è contenuto in questo elemento, e gli elementi C e A', C' e A sono coniugati.

Supponiamo dato il primo caso. Gli spazî polari dei punti di A si incontrano nel solo elemento A'. Fra questi spazî polari sono compresi anche quelli dei punti di C che passano per C', e quindi C' passa per A'.

Se invece C passa per A, gli spazî polari dei punti di C si incontrano soltanto in C', e fra questi essendo compresi anche quelli dei punti di A, che si tagliano in A', A' passa per C'. Di più, nel primo caso per C passa l'elemento polare di A' e per A' passa l'elemento polare di C, e quindi A' e C, C' e A sono coniugati. Se invece C passa per A, l'elemento polare di A' è contenuto in C, mentre l'elemento polare di C è contenuto in A'; dunque anche in questo caso A' e C, C' e A sono coniugati.

Coroll. Se A e B sono elementi coniugati, essi soddisfano ambedue alla def. III.

Se B è situato nell'elemento polare A' di A (def. III), l'elemento polare di B, cioè B', passa per A; e se B passa per A', B' è situato in A; dunque A è contenuto nel primo caso nell'elemento polare di B, e nel secondo passa per questo elemento; dunque ecc. (def. III).

Teor. VI. Dati due elementi polari, due altri elementi contenuti rispettivamente in essi o passanti per essi, sono coniugati.

Siano A e A' gli elementi dati, C e D gli elementi contenuti in essi, C' e D' gli elementi polari di C e D. Poichè C è contenuto in A, C' passa per A' e quindi anche per D, dunque C e D sono coniugati (def. III e coroll. teor. V).

Teor. VII. Se A passa per B, esso taglia l'elemento polare B' di B nell'elemento polare B'' di B in A.

Difatti i punti coniugati a tutti quelli di B in A sono nell'intersezione di A con B', e tutti i punti di B'' sono coniugati in A a quelli di B.

Teor. VIII. Due elementi A e B coniugati aventi un elemento comune C, tagliano l'elemento polare di C in elementi che sono in esso polari; e inversamente.

Escludiamo il caso in cui gli elementi A e B sono contenuti in uno spa- a tre dimensioni, perchè allora il teorema è già conseguenza dei teor. dati al n. 108 (oss. II).

Non possono dunque essere una retta ed un piano, ma o una retta e uno spazio, o due piani, o un piano e uno spazio, o due spazî.

Siano α' e β' gli elementi d'intersezione di A e B coll'elemento C' polare di C, e A',B' gli elementi polari di A e B. Ciascuno degli elementi A e B non può essere contenuto nell'elemento polare dell'altro, che è contenuto in C' e passerebbe quindi per C, mentre due elementi polari non hanno alcun punto comune. L'elemento $B \equiv (C\beta')$ passa per l'elemento polare A' di $A \equiv (C\alpha')$, ma A' è contenuto anche in C' (teor. V), dunque A' è contenuto in β', se non è lo stesso β'. Analogamente l'elemento B' è contenuto in C' ed in A, e quindi anche in α'. Ma i punti di A' sono coniugati a quelli di A, e quindi anche di B' contenuto in A, e quelli di B' sono coniugati a quelli di A', dunque lo sono anche in C'.

I due elementi A' e B' sono polari in C'; e α' e β', se non sono A' e B', sono coniugati (teor. VI).

Inversamente, dati i due elementi polari A' e B' in C', l'elemento (CB') ha per polare un elemento contenuto in C' e in A', e così l'elemento polare di (CA') è contenuto in B', quindi (CA'), (CB') sono coniugati (teor. VI).

Coroll. I. Se l'elemento C non é un punto, e si sceglie un punto qualunque C_0 in C, lo spazio polare C_3 di C interseca i due elementi coniugati A e B in elementi coniugati in C_3.

Difatti lo spazio polare C_3 di C_0 passa per C' e incontra A e B in elementi α'' e β'' che contengono rispettivamente come parti α' e β', e quindi anche B' e A'. L'elemento β'' ha per elemento polare (C_0B'), e quindi B' è l'elemento polare di β'' in C_3 (teor. VII), e perciò α'' e β'' sono coniugati in C_3.

Oss. III. Tralasciamo di enunciare le conseguenze immediate dei teoremi precedenti (vedi n, 108).

154. *Oss.* Come per lo spazio completo a tre dimensioni si dimostra l'identità dello spazio completo S_4 intorno ai suoi punti, alle sue rette, e ai suoi piani, nonchè delle sue parti rispetto ad ogni suo spazio S_3.

155. *Elementi fondamentali perpendicolari* [1]).

1). Qui gli elementi fondamentali non sono identici come nella def. I 57 dell'introduzione, ma sono punti, rette, piani e spazî a tre dimensioni.

Oss. I. Poichè una retta e un piano che passano per uno dei poli di uno spazio S_3 contengono anche il polo opposto, potremo parlare anche quando non vi sarà luogo ad equivoci, del polo di uno spazio S_3.

Teor. I. I segmenti di uno spazio servono a misurare gli angoli intorno ai poli dello spazio.

Come pel teor. I, 110.

Oss. II. Nello spazio S_4 completo valgono le stesse definizioni dell'ortogonalità degli elementi fondamentali date nel campo Euclideo dello spazio S_4 intorno ad un punto.

Coroll. I. Se due elementi fondamentali (rette, piani e spazî) aventi un solo punto comune intersecano lo spazio polare del punto in elementi coniugati, essi sono perpendicolari.

Teor. II. Due elementi fondamentali coniugati aventi un elemento d'intersezione comune sono perpendicolari; e inversamente.

Siano A e B questi due elementi e C (punto, retta o piano) l'elemento comune. Se C è un punto il teorema è lo stesso corollario del teor. I; negli altri casi è una conseguenza del coroll. I, teor. VIII, 153.

Coroll. I. Una retta perpendicolare ad uno spazio è perpendicolare a tutte le rette di questo spazio passanti pel suo punto d'incontro con la retta data.

Dim. analoga a quella del coroll. teor. II, 110.

Coroll. II. Un piano perpendicolare ad un altro piano è perpendicolare a tutte le rette di questo passanti pel punto d'incontro dei due piani.

Siano A_2, C_2 i due piani, A_0 il loro punto comune ed A_3 lo spazio polare di A_0, che incontra B_2, C_2 in due rette B_1, C_1 polari in A_3 (teor. II). La retta A_0C_0 che unisce A_0 con un punto C_0 di C_1 è perpendicolare al piano B_2, perchè nello spazio (B_2C_0), C_0 è il polo del piano B_2 (teor. VI).

Coroll. III. Gli elementi passanti per un elemento A sono perpendicolari all'elemento polare A'.

Difatti i loro elementi polari sono situati nell'elemento A' (teor. V, 153), quindi sono coniugati ad A', ed hanno almeno con A' un punto comune.

Es. Le rette, i piani e gli spazî passanti per un punto sono perpendicolari allo spazio polare di questo punto.

Coroll. IV. Gli elementi perpendicolari ad un elemento A passano per l'elemento polare A'.

Perchè essi sono coniugati all'elemento A e non sono contenuti in A.

Es. Le rette, i piani e gli spazî perpendicolari ad uno spazio passano pei poli di questo spazio.

Teor. III. Ogni retta che incontra una retta ed il suo piano polare è perpendicolare ad entrambi; e inversamente ogni retta che incontra la retta (o il piano) ed è perpendicolare al piano (o alla retta) incontra il piano (o la retta) in un punto.

Difatti siano R_1, R_2 la retta e il piano polari, S_1 la trasversale. Il piano S_1R_1 incontra il piano R_2 in un punto che è il polo nel piano S_1R_1 della retta R_1, e quindi la retta S_1 è perpendicolare a R_1. Analogamente lo spazio S_1R_2

incontra la R_1 nel polo del piano R_2 in questo spazio (teor. VII, 153), e perciò la S_1 è perpendicolare al piano R_2.

Il teorema inverso è evidente (coroll. IV, teor. II).

Teor. IV. Due spazî hanno una sola retta perpendicolare comune.

La retta cioè che congiunge i due poli.

Teor. V. Uno spazio ed un piano hanno un piano perpendicolare comune, e una sola retta normale, che li incontra tutti e due.

Il piano cioè che congiunge il polo dello spazio con la retta polare del piano.

La retta, che unisce i poli dello spazio col punto d'incontro del piano normale col piano dato, è la normale richiesta (coroll. IV, II, teor. II).

Teor. VI. Uno spazio e una retta hanno uno spazio normale comune, e una sola normale che li incontra tutti e due.

Quello cioè che congiunge i poli dello spazio col piano polare della retta. La retta, che unisce i poli dello spazio col punto d'intersezione della retta data collo spazio normale comune, è la sòla normale richiesta.

Teor. VII. Tre, o quattro spazî hanno un piano, o uno spazio, normale comune.

Quello cioè determinato dai poli dei tre o quattro spazî.

Teor. VIII. Due piani non situati in uno spazio a tre dimensioni hanno due rette normali comuni.

Infatti siano R_2,S_2 i due piani, R_1 e S_1 le loro rette polari; ogni retta che incontra le rette R_1 e S_1 e i piani R_2 e S_2 è perpendicolare comune ai due piani. Lo spazio determinato dalle due rette R_1,S_1 incontra i due piani in due rette R'_1,S'_1 che sono in questo spazio le polari di R_1,S_1. Ora si sa che le quattro rette R_1, S_1, R'_1, S'_1 hanno due sole trasversali comuni, che sono normali comuni alle due prime (teor. X, 117 e teor. VIII, 110), e quindi ai due piani.

Teor. IX. Una retta ed un piano, o due rette, che non si incontrano, hanno due normali comuni.

Dim. analoga alla precedente.

156. *Oss. I.* Le proprietà per la distanza di un punto da uno spazio a tre dimensioni date al n. 134 valgono anche nello spazio S_4 completo. La distanza minima e la distanza massima di un punto ad uno spazio a tre dimensioni sono supplementari. Non valgono nello spazio completo le proprietà delle distanze fra rette, piani e spazî paralleli. Si aggiungono però nello spazio completo altre proprieta, cioè i segmenti normali a due rette, o ad una retta e un piano, o a due piani, e finalmente a due spazi a tre dimensioni, e aventi i loro estremi su di essi, i quali danno le distanze minime e massime tra i punti dell'uno ai punti dell'altro. Così si dimostra mediante la corrispondenza d'identità (teor. III, 15) che quando due tali coppie di elementi hanno le stesse distanze, esse sono identiche.

Per gli angoli, i triedri di 2ª specie, i quadriedri e pentaedri, pei versi delle figure, per le figure congruenti e simmetriche si dimostrano le proprietà analoghe ottenute nello spazio Euclideo procedendo collo stesso metodo usato sia nel piano completo come nello spazio completo a tre dimensioni. È da avvertire che nello spazio completo S_4 due figure opposte sono simmetriche, come nel piano completo. Così si definiscono le superficie coniche e la superficie sferica e la sfera dello spazio completo S_4, e si dimostrano in modo analogo le loro proprietà.

Similmente si procede rispetto ai sistemi continui di figure invariabili, fra i quali manca il sistema parallelo.

LIBRO II.

LO SPAZIO EUCLIDEO A N DIMENSIONI.

Capitolo I.

Lo spazio Euclideo a n dimensioni.

---

§ 1.

Definizione e costruzione della stella di $(n\text{-}2)^{ma}$ specie e dello spazio a n dimensioni.

157. *Oss. I.* Dalla costruzione della stella di 2ª specie e quindi dello spazio a quattro dimensioni e dallo studio delle loro proprietà fondamentali deduciamo ora facilmente la costruzione delle stelle di specie superiore e degli spazî di qualunque numero n dato di dimensioni.

Lo spazio a cinque dimensioni viene generato da uno spazio a quattro dimensioni e da un punto fuori di esso; lo spazio a sei dimensioni da uno spazio a cinque dimensioni e da un punto fuori di esso ecc., lo spazio a m dimensioni da uno spazio a m-1 dimensioni e da un punto fuori di esso (def. II, 2).

Def. I. Indicheremo in generale uno spazio a m dimensioni col simbolo S_m. Per *spazio a zero dimensioni* intenderemo il punto, *ad una dimensione* la retta, *a due dimensioni* il piano.

Oss. II. La def. I è conveniente in vista dei teoremi generali che dimostreremo. Gli spazî fondamentali dello spazio a n dimensioni sono il punto, la retta, il piano, lo spazio a tre ecc. a $n-1$ dimensioni.

Oss. III. Le proprietà principali che enuncieremo nei seguenti numeri per lo spazio a n dimensioni comprendono in gran parte come casi particolari le proprietà già date per la retta, il piano e lo spazio a tre e a quattro dimensioni.

Teor. I. Ogni retta avente due punti in comune con uno spazio S_m a m dimensioni giace interamente in questo spazio.

Dim. analoga a quella data per lo spazio a tre e a quattro dimensioni (teor. II, 82 e 121) supposto che il teor. valga per lo spazio S_{n-1}, valendo già per $n=2$ (teor. IV, 46).

Oss. IV. Supporremo che ogni spazio S_m ($m < n$) sia la figura rettilinea determinata da $m+1$ dei suoi punti che non giacciono in uno spazio inferiore, come avviene per la retta, per il piano, e per gli spazî a tre e a quattro dimensioni (vedi oss. VI).

Def. II. Per spazî *indipendenti* nello spazio generale intenderemo quelli i cui punti di determinazione sono indipendenti (def. I, 15)[1]. r punti sono invece *indipendenti in* S_m $(r > m)$, o in uno spazio superiore, quando non sono situati in uno spazio S_{r-2}, o in spazi inferiori. Così dicasi di due o più spazî in S_m.

Teor. II. Uno spazio S_m *che ha* $m+1$ *punti indipendenti comuni collo spazio* S_n *giace interamente in esso.*

Difatti per l'ipotesi precedente le rette che lo costituiscono sono situate in S_n (teor. I).

Oss. V. La stella di $n-2^{ma}$ specie è una figura a $n-1$ dimensioni rispetto alle sue rette o ai suoi raggi, tale essendo S_{n-1} rispetto ai suoi punti (int. 110).

Teor. III. Uno spazio S_n *viene generato da un suo spazio* S_{n-1} *e da un suo punto qualunque fuori di* S_{n-1}.

Dim. analoga a quella dello spazio a tre e a quattro dimensioni (teor. IV, 82 e 121) appoggiandosi al teor. II e all'oss. IV.

Coroll. $n+1$ *punti indipendenti determinano uno spazio a* n *dimensioni, che viene determinato da* $n+1$ *dei suoi punti indipendenti.*

Difatti lo spazio S_n è determinato da un suo spazio a $n-1$ dimensioni, cioè da n punti che determinano questo spazio e da un altro punto fuori di esso. Ora l'ipotesi suddetta è vera per $n=2, 3, 4$, dunque è vera in generale.

Oss. VI. Dunque essendo vera la proprietà dell'ipotesi, che abbiamo fatta nell'oss. IV, sono pure veri i teor. II e III.

Teor. IV. Due, tre, quattro ecc. n rette indipendenti di una stella di $(n-2)^{ma}$ *specie determinano un fascio, una stella di* 1^a, 2^a *ecc.* $n-3^{ma}$ *specie appartenenti alla stella data.*

Dim. analoga a quella data pel teor. I dei n. 82 e 121.

§ 2.

Intersezione di spazî nello spazio a n dimensioni.

158. *Oss. I.* Per vedere quando e in quale spazio si incontrano due spazî dati S_m e $S_{m'}$ dello spazio S_n si potrebbe scegliere una via analoga a quella usata nello spazio a tre e a quattro dimensioni, cominciando a dimostrare che una retta un piano ecc. incontrano uno spazio S_{n-1} di S_n in un punto, una retta ecc. Ma questa via sarebbe piuttosto lunga. Qui invece daremo un metodo più generale per determinare le dimensioni dello spazio d'incontro di due o più spazî dati tanto nel caso che essi siano indipendenti (def. II), come quando abbiano una posizione particolare.

Teor. I. Se due spazî S_m *e* $S_{m^{(1)}}$ *hanno* $a+1$ *punti indipendenti comuni* (e quindi anche lo spazio S_a determinato dai punti comuni), *essi giacciono in un spazio* $S_{m+m^{(1)}-a}$.

Due spazî indipendenti S_m e $S_{m^{(1)}}$ nello spazio generale sono determinati rispettivamente da $m+1$ e $m^{(1)}+1$ punti (coroll. teor. IV, 157). Essi appartengono allo spazio $S_{m+m^{(1)}+1}$ determinato dagli $m+m^{(1)}+2$ punti dati. Gli spazî

---

[1] L'indipendenza qui riguarda la determinazione degli spazî mediante un gruppo di punti, ma essi possono avere altre relazioni speciali.

S_m e $S_{m^{(1)}}$ non si incontrano in alcun punto, se sono indipendenti (def. II, 157). Se avessero infatti un punto comune A_0, per determinare S_m e $S_{m^{(1)}}$ potremmo prendere oltre A_0 ancora m e $m^{(1)}$ punti indipendenti, e perciò i due spazî S_m e $S_{m^{(1)}}$ sarebbero situati in uno spazio $S_{m+m^{(1)}}$.

Se essi avessero due punti comuni, e quindi anche la retta che li unisce (teor. I, 157), per determinarli, oltre a questi due punti basterebbero altri $m-1$ punti del primo e $m^{(1)}-1$ punti del secondo spazio, e quindi sarebbero situati in uno spazio a $m+m^{(1)}-1$ dimensioni. Analogamente se gli spazi dati hanno $a+1$ punti indipendenti comuni.

Teor. II. Due spazi S_m e $S_{m^{(1)}}$ ad m ed $m^{(1)}$ dimensioni indipendenti nello spazio S_n si incontrano in uno spazio S_a, ove $a=m+m^{(1)}-n$.

Supponiamo infatti che lo spazio a n dimensioni coincida con lo spazio $S_{m+m^{(1)}-a}$. Si avrà:

$$m+m^{(1)}-a=n \qquad (1)$$

Coroll. Se $a=o$ essi hanno un solo punto comune, se a è negativo non ne hanno alcuno.

Oss. II. Se $m>m^{(1)}$ é chiaro che a può essere al massimo uguale ad $m^{(1)}$, nel qual caso $S_{m^{(1)}}$ è contenuto interamente in S_m. Quando parleremo di spazî che si incontrano intenderemo sempre che nessuno di essi giaccia interamente nell'altro, e che quindi a sia al massimo uguale a $m^{(1)}-1$.

Teor. III. $s+1$ spazî indipendenti S_m, $S_{m^{(1)}}, \ldots, S_{m^{(s)}}$ dello spazio S_n si tagliano in uno spazio S_p, ove

$$p=\Sigma m^{(i)}-sn \qquad (i=0,1\ldots s).$$

Lo spazio S_a viene incontrato da un terzo spazio $S_{m^{(2)}}$ in uno spazio S_{a_1}, dove è per relazione precedente

$$(2) \qquad a_1=a+m^{(2)}-n=m+m^{(1)}+m^{(2)}-2n$$

Lo spazio S_{a_1} viene incontrato da un quarto spazio $S_{m^{(3)}}$ in uno spazio S_{a_2}, dove

$$(3) \qquad a_2=a_1+m^{(3)}-n=m+m^{(1)}+m^{(2)}-3n.$$

Così si giunge ad uno spazio $S_{a_{s-2}}$ che viene tagliato da un $(s+1)^{mo}$ spazio $S_{m^{(s)}}$ in uno spazio $S_{a_{s-1}}$ essendo

$$a_{s-1}=a_{s-2}+m^{(s)}-n=\Sigma m^{(i)}-sn \qquad (i=0,1,\ldots s).$$

Teor. IV. $s+1$ spazî qualunque $S_m, S_{m^{(1)}}, \ldots, S_{m^{(s)}}$ in S_n si tagliano in uno spazio S_q, ove si ha

$$q=\Sigma m^{(i)}+\Sigma d_k-sn \qquad (i=0,1,\ldots s;\, k=0,1,2,\ldots s\text{-}2)$$

ove alcuni o tutte i numeri d possono essere zero. Lo spazio S_q è indipendente dall'ordine in cui si considerano gli spazî dati.

Se gli spazî S_m e $S_{m^{(1)}}$ si tagliano invece in uno spazio S_{a+d} in luogo di S_a (e si sa che $a+d$ se $m<m^{(1)}$ può essere al più uguale a $m^{(1)}-1$ (oss. II) allora nella relazione (2) in luogo di a bisogna porre $a+d$, di modo che gli spazî S_m, $S_{m^{(1)}}$, $S_{m^{(2)}}$ si tagliano in uno spazio S_{a_1+d}. Supponiamo invece che

si incontrino in uno spazio $S_{a_1+d+d_1}$, allora gli spazi S_m, $S_{m^{(1)}}$, $S_{m^{(2)}}$, $S_{m^{(3)}}$ si incontrano in uno spazio $S_{a_2+d+d_1}$, e così via.

L'ultima proprietà del teorema risulta dalla simmetria delle grandezze $m^{(i)}$ e d_k nei numeri p e q.

Coroll. Due, tre, ..., n spazî a n-1 dimensioni indipendenti in S_n si incontrano rispettivamente in uno spazio a n-2, n-3..., a zero dimensioni.

Oss. III. Supposto che si abbia $m > m^{(1)} ..., > m^{(s)}$, e supposto che $a+d$ abbia il suo valore massimo $m^{(1)}-1$, si ricava il valore massimo di d, cioè:

$$d = n - m - 1.$$

Dato questo valore massimo di d, e supposto che a_1+d+d_1 abbia il suo valore massimo, cioè $m^{(2)}-1$ si ricava il valore massimo di d_1

$$d_1 = n - m^{(1)}$$

Ammessi i valori massimi di $d, d_1 ... d_{s-2}$. e supposto che $a_{s-1}+d+d_1+.,+d_{s-1}$ abbia il valore massimo, cioè $m^{(s)}-1$, si ha:

$$d_{s-1} = n - m^{(s-1)}$$

e in tal caso si ha infatti sostituendo nel valore di q

$$q = m^{(s)} - 1.$$

Teor. V. Se una figura contenuta in uno spazio a n dimensioni viene incontrata da ogni retta dello spazio S_n in un solo punto, essa è uno spazio a n-1 dimensioni.

Dim. analoga a quella del teor. VII n. 85 o del teor. XIII, 122.

Teor. VI. Se una figura contenuta nello spazio a n dimensioni viene incontrata da ogni spazio a m dimensioni in un punto, essa è uno spazio a n — m dimensioni.

Infatti due punti della figura determinano una retta situata tutta nella figura. Ma la figura non può essere una sola retta (teor. II), quindi vi devono essere altri punti fuori della retta. Uno di questi punti e la retta determinano un piano che appartiene per dato all'intera figura. Nè questo piano può essere l'intera figura essendo essa incontrata da ogni spazio S_m in un punto, se m è minore di $n-2$. Così seguitando troviamo che nella figura è contenuto uno spazio a $n-m$ dimensioni. Non vi possono essere due di questi spazî, perchè la figura sarebbe incontrata da ogni spazio S_m in più di un punto (teor. II).

§ 3.

Spazî duali in S_n — Piramide fondamentale in S_n.

159. *Oss.* Questo paragrafo non lo abbiamo trattato per la retta, il piano e gli spazî a tre e a quattro dimensioni; è chiaro però che esso vale anche per questi spazî dando ad n i valori 1, 2, 3, 4.

Def. Mentre n punti indipendenti dello spazio S_n determinano uno spazio S_{n-1}, n spazî indipendenti a n-1 dimensioni determinano un punto S_0 (coroll. teorema IV, 158).

Diremo perciò che il punto S_0 e lo spazio S_{n-1} sono elementi o *spazî duali* od anche *correlativi.*

Così chiameremo *duali o correlativi* quegli spazî i quali sono determinati l'uno da un certo numero di punti indipendenti e l'altro da un egual numero di spazî indipendenti.

S_1 ha per spazio duale lo spazio S_{n-2}
S_2 » S_{n-3}
S_3 » S_{n-4}
$\vdots$ $\vdots$
S_m » S_{n-m-1}

si ha dunque:

Coroll. I. La somma degli indici di due spazî duali è uguale a $n-1$.

Coroll. II. Se $n=2m+1$, *lo spazio* S_m *è duale allo spazio* S_m, *cioè è duale di sè stesso. Se* $n=2m$, *lo spazio* S_m *ha per spazio duale lo spazio* S_{m-1}.

Teor. I. Due spazî duali indipendenti non hanno in generale alcun punto comune.

Ciò risulta dalla somma degli indici dei due spazî (teor. III, 158).

Teor. II. Congiungendo uno spazio S_m *coi punti, colle rette, coi piani e cogli spazî di uno spazio duale* S_{n-m-1} *che non abbia con* S_m *alcun punto comune, si ottengono tutti gli spazî a* $m+1$, $m+2$ *ecc.* $n-1$ *dimensioni dello spazio* S_n *passanti per* S_m.

Difatti congiungendo uno dei due spazî, per es. lo spazio S_m, coi punti dello spazio S_{m-n-1} si ottengono tutti gli spazî a $m+1$ dimensioni passanti per S_m, perchè ogni spazio S_{m+1} passante per S_m incontra lo spazio S_{n+m-1} in un punto. Due punti dello spazio S_{n+m-1} non possono essere situati in uno spazio S_{m+1} passante per S_m, perchè in tal caso gli spazî S_{n+m-1} e S_{m+1} si incontrerebbero nella retta dei due punti (mentre in generale si incontrano in un solo punto), e sarebbero situati in uno spazio a $n-1$ dimensioni, e quindi lo spazio S_m incontrerebbe lo spazio S_{n-m-1} in un punto; il che è contrario al dato.

Coroll. I. Lo spazio a n dimensioni può essere generato da due spazì duali qualunque S_m, S_{n+m-1} *non aventi alcun punto comune, congiungendo uno qualunque di essi, per es.* S_m, *coi punti, colle rette, coi piani e cogli spazî dell'altro.*

§ 4.

Numero delle dimensioni dei sistemi di spazî di date dimensioni nello spazio S_n.

160. *Ind. I.* Diremo che un sistema ad una dimensione di infiniti elementi contiene Ω^1 elementi; e in generale che un sistema a m dimensioni, che ha per elementi Ω^1 sistemi di Ω^{m-1} elementi, contiene Ω^m elementi.

Teor. I. Il sistema di spazî S_m *in* S_n *è a* $(n-m)(m+1)$ *dimensioni.*

Una retta S_1 è ad una dimensione (ass. II, *a* e ip. I), contiene cioè Ω^1 punti. Il piano ne contiene Ω^2, e poichè un fascio di rette è ad una dimensione, e in ogni retta sono contenuti Ω^1 punti, si vede che il piano contiene Ω^2 rette.

Facilmente si vede che

in S_3 sono contenuti $\Omega^3 S_0$, $\Omega^4 S_1$, $\Omega^3 S_2$

» S_4 » $\Omega^4 S_0$, $\Omega^6 S_1$. $\Omega^6 S_2$, $\Omega^4 S_3$

» S_5 » $\Omega^5 S_0$, $\Omega^8 S_1$. $\Omega^9 S_2$, $\Omega^8 S_3$, $\Omega^5 S_4$.

Vediamo che gli spazî S_3 cominciano a comparire in S_4, così uno spazio S_m comincia a comparire in S_{m+1}. Il numero degli spazî S_3 in S_4 è Ω^4, $\Omega^{2\cdot 4}$ in S_5, $\Omega^{3\cdot 4}$ in S_6, ecc.

La legge è manifesta, e ammesso il teorema per lo spazio S_{m-1} in S_{n-1}, colla generazione di S_n mediante S_{n-1} e un punto S_0 fuori di esso, tenendo conto che uno spazio S_m contiene Ω^m punti, il teorema riesce dimostrato.

Teor. II. Il sistema degli spazî a $m+s$ dimensioni passanti per uno spazio S_m di S_n è a $(n-m-s)$ s dimensioni.

Gli spazî S_{m+1}, S_{m+2} ecc. passanti per uno spazio S_m in S_n si ottengono congiungendo lo spazio S_m coi punti, le rette ecc. dello spazio duale S_{n-m-1} (teor. II, 159). Il numero quindi degli spazî S_{m+s} passanti per S_m in S_n è dato da quello degli spazî a $s-1$ dimensioni di uno spazio duale. Ora pel teorema precedente il numero di questi spazî nello spazio S_{n-m-1} è $(n-m-s)s$, dunque il teorema è dimostrato.

Def. I. Il sistema di spazî S_{n-1} passanti per uno spazio S_{n-2} si chiama *fascio di spazî* S_{n-1}, di cui lo spazio S_{n-2} è l'*asse*.

§ 5.

Alcune proprietà dello spazio completo a n-1 dimensioni.

161. *Oss. I.* Le proprietà dello spazio completo a $n-1$ dimensioni si deducono da quelle dello spazio analogo Euclideo considerando come unità delle distanze l'unità angolare e tenendo lo stesso metodo adottato nel piano e negli spazî completi a tre e a quattro dimensioni.

Ogni spazio dello spazio completo S_{n-1} è completo.

Valgono per esso i teoremi dei numeri precedenti; soltanto è da osservare che se due spazî si incontrano in un punto, essi hanno in comune anche il punto opposto.

Teor. I. Se uno spazio S_{n-1} ha n punti indipendenti nel campo limite assoluto di un punto A_0, esso è tutto situato in questo campo.

Supponiamo che il teorema sia vero per gli spazî a $n-2$ dimensioni. Siano $X_0^{(1)}$, $X_0^{(2)}$, ..., $X_0^{(n)}$ gli n punti che S_{n-1} ha in comune col campo limite assoluto del punto A_0 (def. IV, 32). Gli spazî a $n-2$ dimensioni determinati dagli n punti (X_0) giacciono per ipotesi in questo campo. Lo spazio S_n è generato dallo spazio $X_0^{(1)}...X_0^{(n-1)}$ e dal punto $X_0^{(n)}$, e le rette di esso passanti per $X_0^{(n)}$ incontrano lo spazio $X_0^{(1)}...\ X_0^{(n-1)}$ (oss. I), quindi esse sono situate nel campo limite assoluto di A_0 (teor. III, 32). Il teorema se vale per $n-2$ vale dunque per $n-1$; ma è vero per $n=1, 2, 3$ dunque vale anche in generale (int. *l*, 39).

Coroll. I. I punti coniugati ad un punto dato nello spazio S_{n-1} completo sono situati in uno spazio a $n-2$ dimensioni (coroll. II, teor. I, 32 e def. l, 69).

Def. I. Questo spazio si chiama *spazio polare* del punto e del suo opposto, e questi punti si dicono i *poli* dello spazio,

Coroll. II. Lo spazio polare di un punto dello spazio polare di un altro punto passa per questo punto.

Teor. II. Gli spazî polari dei punti di uno spazio S_m passano per uno spazio duale S_{n-m-2} in S_n; e reciprocamente, gli spazî polari dei punti di S_{n-m-2} passano per lo spazio S_m.

Se $m=1$ il teorema si dimostra in modo analogo al teor. II, 108. Supponiamo che il teorema sia vero per lo spazio S_{m-1}; dico che è vero anche per lo spazio S_m.

Difatti siano $A_0^{(1)}, A_0^{(2)}, \ldots, A_0^{(m+1)}$ $m+1$ punti indipendenti di S_m. Gli $m+1$ spazî polari di essi s'incontrano in S_n in uno spazio S_{n-m-2}. Se si intersecassero in uno spazio S_{n-m-3} allora i punti dati dovrebbero appartenere per l'ipotesi fatta ad uno spazio S_{m-2}, e non sarebero indipendenti.

Gli spazî polari dei punti di S_{n-m-2} passano per gli $m+1$ punti dati, ossia per lo spazio S_m, e quindi gli spazî polari degli altri punti di S_m passano pei punti di S_{n-m-2}, ossia per lo spazio S_{n-m-2} stesso. Ma il teorema è vero per $m=1$, dunque è vero in generale (int. *l*, 39).

Def. II. Due spazî S_m, S_{n-m-2} che soddisfano alla condizione del teorema precedente si chiamano *polari*.

Coroll. I. I segmenti i cui estremi sono in due spazî polari sono retti.

Perchè i loro estremi sono coniugati (def. I, 69 e def. IV, 29).

Coroll. II. Due spazî polari sono duali e non hanno alcun punto comune.

Che siano duali è chiaro pel fatto che la somma dei loro indici è $n-2$ (coroll. def. I, 159). Che non possano avere un punto A_0 comune, risulta dal fatto che A_0 non può essere situato nel suo spazio polare (coroll. I, teor. I).

Teor. III. Ogni spazio S_{n-2} ha due poli opposti.

Dim. analoga a quella del teor. III del n. 108.

Teor. IV. I poli degli spazî S_{n-2} passanti per uno spazio S_m sono situati nello spazio polare S_{n-m-2} di S_m.

Dim. analoga a quella del teor. IV, 108.

Def. III. Due spazî S_m, S_r indipendenti in S_{n-1} si dicono *coniugati* se lo spazio S_r è situato nello spazio polare di S_m, oppure passa per questo spazio.

Così ad es. sono coniugati due spazî S_{n-2}, S'_{n-2}, uno dei quali passa pei pei poli dell'altro.

Se gli spazî S_m, S_r giacciono in uno spazio $S_{n'}$ per dimensioni inferiore a S_{n-1}, valgono in S_{n-1} le definizioni per lo spazio $S_{n'}$.

Teor. V. Se uno spazio S_r è contenuto in un altro spazio S_m, o passa per questo spazio, lo spazio polare S_{n-r-2} di S_r passa per lo spazio polare S_{n-m-2} di S_m, o è contenuto in questo spazio; e gli spazî S_r e S_{n-m-2}, S_m, S_{n-r-2} sono coniugati.

Dim. analoga a quella del teor. V del n. 153.

Coroll. Ciascuno di due spazî coniugati soddisfa alla def. III.

Come pel coroll. teor. V, 153.

Teor. VI. Dati due spazî polari, due altri spazî contenuti rispettivamente in essi, o passanti per essi, sono coniugati.

Dim. analoga al teor. VI del n. 153.

Teor. VII. Dato uno spazio S_m e il suo spazio polare S_{n-m-2} nello spa-

zio S_{n-1}, *lo spazio* S_{r-m-1} *d'intersezione di uno spazio* S_r *passante per* S_m *con lo spazio* S_{n-m-2} *è polare di* S_m *nello spazio* S_r.

Difatti nello spazio S_r i punti di S_{r-m-1} sono coniugati a quelli di S_m perchè appartengono allo spazio S_{n-m-1} polare reciproco di S_m in S_n, e non vi sono altri punti coniugati a quelli di S_m in S_r fuori dello spazio S_{r-m-1} (def. II, teor. II).

Coroll. I. Lo spazio polare di un punto A_0 *in uno spazio* S_m *passante per* A_0 *è lo spazio di intersezione di* S_m *collo spazio polare di* A_0 *in* S_{n-1}.

Teor. VIII. Due spazî coniugati con uno spazio comune S_r *tagliano lo spazio polare* S_{n-r-2} *di* S_r *in spazî polari o coniugati; e inversamente.*

Dim. analoga a quella del teor. VIII, 153.

Coroll. Se nello spazio S_r *si considera un punto* A_0 (*se non è esso stesso un punto*) *lo spazio polare di* A_0 *interseca i due spazî coniugati in spazî polari o coniugati.*

Dim. analoga a quella del coroll. teor. VIII, 153.

162. *Teor. I. I sistemi di spazî intorno agli spazî* S_m *dello spazio* S_{n-1} *completo sono identici.*

Dati infatti due spazî S_m, S'_m e i loro polari S_{n-m-2}, S'_{n-m-2}, le còppie di spazî (S_m, S_{n-m-1}), (S'_m, S'_{n-m-1}) sono identiche, perchè facendo corrispondere identicamente S_m a S'_m, S_{n-m-1} a S'_{n-m-1}, i segmenti corrispondenti cogli estremi in spazî polari sono segmenti retti, e perciò si può stabilire fra le due coppie una corrispondenza d'identità (teor. III, 15).

Coroll. I. Lo spazio S_{n-1} *completo è identico intorno ad ogni suo spazio* S_m.

Coroll. II. Le stelle di $n - 3^{ma}$ *specie dello spazio* S_{n-1} *completo sono identiche.*

Coroll. III. Lo spazio S_{n-1} *completo è identico intorno ad ogni suo punto.*

Teor. II. Lo spazio polare del centro di una stella di $n - 3^{ma}$ *specie dello spazio* S_n *completo la divide in due parti identiche opposte.*

Dim. analoga a quella del teor. III, 109.

Coroll. Uno spazio S_{n-2} *divide lo spazio* S_{n-1} *completo in due parti identiche e opposte.*

Teor. III. Le due parti opposte in cui S_m *viene tagliato dallo spazio* S_{m-1} *d'intersezione con uno spazio* S_{n-2} *nello spazio* S_{n-1} *completo, sono situate da parti opposte delle spazio* S_{n-2}.

Dim. analoghe a quelle dei teor. IV e V, 109.

163. *Def. I.* Due spazî S_m, S_r che si incontrano in uno spazio S_a ($a \leqq o$) si dicono *perpendicolari* se gli spazî d'intersezione collo spazio S_{n-a-2} polare di S_a sono polari o coniugati.

Oss. Noi abbandoniamo qui la definizione di ortogonalità data nello spazio ordinario e nello spazio a quattro dimensioni sia nel campo Euclideo sia nel campo completo. Seguendo questa via in generale bisognerebbe premettere le considerazioni sulle distanze minime e massime degli spazî nello spazio completo a $n - 1$ dimensioni problema nella maggior parte dei casi non elementare.

D'altronde il problema delle distanze nello spazio a $n - 1$ dimensioni si appoggia secondo il nostro metodo alla ricerca dapprima delle perpendicolari comuni che incontrano due spazî dati nello spazio S_{n-2}; il che dimostra dunque che in generale

anche secondo il metodo prima adottato la teoria dell'ortogonalità fra rette e spazî deve precedere quella delle distanze.

Teor. I. Due spazî S_m, S_r coniugati, con uno spazio comune S_a, sono perpendicolari, e inversamente (teor. VIII, 161).

Coroll. I. Una retta perpendicolare ad un spazio S_{n-2} è perpendicolare a tutte le rette di S_{n-1} che passano pel punto d' intersezione di S_{n-2} con la retta data.

Coroll. II. Gli spazî passanti per uno spazio dato S_m sono perpendicolari allo spazio polare di S_m.

Dim. analoghe a quelle del coroll. teor. 110 e del coroll. III. teor. II, 155.

Es. Le rette, i piani e gli spazî passanti per un punto sono perpendicolari allo spazio polare del punto.

Coroll. III. Gli spazî perpendicolari ad uno spazio S_m, che non sono contenuti con S_m in uno spazio di dimensioni inferiori a $n-1$, passano per lo spazio polare S_{n-m-2} di S_m.

Perchè essi sono coniugati di S_m in S_{n-1}.

Es. Le rette, i piani e gli spazî perpendicolari ad uno spazio a $n-1$ dimensioni passano pei poli di questo spazio.

Teor. II. Lo spazio S_{n-2} polare di un punto dello spazio S_a comune a due spazî perpendicolari S_m, S_r taglia questi due spazî in due spazî polari o coniugati (coroll. teor. VIII, 161 e teor. I).

Teor. III. Dati due spazî perpendicolari S_m, S_r collo spazio S_a comune, ad S_m sono perpendicolari tutte le rette di S_r che congiungono un punto qualunque A_0 di S_a coi punti dello spazio S_{n-m-2} polare dello spazio S_m.

Nello spazio S_{n-1} gli spazî S_m, S_r, S_a hanno per polari gli spazî S_{n-m-2}, S_{n-r-2}, S_{n-a-2} (def. II, teor. II, 161); e poichè S_m, S_r passano per S_a; S_{n-m-2}, S_{n-r-2} sono contenuti in S_{n-a-2} (teor. V, 161) e rispettivamente in S_r e S_m, essendo S_m ed S_r coniugati fra loro.

Preso un punto A_0 di S_a lo spazio polare A_{n-2} di A_0 passa per S_{n-a-2} e quindi anche per S_{n-m-2} e S_{n-r-2}.

Scelto un punto C_0 di S_{n-m-2}, che è contenuto in S_r, lo spazio $(S_m C_0)$ incontra lo spazio S_{n-m-2} nel solo punto C_0 (coroll. II, teor. II, 161 e teor. II, 158), e nello spazio $(S_m C_0)$ il punto C_0 è polo di S_m (teor. VII, 161). Dunque la retta A_0C_0 è perpendicolare ad S_m (coroll. II, teor. I).

Teor. IV. Una retta che incontra due spazî polari è perpendicolare a questi spazî.

Siano S_m, S_{n-m-2} i due spazî polari; A_0, B_0 i punti d'intersezione della retta coi due spazî dati. Nello spazio (A_0S_{n-m-2}) a $n-m-1$ dimensioni, S_{n-m-2} ha per polo il punto A_0 (teor. VII, 161), dunque la retta A_0B_0 è perpendicolare a S_{n-m-2}. Per la stessa ragione è perpendicolare allo spazio S_m.

Coroll. Due spazî S_m, S_r hanno tante perpendicolari comuni quante sono le trasversali comuni ai due spazî S_m, S_r e ai loro spazî polari [1]).

---

1) Se gli spazî S_m, S_r sono duali in S_n e non hanno alcun punto comune, dati i loro spazî polari

Teor. V. Ogni retta che incontra uno spazio S_m, ed è a questo perpendicolare, incontra lo spazio polare di S_m ed è a questo perpendicolare.

Difatti lo spazio $(S_m A_0 B_0)$ incontra lo spazio polare S_{n-m-2} di S_m in un punto, che è il polo di S_m nello spazio $(S_m A_0 B_0)$, e poichè la retta $A_0 B_0$ è perpendicolare a S_m deve passare per questo polo (coroll. III, teor. I), ossia $A_0 B_0$ deve incontrare S_m, ed è a questo perpendicolare (teor. IV).

Teor. VI. Uno spazio S_m e uno spazio S_{n-2} indipendenti nello spazio completo S_{n-1} hanno una perpendicolare comune.

Sia A_0 il polo di S_{n-2} e S_{n-m-2} lo spazio polare di S_m. Lo spazio $(S_m A_0)$ taglia lo spazio S_{n-m-2} in un punto B_0, e la retta $A_0 B_0$ è evidentemente la sola perpendicolare a S_m e S_{n-2}.

164. *Def. I.* Per *piramide polare* o semplicemente *polare* nello spazio completo S_{n-1} intendiamo quella i cui vertici sono poli delle facce opposte a $n - 2$ dimensioni.

Teor. I. Esistono infinite piramidi fondamentali polari nello spazio S_{n-1}.

Supposto che una tale piramide esista nello spazio S_{n-2} si dimostra che esiste anche nello spazio S_{n-1}.

Sia $A_0^{(1)}$ un punto e A_{n-2} il suo spazio polare in S_{n-1}. Nello spazio A_{n-2} possiamo scegliere per ipotesi una piramide polare $A_0^{(2)} A_0^{(3)} \ldots. A_0^{(n-1)}$. Lo spazio $A_0^{(1)} \ldots. A_0^{(n-2)}$ è evidentemente lo spazio polare di $A_0^{(n-1)}$.

Il teorema è dunque dimostrato, perchè è vero per $n = 2,3,4$ (int. *l*, 39).

Coroll. I. Le facce opposte di una piramide polare sono polari.

Coroll. II. Gli spigoli di una piramide polare sono retti, e due piramidi polari sono identiche in 1.2.3....*n maniere diverse.*

Def. II. Le facce di una piramide fondamentale che passano per una faccia F_m o anche per uno spigolo o per un vertice e si corrispondono a due a due in modo che due facce corrispondenti prese insieme contengono tutti i vertici della piramide. Le chiameremo *facce corrispondenti.*

Teor. II. Le facce corrispondenti di una piramide polare sono perpendicolari.

Difatti se F_m è la faccia comune alle due facce corrispondenti, e F_{n-m-2} la faccia polare opposta, i vertici non contenuti in F_m formano in F_{n-m-2} pure una piramide polare, e le due facce passanti per F_m intersecano F_{n-m-2} precisamente in due facce opposte di questa piramide. Ma queste sono polari in

---

S'_{n-m-1}, S'_m, colla geometria proiettiva si dimostra facilmente che se $m \leqq n-m-1$, i quattro spazî hanno in generale $m+1$ trasversali comuni, mentre se $m \geqq n-m-1$ essi hanno $n-m$ di queste trasversali.

Se invece S_m, S_r non hanno alcun punto comune e sono situati in uno spazio inferiore, essi sono duali nello spazio S_{r+m-1} che li contiene, S_{r+m-1} incontra i loro spazî polari in S_n nei loro spazi polari in S_{r+m-1}, e si applica il caso precedente.

Finalmente se S_m e S_r hanno in S_n uno spazio R_a comune $(a \geqq o)$ e non sono compresi in uno spazio inferiore, si ha $r = n+a-m$. I due spazî polari sono S'_{n-m-1}, S'_{m-a-1} che sono contenuti nello spazio polare R_{n-a-1} di R_a. Lo spazio R_{n-a-1} incontra gli spazî S_m e S_{n+a-m} in due spazî S_{m-a-1} S_{n-m-1} che sono duali e sono polari in R_{n-a-1} agli spazî S_{n-m-1}, S_{n-a-1}, e si ricade nel caso precedente; dunque i quattro spazî S_m, S_r e i loro polari in S_n hanno in generale se $m-a \leqq n-m$, $m-a$ trasversali comuni, e se $m-a \geqq n-m$ ne hanno $n-m$.

F_{n-m-2}, dunque le due facce corrispondenti intorno a F_m sono coniugate (teorema VIII, 161), e quindi perpendicolari (def. I).

Teor. III. Gli n vertici di una piramide polare nello spazio completo S_{n-1} e i loro punti opposti determinano 2^n piramidi polari, che costituiscono l'intero spazio S_{n-1}.

Difatti siano $A_0^{(1)}, A_0^{(2)}, \ldots, A_0^{(n)}$ i vertici della piramide polare data, $A'_0{}^{(1)}$ $A'_0{}^{(2)} \ldots A'_0{}^{(n)}$ i vertici opposti, i quali formano una piramide identica alla prima (teor. III, 30), e che è pure una piramide polare. Si ottengono altrettante piramidi polari scambiando nella prima in tutte le maniere possibili i vertici di essa coi loro opposti. Le piramidi così ottenute sono 2^n. Difatti supposto che per lo spazio S_{n-2} siano 2^{n-1}, le piramidi dello spazio S_{n-1} si ottengono scrivendo accanto ad un vertice e al suo opposto tutte le 2^{n-1} piramidi formate cogli $n-1$ rimanenti vertici e i loro opposti, cioè 2^n. Il teorema è vero per $n=2,3$ dunque è vero in generale (int. *l*, 39).

§ 6.

Spazio all'infinito dello spazio Euclideo S_n — Spazî paralleli.

166. *Oss. I.* Vale in S_n il teor. e il coroll. analoghi al teor. I e coroll. dei n. 84 e 123 e la def. relativa.

Def. I. Due spazî S_m, $S_{m^{(1)}}$ $(m^{(1)} \geqq m)$ si diranno *paralleli di* 1ª *specie* o semplicemente *paralleli* quando lo spazio all'infinito $S_{m-1\infty}$ di S_m è situato nello spazio all'infinito $S_{m^{(1)}-1\infty}$ di S_m.

Teor. I. Se per due spazî S_m, $S_{m^{(1)}}$ indipendenti si ha $m+m^{(1)}<n$, da un punto qualunque di S_n si può condurre uno spazio $S_{m+m^{(1)}}$ parallelo ad entrambi. Per uno dei due spazî passa uno solo di questi spazî.

Infatti gli spazî all'infinito $S_{m-1\infty}$ $S_{m^{(1)}-1\infty}$ in S_m e $S_{m^{(1)}}$ determinano uno spazio $S_{m+m^{(1)}-1}$ ove è $m+m^{(1)}-1<n-1$. Lo spazio $S_{m+m^{(1)}-1}$ è dunque lo spazio all'infinito di infiniti spazî $S_{m+m^{(1)}}$ di S_n paralleli ai due spazî dati.

Per un punto qualunque A_0 di S_n passa uno solo di questi spazî, e quando questo punto cade in S_m, lo spazio $S_{m+m^{(1)}}$ contiene tutto S_m, perchè contiene oltre al punto A_0 lo spazio $S_{m-1\infty}$ di S_m.

Oss. II. Se invece è $m+m^{(1)}>n$, ponendo $m+m^{(1)}-n=\alpha$, i due spazî $S_m, S_{m^{(1)}}$ si incontrano in uno spazio S_α, e siccome essi non sono in generale contenuti in uno spazio inferiore a S_n come nel caso precedente, così per lo spazio S_m non si può condurre alcun spazio parallelo a $S_{m^{(1)}}$. Da un punto A_0 però si potrà ad essi condurre uno spazio parallelo ad α dimensioni il cui spazio all'infinito è precisamente quello di S_α.

Si vede facilmente che se i due spazî $S_{m-1\infty}$, $S_{m^{(1)}-1\infty}$ di S_m e $S_{m^{(1)}}$ giacciono in uno spazio $S_{n-\alpha-1\infty}$ all'infinito, allora per un punto A_0 di S_n si può condurre ai due spazî S_m, $S_{m^{(1)}}$ uno spazio parallelo $S_{n-\alpha}$. Per S_m o per $S_{m^{(1)}}$ passa uno solo di questi spazî.

Teor. II. Due spazî paralleli S_m, S_r $(m \geqq r)$ sono sempre situati in uno spazio S_{m+1} inferiore a S_n, eccetto che sia $m+1=n$.

Infatti lo spazio $S_{r-1\infty}$ di S_r giace in tal caso nello spazio $S_{m-1\infty}$ che è

determinato da m punti indipendenti, tra i quali possiamo supporre siano compresi gli r punti che determinano S_{r-1_∞}. I due spazî S_m e S_r venendo determinati oltre che da quegli m punti da altri due punti, essi sono contenuti in un medesimo spazio S_{m+1}.

Coroll. Due spazî paralleli non hanno nessun punto comune a distanza finita.

Infatti i due spazî S_m e S_r in S_{m+1} si incontrano soltanto in uno spazio S_{r-1} situato tutto all'infinito (teor. II, 158).

Teor. II. Due spazî paralleli A_m, A'_m vengono tagliati in spazî paralleli da altri due spazî B_r, B'_r paralleli fra loro, ma non ai primi due.

Infatti se B_r e A_m si incontrano in uno spazio S_a, e così A'_m, B'_r in uno spazio $S_{a'}$, (supposto $a' < a$), è chiaro che avendo B_r e A_m rispettivamente gli stessi elementi all'infinito di B'_r e A'_m, lo spazio all'infinito di $S_{a'}$ contiene lo spazio all'infinito di S_a. Nel caso $a' = a$ i due spazî S_a, $S_{a'}$ hanno lo stesso spazio all'infinito.

Oss. I. I due spazî A_m e A'_m essendo paralleli hanno lo stesso spazio all'infinito $A_{m-1\infty}$, quindi essendo questo spazio determinato da m punti, i due spazî A_m, A'_m sono contenuti in uno spazio S_{m+1} il quale avrà all'infinito uno spazio $S_{m\infty}$ che conterrà $A_{m-1\infty}$. Analogamente succede pei due spazî B_r, B'_r. Essi sono situati in uno spazio S_{r+1} che ha all'infinito uno spazio $S_{r\infty}$ contenente lo spazio $B_{r-1\infty}$.

Coroll. Se $r = n - m$ i due spazî B_{n-m}, B'_{n-m} incontrano A_m, A'_m in due coppie di punti che formano un parallelogrammo.

Infatti siano A_0 e B_0 i punti d'incontro di B_{n-m} con A_m e A'_m, e A'_0, B'_0 i due punti analoghi di B'_{n-m}. La retta A_0B_0 appartiene tanto allo spazio S_{m+1} sopra considerato come anche allo spazio B_{n-m}, e il suo punto all'infinito è per conseguenza nel punto d'incontro dello spazio $B_{n-m-1\infty}$ con lo spazio $S_{m\infty}$ (teor. II, 158). La retta $A'_0B'_0$ ha lo stesso punto all'infinito, perchè lo spazio $B'_{n-m-1\infty}$ è comune ai due spazi B_{n-m}, B'_{n-m}. Analogamente succede se consideriamo invece le coppie di punti $A_0A'_0$, $B_0B'_0$ nei quali i due spazî A_m, A'_m tagliano gli spazî B_{n-m}, B'_{n-m}.

166. *Altri casi di parallelismo.*

Oss. I. Oltre al caso precedente vi sono altri casi di parallelismo che non entrano nella definizione data, ma che meritano di essere menzionati. Si é visto già nello spazio a quattro dimensioni che due piani S_2, S'_2, indipendenti hanno un punto comune. Se questo punto cade all'infinito abbiamo detto che formano un altro caso di parallelismo differente da quello in cui i due piani hanno la medesima retta all'infinito. In quest'ultimo caso essi sono contenuti in uno spazio a tre dimensioni.

Gli altri casi di parallelismo oltre a quello testè considerato e che abbiamo chiamato parallelismo di 1ª specie, si ottengono quando S_m, S_r non hanno in comune uno spazio S_{r-1}, (se $r \leqq m$), ma hanno invece in comune uno spazio di minori dimensioni situato tutto all'infinito. Il numero delle dimensioni di questo spazio d'intersezione non potrà essere minore di $m + r - n$, perchè due spazî S_m e S_r si incontrano sempre almeno in uno spazio S_{m+r-n}, se non si incontrano in uno spazio di dimensioni maggiori. Diremo dunque in generale:

Def. I. Due spazî S_m, S_r, $(m \geqq r)$ sono *paralleli* quando il loro spazio di

intersezione, qualunque sia la loro posizione nello spazio S_n, è situato tutto all'infinito.

Teor. I. I casi di parallelismo di due spazi S_m, S_r *sono* $n-m$ *se è* $r \leqq m$.

Difatti essi si incontrano in generale in uno spazio ad $m+r-n$ dimensioni, ma possono incontrarsi in uno spazio a $m+r-n+1$, $m+r-n+2$ ecc. $m+r-n+(n-m-1)=r-1$ dimensioni. In quest'ultimo caso si ha il caso ordinario di parallelismo.

Coroll. Fra due spazî $S_m (m \geqq 1)$ *e* S_{n-1} *in* S_n *vi è un solo caso di parallelismo, quello cioè di* 1ª *specie.*

Oss. II. Il caso di parallelismo di due spazî S_m, S_r non compresi in spazî inferiori a S_n è precisamente quello in cui si incontrano in uno spazio a $m+r-n$ dimensioni.

§ 7.

Identità dello spazio S_n intorno ai suoi punti del campo finito — Parti in cui esso viene diviso da un suo spazio a n-1 dimensioni.

167. *Oss.* Con dimostrazioni analoghe a quelle date nel § 8 del piano Euclideo, e nel § 4 degli spazî S_3 e S_4 si dimostra che le stelle di $(n-2)^{ma}$ specie coi vertici nel campo finito dello spazio S_n sono identiche, che S_n è diviso da ogni spazio S_{n-1} in due parti opposte uguali, in una o nell'altra delle quali sono situati gli spazî paralleli a S_{n-1}, e che le due parti in cui uno spazio S_m non parallelo a S_{n-1} viene diviso dallo spazio S_{m-1} d'intersezione con S_{n-1} sono situate rispettivamente nelle parti suddette.

§ 8.

Spazî perpendicolari.

168. *Oss. I.* Se due punti coniugati dello spazio all'infinito si congiungono con un punto A_0 del campo finito si hanno due rette perpendicolari (def. V, 40). Così se si congiunge il punto A_0 con un punto ed una retta coniugati all'infinito, si ottiene una retta ed un piano perpendicolare in S_n.

Diremo quindi in generale:

Def. I. Due spazî S_m, S_r si dicono *perpendicolari* fra loro se i loro spazî all'infinito sono polari o coniugati (oss. 163).

Teor. I. Due spazî paralleli di 1ª *specie a due spazî perpendicolari e del medesimo numero di dimensioni degli spazî dati sono fra loro perpendicolari.*

Perchè i loro spazî all'infinito sono polari.

Teor. II. Le rette perpendicolari ad uno spazio S_{n-1} *sono parallele.*

Perchè hanno lo stesso punto all'infinito.

Teor. III. Se gli spazî all'infinito di due spazî S_m, S_r *sono polari, gli spazî (eccettuati i punti) contenuti in uno di essi o passanti per uno di essi sono perpendicolari all'altro.*

Difatti i loro spazî all'infinito sono coniugati (teor. V, 161).

Teor. IV. Se gli spazî all'infinito di due spazî S_m, S_r sono polari, gli spazî (eccettuati i punti) contenuti in uno di essi o passanti per uno di essi sono perpendicolari agli spazî (eccettuati i punti) contenuti nell'altro o passanti per l'altro.

Difatti i loro spazî all'infinito sono coniugati (teor. VI, 161).

Oss. II. La risoluzione dunque dei problemi di condurre per dati elementi spazî perpendicolari a spazî dati si riconduce a quello di condurre per gli elementi dati degli spazî, i cui spazî all'infinito siano polari o coniugati con quelli degli spazî dati.

Teor. V. Una retta perpendicolare ad uno spazio S_{n-1} è perpendicolare a tutti gli spazî contenuti in S_{n-1}.

Dim. analoga a quella del coroll. V, teor. II, 128.

Teor. VI. Da un punto di una retta o fuori di essa si può condurre un solo spazio S_{n-1} perpendicolare ad essa.

Basta congiungere il punto collo spazio polare del punto all'infinito della retta.

Costr. Per costruire questo spazio cogli elementi del campo finito basta condurre per la retta $n-1$ piani non situati in uno spazio S_{n-1}, e in essi tirare le perpendicolari dal punto dato alla retta, le quali determinano lo spazio richiesto.

Se il punto è situato fuori della retta basterà condurre la perpendicolare alla retta nel piano determinato con essa, la quale incontrerà la retta in un punto A_0. Lo spazio perpendicolare in A_0 alla retta passerà anche pel punto dato è sarà il richiesto,

Coroll. I. Tutte le perpendicolari condotte da un punto ad una retta sono nello spazio S_{n-1} perpendicolare a questa retta.

Teor. VII. Da un punto di uno spazio a $n-1$ dimensioni o da un punto fuori di esso si può condurgli una sola perpendicolare.

Basta congiungere il punto dato coi poli dello spazio all'infinito dello spazio dato S_{n-1}.

Costr. Per costruire questa normale cogli elementi del campo finito basta scegliere in S_{n-1} $n-1$ rette qualunque passanti per il punto dato e non situate in uno spazio inferiore, e condurre per il punto gli $n-1$ spazî normali a $n-1$ dimensioni che si incontrano nella normale richiesta, perchè gli spazî all'infinito di essi passano pel polo dello spazio all'infinito dello spazio dato.

Teor. VIII. Per un punto dello spazio S_n passano n rette che non giacciono in uno spazio S_{n-1}, e sono fra loro due a due perpendicolari.

Supposto che il teorema sia vero per lo spazio a $n-1$ dimensioni, pel teor. VIII risulta vero anche per lo spazio S_n; ma è vero per $n=2,3,4$, dunque è vero in generale (int. *l*, 39).

Teor. IX. Date $n-1$ rette non situate in uno spazio S_{n-2}, vi è una sola direzione di rette perpendicolari alle rette date.

Difatti il punto all'infinito di questa direzione è il polo dello spazio $S_{n-2\infty}$ determinato dagli $n-1$ punti all'infinito delle rette date.

Teor. X. Per un punto si può condurre un solo spazio S_{n-m} perpendicolare ad uno spazio S_m che incontra il primo in un solo punto.

Difatti lo spazio $S_{m-1\infty}$ all'infinito di S_m ha per polare uno spazio $S_{m-n-1\infty}$,

è quindi il punto dato con questo spazio determina un solo spazio S_{n-m} normale a S_m.

Teor. XI. Per uno spazio S_r si può condurre uno spazio S_a perpendicolare ad un altro S_m, quando lo spazio S_{r-1_∞} di S_r e lo spazio polare S_{n-m-2_∞} di S_{m-1_∞} sono situati in uno spazio S_{a-1_∞}.

Difatti lo spazio S_{a-1_∞} è coniugato allo spazio S_{m-1_∞} di S_m (def. III, 161 e def. I).

Coroll. I. Per una retta, un piano, uno spazio a tre ecc. a $n-2$ dimensioni si può condurre un piano, uno spazio a tre, a quattro ecc. a $n-1$ dimensioni perpendicolare ad uno spazio dato a $n-1$ dimensioni.

Def. II. Lo spazio S_{a+m-n} d'intersezione di S_a con S_m si chiama *proiezione normale* o *proiezione* dello spazio S_r nello spazio S_m.

Teor. XII. Due spazî a $n-1$ dimensioni hanno una direzione di piani perpendicolari comuni.

La direzione di questi piani è data dalla retta polare dello spazio a $n-3$ dimensioni all'infinito dello spazio comune S_{n-2}.

Teor. XIII. Più spazî dati $S_m^{(1)}$, $S_m^{(2)}$, $S_m^{(3)}$ hanno infiniti spazî normali comuni a $n-a-1$ dimensioni, quando i loro spazî all'infinito sono contenuti in uno spazio S_{a_∞}, essendo $a < n-1$.

In tal caso lo spazio S_{a_∞} ha per spazio polare uno spazio S_{n-a-2_∞} che è lo spazio di direzione di infiniti spazî perpendicolari agli spazî dati.

Se $a = n-2$ vuol dire che gli spazî dati hanno una direzione di perpendicolari comuni.

Teor. XIV. Due spazî S_m, $S_m^{(1)}$ hanno una sola perpendicolare comune che li incontra se $m + m^{(1)} + 1 = n$ e se i loro spazî all'infinito determinano uno spazio S_{n-2}.

Se i due spazî S_{m-1_∞}, $S_{m-1_\infty}^{(1)}$ di due spazî S_m, $S_m^{(1)}$ sono situati in uno spazio S_{n-2_∞}, essi ammettono una direzione di rette perpendicolari. Supposto $m \leqq m^{(1)}$, congiungiamo S_m col polo dello spazio S_{n-2_∞}; otteniamo così uno spazio S_{m+1}. Poichè $m + m^{(1)} + 1 - n = o$, questo spazio incontra $S_m^{(1)}$ in un punto A_0. Tirando quindi per A_0 la normale ai due spazî dati, essa interseca anche lo spazio S_m, essendo situata con questo nello spazio S_{m+1} (teor. II, 158).

Oss. III. Se gli spazî all'infinito di due spazî S_m, S_r sono coniugati allora non ha luogo il teorema III. Vi sono però spazî dell'uno che sono perpendicolari all'altro.

Consideriamo lo spazio S_{m-1_∞} all'infinito di S_m, esso ha per polare uno spazio S_{n-m-1_∞} in S_{n-1_∞}. Se lo spazio S_r passa per S_{n-m-1_∞} e se $r > n-m$ tutti gli spazî S_{n-m} contenuti in S_r e che passano per S_{n-m-1_∞} sono perpendicolari allo spazio S_m (def. I), e quindi tutti gli spazî contenuti in essi: non però gli altri spazî fuori di essi e situati in S_r.

Come vi sono due specie di ortogonalità fra due piani in S_4 (def. I, 129), così abbiamo diversi casi di ortogonalità fra due spazî S_m, S_r ($r, m > 1$) quando i loro spazî all'infinito sono coniugati in uno spazio S_a, essendo $a < n-1$, e quando non sono in generale situati in un tale spazio.

Facilmente si vede che sono n-m i casi di ortogonalità fra i due spazî S_m, S_r se è $m \geqq r$.

Così abbiamo in generale un metodo per la risoluzione dei problemi sull'ortogonalità degli spazî e sulla costruzione di enti ortogonali con soli elementi del campo finito; e senza che noi li indichiamo, ognuno vede in qual modo si deve procedere in ogni caso particolare.

§ 9.

Distanze — Angoli — Identità dello spazio intorno ai suoi spazî S_m.

169. *Oss. I.* Come nel piano, così nello spazio a tre e a quattro dimensioni si dimostrano i teoremi relativi alla distanza di un punto da uno spazio S_{n-1}, fra due spazî che ammettono delle perpendicolari comuni e fra spazî paralleli, senza bisogno che ci soffermiamo ulteriormente.

Oss. II. Seguendo un metodo analogo a quello usato nella definizione degli angoli di raggi, semipiani, semispazî a tre dimensioni fra loro (parte I, lib. III, cap. I, § 7 e parte II, lib. I cap. 1, § 7), per angoli di due spazî S_m, S_r intendiamo quelli che sono misurati dalle distanze normali minime dei loro spazî all'infinito [1]).

In modo analogo a quello usato per lo spazio a tre e a quattro dimensioni si definisce il diedro di due semispazî a $n-1$ dimensioni e le sue proprietà, che sono analoghe a quelle dei diedri dello spazio a tre e a quattro dimensioni, si dimostrano collo stesso metodo. Ad es. si ha che un piano normale a due semispazî a $n-1$ dimensioni li incontra in due raggi che formano un angolo uguale a quello dei due semispazî, così pure che le sezioni normali di due diedri uguali o disuguali sono pure uguali o disuguali, che due diedri opposti al vertice sono uguali, che un diedro $(a_{n-1}b_{n-1})$ è identico allo stesso diedro percorso nel verso opposto, e osservando che il sistema di spazî di S_n intorno ad uno spazio S_m si ottengono congiungendo S_m collo spazio S_{n-m-1_∞} polare del suo spazio all'infinito, l'identità dello spazio S_n intorno a due spazî qualunque S_m, S'_m si stabilisce mediante gli spazî polari dei loro spazî all'infinito.

§ 10.

Angoloide ennispigolo o enniedro — Piramide fondamentale in S_n.

170. *Def. I.* La figura formata da m raggi $a_1^{(1)}, a_1^{(2)}, .., a_1^{(m)}$ $(m \overline{\overline{<}} n)$ uscenti da un punto P_0 dello spazio S_n e indipendenti si chiama *angoloide* od *angolo solido a n dimensioni*. I raggi sono gli *spigoli*, P_0 il *vertice*, i settori angolari $(a_1^{(1)}a_1^{(2)})$, $(a_1^{(1)}a_1^{(3)})$ ecc. le *facce piane*, i triedri $(a_1^{(1)}a_1^{(2)}a_1^{(3)})$, $(a_1^{(1)}a^{(2)}a_1^{(4)})$ ecc. le *facce a tre dimensioni*, gli angoloidi $(a_1^{(1)}a_1^{(2)} .... a_1^{(n-1)})$, $(a_1^{(1)}a_1^{(2)} .... a_1^{(n-2)}a_1^{(n)})$ ecc. le *facce* a $n-1$ *dimensioni*, e finalmente i diedri a n dimensioni formati dalle facce a $n-1$ dimensioni si chiamano i suoi *diedri* a *n dimensioni* o *diedri*.

Def. II. Se l'angoloide ha n spigoli esso si chiama *ennispigolo* o *enniedro*.

Def. III. Due enniedri i cui spigoli sono raggi opposti si chiamano *opposti* al vertice.

Oss. I. Se gli spigoli dell'enniedro sono $a_1^{(1)}, a_1^{(2)}, ..., a_1^{(n)}$, e $a_{0_\infty}^{(1)}$ $a_{0_\infty}^{(2)}, ... a_{0_\infty}^{(n)}$ i loro punti all'infinito, questi determinano una *piramide fondamentale* o *enniedro* dello spazio all'infinito S_{n-1_∞}. Gli angoli delle facce piane dell'enniedro sono misurati dagli spigoli del suo enniedro all'infinito: così gli angoli delle sue facce a tre, a quattro ecc. a n dimensioni sono misurati dagli angoli piani, dai diedri a quattro ecc. a $n-1$ dimensioni dell'enniedro. E quindi le proprietà degli spigoli, degli angoli piani e dei diedri a tre ecc. a $n-1$ dimensioni dell'enniedro all'infinito danno altrettante proprietà degli angoli piani, dei diedri, a tre, ecc., a n dimensioni, dell'enniedro.

---

1) vedi nota n. 163. La ricerca degli angoli di due spazî fu fatta dapprima per via analitica da *Jordan* (Bull. de la Societé math. de France, 1875): poi per via geometrica da *Cassani* (Rendiconti dell'Acc. dei Lincei, 1885) e da *Castelnuovo* (Atti del R. Istituto Veneto, 1885). *Castelnuovo* dimostra con un processo elegante che gli n angoli di due spazî S_n, S'_n in S_{2n} sono reali.

Noi abbiamo visto che cosa s'intenda per parte interna ed esterna di una retta rispetto ad un segmento dato, di un piano rispetto ad un angolo piano, dello spazio a tre dimensioni rispetto a un triedro e a un tetraedro, dello spazio a quattro dimensioni rispetto a un quadriedro e a un pentaedro, e non solo nel campo Euclideo, ma eziandio nel campo completo dello spazio.

Procedendo collo stesso metodo ammettiamo per lo spazio S_{n-1} e spazî di dimensioni inferiori la seguente proposizione, che è stata dimostrata per $n=2,3,4$:

«I segmenti che congiungono un vertice qualunque di una piramide fondamen-
»tale in S_{n-1} con i punti della parte interna della faccia opposta costituiscono una
»medesima parte dello spazio» [1].

Questa porzione dello spazio si chiama parte interna dello spazio S_{n-1} rispetto alla piramide o per maggiore semplicità *parte interna della piramide.*

Da ciò risulta che un segmento avente i suoi estremi interni alla piramide e la parte interna di una piramide fondamentale a m vertici ($m < n-1$) nell'interno della piramide data giacciono nell'interno di essa. (Vedi coroll. II, III, teor. I, 145).

Si ha pure per l'ipotesi fatta che una retta che incontra una faccia a $n-2$ dimensioni della piramide in un punto interno, o che ha un punto interno alla piramide, deve incontrare un'altra faccia, o due facce analoghe, in un punto interno, seguendo la dimostrazione dei teor. III e IV del n. 95 o del n. 145,

Def. IV. La parte interna ed esterna dello spazio S_{n-1_∞} all'infinito di S_n rispetto alla piramide $\alpha_{0_\infty}^{(1)} \dots \alpha_{0_\infty}^{(n)}$ danno la *parte interna* e la *parte esterna* dell'*enniedro* $(a_1^{(1)} \dots a_1^{(n)})$ nello spazio S_n.

Applicando il teorema precedente alla piramide all'infinito dell'enniedro $A_0^{(n+1)}.A_0^{(1)} \dots A_0^{(n)}$ si hanno le proprietà:

Coroll. I. Gli angoli piani di cui un lato è uno spigolo dell'enniedro e l'altro lato è una semiretta passante pel vertice di esso e situata nella parte interna della faccia opposta, sono situati nella parte interna dell'enniedro.

Coroll. II. Ogni angolo col vertice nel vertice dell'enniedro e coi lati nell'interno, o su due facce a $n-1$ dimensioni di esso, giace nell'interno del enniedro.

Coroll. III. La parte interna di un angoloide di $n-1$ spigoli (o di un numero minore) situati nell'interno dell'enniedro o almeno sue due facce a $n-1$ dimensioni di esso, giace internamente all'enniedro.

Teor. I. La parte interna di ogni piramide fondamentale di n vertici interni all'enniedro, o su due facce almeno a $n-1$ dimensione di esso, giace nell'interno dell'enniedro.

Ammesso che il teorema sia vero per un angoloide di $n-1$ spigoli, perchè è vero per $n=3,4$ ecc. le facce della piramide suddetta sono sulla superficie dell'enniedro. Scelti due punti A_0, B_0 di queste facce, se P_0 è il vertice dell'enniedro, l'angolo $P_0.A_0B_0$ è interno all'enniedro. Quindi tutti i segmenti che congiungono due punti di due facce della piramide suddetta sono interni all'enniedro. Ma ogni segmento che ha un punto interno di questa piramide incontra due facce di essa in due punti interni (oss. I), dunque ogni punto interno della piramide è interno all'enniedro.

Il teorema è dunque dimostrato essendo vero per $n=2,3,4$.

Teor. II. Le parti dello spazio S_n interne agli $n+1$ enniedri di una piramide fondamentale coincidono.

---

1) Vedi teor. II e oss. II.

La dim. è analoga a quella del teor. I, 145. Questa proprietà è vera dunque se è vera come abbiamo supposto nell'oss. I per lo spazio S_{n-1}.

Ma è vera per $n = 2,3,4$ dunque è vera in generale.

Oss. II. Dunque è vera la proprietà dell'oss. I, e quindi anche quelle che ne abbiamo dedotto.

Def. V. Le parti interne degli enniedri di una piramide fondamentale in S_n costituiscono una parte dello spazio S_n che chiamo *parte interna* della piramide. La parte rimanente di S_n si chiama *parte esterna.*

Coroll. I. Il segmento di due punti interni ad una piramide fondamentale giace nell'interno di essa.

Dim. analoga a quella del coroll. II del teor. I, 145.

Teor. III. Ai raggi interni di un enniedro sono opposti i raggi dell'enniedro opposto.

Perchè tale è la proprietà dei loro punti all'infinito rispetto alle due piramidi opposte dei due enniedri. (Vedi teor. I, 115).

Def. VI. Se la piramide all'infinito dell'enniedro è polare, l'enniedro si chiama *ennirettangolo.*

Teor. IV. In un enniedro ennirettangolo gli angoli piani, i diedri delle facce piane a tre, a quattro ecc. a $n - 1$ dimensioni sono retti (oss. II, 169 e coroll. II, teor. I, teor. II, 164).

Teor. V. Gli n spazî a $n - 1$ dimensioni di un enniedro ennirettangolo dividono lo spazio S_n in 2^n enniedri ennirettangoli due a due opposti (teorema III, 164).

Teor. VI. Gli enniedri ennirettangoli sono identici.

Perchè lo sono le loro piramidi all'infinito (coroll. II, teor. I, 164).

Teor. VII. Se gli ennaedri all'infinito di due enniedri in S_n sono uguali, lo sono pure i due enniedri.

Si può stabilire una corrispondenza d'identità fra i due enniedri facendo corrispondere fra loro i vertici di essi e i loro ennaedri all'infinito (teorema III, 15).

Coroll. I. Due enniedri opposti al vertice sono uguali.

Infatti i loro enniedri all'infinito sono opposti e quindi uguali (teor. III, 30).

Coroll. II. Due enniedri, i cui spigoli sono paralleli e diretti nello stesso verso o nel verso opposto sono uguali.

Perchè gli ennaedri all'infinito di essi sono uguali.

Teor. VIII. Non vi sono due enniedri uguali aventi una medesima faccia comune a $n - 1$ dimensioni cogli altri due spigoli situati dalla medesima parte dello spazio determinato da quella faccia.

Il teorema è vero, se è vero che nello spazio S_{n-1} (completo o no è la medesima cosa) non esistono due piramidi fondamentali uguali aventi una medesima faccia a $n - 2$ dimensioni comune e i rimanenti vertici dalla medesima parte di questa faccia. Ma questo teorema è vero se è vero che non possono esistere in S_{n-1} due angoloidi di $n - 1$ spigoli uguali aventi una medesima faccia a $n - 2$ dimensioni e i cui rimanenti spigoli siano situati dalla medesima parte della faccia comune: dunque il teorema enunciato è vero se è

vero per lo spazio a $n-1$ dimensioni. Ma è vero per $n=3,4$ quindi è vero anche in generale (int. l, 39).

Teor. IX. Non esistono due piramidi fondamentali uguali in S_n aventi in comune una faccia a $n-1$ dimensioni e i vertici opposti dalla medesima parte di questa faccia.

Difatti se ciò fosse, esisterebbero anche due enniedri uguali con una faccia comune a $n-1$ dimensioni e i rimanenti spigoli dalla medesima parte di questa faccia, che avrebbero i loro vertici in un vertice qualunque della faccia comune alle due piramidi contro il teor. VIII.

Teor. X. Uno spazio a $n-1$ dimensioni che incontra internamente uno spigolo di una piramide fondamentale in S_n incontra internamente gli spigoli che uniscono uno o più vertici coi rimanenti, senza incontrare gli altri spigoli.

Oppure:

Separati i vertici della piramide in due gruppi, lo spazio può incontrare internamente gli spigoli che uniscono i vertici di un gruppo coi vertici dell' altro, senza poter incontrare internamente gli spigoli di un medesimo gruppo. Esistono sempre due di questi gruppi quando lo spazio taglia internamente uno spigolo della piramide.

Supponiamo vero il teorema per una piramide fondamentate di n vertici, e sia $A_0^{(1)}A_0^{(2)}\ldots A_0^{n}\,A_0^{(n-1)}$ la piramide fondamentale in S_n. Sia $(A_0^{(1)}A_0^{(m+1)})$ lo spigolo che viene intersecato dallo spazio S_{n-1} in un punto interno.

Data la piramide $A_0^{(1)}A_0^{(2)}\ldots\ldots A_0^{(n)}$ e scelti i due gruppi di vertici

$$A_0^{(1)}A_0^{(2)}\ldots\ldots A_0^{(m)};\quad A_0^{(m+1)}\ldots\ldots A_0^{(1)} \qquad (1)$$

di essa, lo spazio S_{n-1} incontra lo spazio di questa piramide in uno spazio S_{n-2}, che per l' ipotesi fatta può essere scelto in modo da incontrare gli spigoli che uniscono i vertici di uno qualunque dei due gruppi con quelli dell' altro, ed esistono sempre due gruppi (1), perchè S_{n-1} (e quindi anche S_{n-2}) incontra lo spigolo $(A_0^{(1)}A_0^{(m+1)})$, ai quali devono appartenere rispettivamente i due vertici $A_0^{(1)}$, $A_0^{(m+1)}$. Per i punti ove lo spazio S_{n-2} incontra gli spigoli della piramide di n vertici $A_0^{(1)}\ldots\ldots A_0^{(n)}$ passa anche lo spazio S_{n-1} e soltanto per questi punti interni agli spigoli della piramide suddetta, sempre in conformità all'ipotesi fatta. Scelta un' altra piramide fondamentale di n vertici collo spigolo $(A_0^{(1)}A_0^{(m+1)})$, ad es.:

$$A_0^{(1)}A_0^{(2)}\ldots\ldots A_0^{(m)}\ldots\ldots A_0^{(n-1)}A_0^{(n+1)} \qquad (2)$$

lo spazio S_{n-1} incontra gli spigoli di essa che uniscono i vertici dei due gruppi

$$A_0^{(1)}A_0^{(2)}\ldots\ldots A_0^{(m)},\ A_0^{(m+1)}\ldots\ldots A_0^{(n-1)} \qquad (3)$$

Per l'ipotesi fatta il rimanente vertice $A_0^{(n+1)}$ dovrà essere situato in uno o nell' altro gruppo, ed avremo le due possibilità:

$$A_0^{(1)}A_0^{(2)}\ldots\ldots A_0^{(m)},\ A_0^{(m+1)}\ldots\ldots A_0^{(n-1)}A_0^{(n+1)} \qquad (4)$$

$$A_0^{(1)}A_0^{(2)}\ldots\ldots A_0^{(m)}A_0^{(n+1)},\ A_0^{(m+1)}\ldots\ldots A_0^{(n-1)} \qquad (4')$$

che possono ridursi ad una sola quando cioè i gruppi (4 e (4') siano composti

dallo stesso numero di vertici. Si hanno dunque per la piramide in S_n i due tipi:

$$A_0^{(1)}A_0^{(2)} \dots A_0^{(m)}\,;\quad A_0^{(m+1)} \dots A_0^{(n-1)}A_0^{(n)}A_0^{(n+1)}$$

$$A_0^{(1)}A_0^{(2)} \dots A_0^{(m)}A_0^{(n+1)}\,;\quad A_0^{(m+1)} \dots A_0^{(n-1)}A_0^{(n)}$$

Difatti se lo spazio S_{n-1} potesse incontrare un altro spigolo, questo dovrebbe essere uno degli spigoli che congiunge due vertici del medesimo gruppo, per es. $A_0^{(1)}A_0^{(2)}$, ed allora scegliendo la piramide:

$$A_0^{(1)}A_0^{(2)} \dots A_0^{(m)} \dots A_0^{(n)}$$

vi sarebbe uno spazio S_{n-2} che incontrebbe gli spigoli che uniscono i vertici dei due gruppi (1) e ancora lo spigolo $A_0^{(1)}A_0^{(2)}$, contro l'ipotesi.

Dunque se il teorema è vero per lo spazio S_{n-1} è vero anche nello spazio S_n, ma è vero per $n = 2,3,4$ dunque è vero in generale (coroll. I teor. II, 95 e coroll. I teor. II, 145, int. *l*, 39).

Coroll. I. Se uno spazio che non passa per alcuno dei vertici di una piramide fondamentale incontra gli n spigoli passanti per un vertice in punti esterni esso taglia gli altri spigoli in punti esterni.

Oss. III. Valgono anche per la piramide fondamentale in S_n le proprietà relative ai punti d'intersezione di una retta che ha un punto interno ad una faccia a $n-1$ dimensioni della piramide od ha un punto interno ad essa (oss. I e II).

§ 11.

Triedri, Quadriedri ecc. Enniedri di specie differenti.

171. *Oss.* Trattando dello spazio a quattro dimensioni abbiamo trovato i triedri di 2ª specie che hanno per vertice una retta (142) e si distinguono dai triedri di 1ª specie appartenenti allo spazio a tre dimensioni. Così nello spazio S_5 in modo analogo si trovano i triedri di 3ª specie che hanno per vertice un piano e per facce tre spazî a tre dimensioni. Così si trovano in S_5 i quadriedri di 2ª specie che hanno per vertice una retta e per facce quattro piani passanti per essa.

Così l'enniedro di 1ª specie lo s'incontra nello spazio a m dimensioni; nello spazio a $m+1$ dimensioni si ha l'enniedro di 2ª specie che ha per vertice una retta e nello spazio a n dimensioni si ha l'enniedro di $(n-m)^{ma}$ specie che ha per vertice uno spazio a $n-m-1$ dimensioni e le cui facce sono m spazî a $n-m$ dimensioni passanti pel primo. Le proprietà di questi enniedri di specie differenti si deducono da quelle degli enniedri di 1ª specie. Non ci abbisogna di fermarci ulteriormente su questi enti geometrici.

§ 12.

Versi degli enniedri e delle piramidi fondamentali nello spazio S_m.

172, *Oss. I.* Supposto che i versi della stella di $n-3^{ma}$ specie in S_{n-1} e dello spazio S_{n-1} stesso siano determinati da quelli di un diedro a $n-1$ dimensioni di un angoloide a $n-1$ spigoli indipendenti, analogamente al piano, allo spazio a tre e a quattro dimensioni, i versi dello spazio $S_{n-1\infty}$ di S_n o di uno spazio direttore qualunque determinano i *versi* della stella di $n-2^{ma}$ specie,

Rispetto alle stelle di $n - 2^{ma}$ si dimostrano collo stesso metodo le proprietà analoghe ai versi delle stelle di 1ª specie dello spazio a tre dimensioni (96) oppure delle stelle di 2ª specie dello spazio S_4 (146).

In modo analogo, definendo i versi dello spazio S_n e col processo della dimostrazione da $n-1$ a n, si ha che i versi dello spazio S_n sono determinati da quelli di un diedro di un suo enniedro, e con ciò rimane dimostrata la proprietà sopra ammessa. Noi enunciamo e dimostriamo qui le proprietà relative ai versi degli enniedri e delle piramidi fondamentali, per meglio conoscere l'impiego del processo suddetto di dimostrazione.

Oss. II. Supponiamo sia vera la proprietà che «nello spazio S_{n-1} due piramidi fondamentali che hanno una faccia a $n-2$ dimensioni comune sono dello stesso verso o di verso opposto secondo che i loro vertici rimanenti sono situati dalla stessa parte o da parti opposte della faccia comune». Questa proprietà vale già per il piano, lo spazio a tre e a quattro dimensioni (Vedi teor. V e oss. VIII).

Teor. I. Due enniedri $a_1^{(1)}a_1^{(2)} \dots a_1^{(n)}$, $a_0^{(1)}a_1^{(2)} \dots a'^{(n)}_1$ aventi il medesimo vertice P_0 e una faccia comune a $n-1$ dimensioni sono dello stesso verso o di verso opposto secondo che i rimanenti spigoli $a_1^{(n)}$ e $a'^{(n)}_1$ sono situati dalla stessa parte o da parti opposte rispetto alla faccia comune.

Difatti nel primo caso sono dello stesso verso, perchè lo sono le loro piramidi all'infinito per l'ipotesi fatta, mentre nel secondo caso sono di verso opposto. (fig. 116).

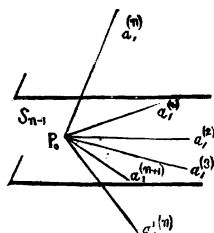



fig. 116

Oss. III. Si dimostrano allo stesso modo i coroll. I e II del teor. VII del n. 146.

Così vale colla dimostrazione analoga a quella del teorema XI, 96 o X, 146 il teor. relativo ai versi di due enniedri collo stesso vertice e i cui spigoli incontrano uno spazio S_{n-1} in due piramidi aventi o no il medesimo verso.

Teor. II. Due enniedri $a_1^{(1)}a_1^{(2)} \dots a_1^{(n)}$, $a_1^{(1)}a'^{(2)}_1a'^{(3)}_1 \dots a'^{(n)}_1$ che hanno uno spigolo e il vertice comune e le due facce $(a_1^{(2)} \dots a_1^{(n)})$, $(a'^{(2)}_1 \dots a'^{(n)}_1)$ in un medesimo spazio dello stesso verso o di verso opposto, sono dello stesso verso o di verso opposto.

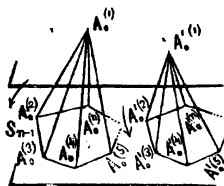



fig. 117

Difatti se gli angoloidi $(a_1^{(2)} \dots a_1^{(n)})$, $(a'^{(2)}_1 \dots a'^{(n)}_1)$ intorno al vertice comune sono dello stesso verso, le loro piramidi all'infinito $A_0^{(2)}{}_\infty A_0^{(3)}{}_\infty \dots A'^{(n)}_0{}_\infty$, $A'^{(2)}_0{}_\infty A'^{(3)}_0{}_\infty \dots A'^{(n)}_0{}_\infty$ sono del medesimo verso (oss. I), e quindi anche i due angoloidi $A_0^{(1)}{}_\infty . A_0^{(2)}{}_\infty \dots A_0^{(n)}{}_\infty$, $A_0^{(1)}{}_\infty . A'^{(2)}_0{}_\infty \dots A'^{(n)}_0{}_\infty$ (oss. III), e perciò anche i due enniedri.

Teor. III. Due enniedri $A_0^{(1)}.A_1^{(2)} \dots A_0^{(n+1)}$, $A'^{(1)}_0.A'^{(2)}_0 \dots A'^{(n+1)}_0$ sono dello stesso verso o di verso opposto secondochè le loro sezioni $A_0^{(2)} \dots A_0^{(n+1)}$, $A'^{(2)}_0 \dots A'^{(n+1)}_0$ con uno spazio S_{n-1} sono o no dello stesso verso e secondochè i loro vertici sono o no situati dalla stessa parte di S_{n-1}. Se invece le due sezioni sono di verso opposto, i due enniedri nel primo caso sono di verso contrario, e nel secondo dello stesso verso.

Dim. analoga a quella del teor. XII, 96 o XI, 146 (fig. 117).

Oss. IV. Da ciò deriva coll'analoga dimostrazione il corollario analogo al coroll. I del teor. XII, 146.

Coroll. I. Due enniedri $a_1^{(1)}a_1^{(2)} \ldots a_1^{(n)}$, $a'_1{}^{(1)}a'_1{}^{(2)} \ldots a'_1{}^{(n)}$ *con due spigoli* $a_1^{(2)}, a'_1{}^{(2)}$ *sulla medesima retta e diretti in verso contrario e tali che gli spigoli* $a_1^{(3)}, a'_1{}^{(3)}$ *si incontrino in un punto* $A_0^{(3)}$; $a_1^{(4)}, a'_1{}^{(4)}$ *in un punto* $A_0^{(4)}$, *e così via, gli spigoli* $a_1^{(n)}, a'_1{}^{(n)}$ *in un punto* $A_0^{(n)}$, *e i rimanenti spigoli* $a_1^{(1)}, a'_1{}^{(1)}$ *situati dalla stessa parte dello spazio* $a_1^{(2)}a'_1{}^{(2)}a_1^{(3)}a'_1{}^{(3)} \ldots a_1^{(n)}a'_1{}^{(n)}$, *sono di verso opposto.*

Se invece $a_1^{(1)}$ *e* $a'_1{}^{(1)}$ *sono da parti opposte rispetto allo spazio suddetto i due enniedri sono dello stesso verso.*

Se $a_1^{(2)}, a'_1{}^{(2)}$ *sono diretti nel medesimo verso, nel primo caso i due enniedri hanno lo stesso verso e nel secondo sono di verso opposto.*

Oss. V. Questa proprietà risulta in modo analogo al coroll. II del teor. XI del n. 146; soltanto bisogna supporre dimostrata la proprietà che le permutazioni pari dei vertici della piramide in S_{n-1} danno un verso e le permutazioni dispari danno il verso opposto, come avviene nel piano, nello spazio a tre e a quattro dimensioni (Vedi teor. IV).

Teor. IV. Le permutazioni pari dei vertici di una piramide fondamentale dello spazio S_n *danno un verso dello spazio* S_n, *le permutazioni dispari danno il verso opposto.*

Abbiamo supposto che il teorema sia vero per lo spazio S_{n-1} (oss. IV). Scelto l'enniedro $A_0^{(1)}.A_0^{(2)} \ldots A_0^{(n+1)}$ della piramide fondamentale in S_n, le permutazioni pari dei vertici della piramide $A_0^{(2)} \ldots A_0^{(n+1)}$ nello spazio S_{n-1} di essa danno lo stesso verso di S_{n-1} e quindi anche lo stesso verso dell'enniedro di vertice $A_0^{(1)}$ (teor. III). Le permutazioni dispari dei vertici $A_0^{(2)} \ldots A_0^{(n+1)}$ danno il verso opposto. Ma tenendo fissi gli $n+1$ vertici $A_0^{(1)}, A_0^{(2)}, \ldots, A_0^{(n+1)}$ degli $n+1$ enniedri della piramide fondamentale in S_n e scambiando gli altri vertici si ottengono tutte le permutazioni degli $n+1$ vertici. Ora se nel corollario I del teor. III si suppone che $a_1^{(1)}, a'_1{}^{(1)}$ si incontrino in un punto $A_0^{(n+1)}$ e i vertici dei due enniedri siano $A_0^{(1)}$ e $A_0^{(2)}$, i due spigoli $a_1^{(1)}, a'_1{}^{(1)}$ sono situati dalla stessa parte dello spazio $A_0^{(1)}A_0^{(2)} \ldots A_0^{(n)}$ e i due enniedri $A_0^{(1)}.A_0^{(2)}A_0^{(3)} \ldots \ldots A_0^{n+1}$, $A_0^{(2)}.A_0^{(1)}A_0^{(3)} \ldots A_0^{(n+1)}$ sono di verso opposto (coroll. I, teor. III). Ma l'enniedro $A_0^{(2)}.A_0^{(3)}A_0^{(1)}A_0^{(4)} \ldots A_0^{(n+1)}$ è di verso opposto all'enniedro $A_0^{(2)}.A_0^{(1)}A_0^{(3)} \ldots A_0^{(n+1)}$; dunque i due enniedri $A_0^{(1)}.A_0^{(2)}A_0^{(3)} \ldots A_0^{(n+1)}$, $A_0^{(2)}.A_0^{(3)}A_0^{(1)} \ldots A_0^{(n+1)}$ sono dello stesso verso.

Ma $A_0^{(1)}A_0^{(2)}A^{(3)} \ldots A_0^{(n+1)}$, $A_0^{(2)}A_0^{(3)}A_0^{(1)} \ldots A_0^{(n+1)}$ sono due permutazioni pari degli $n+1$ vertici della piramide fondamentale data, dunque il teorema è dimostrato, se è vero per lo spazio S_{n-1}. Ma lo è per $n = 2,3,4$ dunque è vero in generale.

Essendo dimostrato il teor. IV in ogni caso, in generale è vero anche il coroll. I del teor. III.

Def. I. Diremo anche che le permutazioni pari danno un verso della piramide, le permutazioni dispari il verso opposto.

Oss. VI. È però ancora da dimostrare l'ipotesi fatta nell'oss. II, sulla quale abbiamo basate le dimostrazioni precedenti.

Teor. V. Due piramidi fondamentali in S_n *che hanno una faccia a* $n-1$ *dimensioni comuni sono o no dello stesso verso secondo che i rimanenti vertici sono o no situati dalla stessa parte della faccia comune.*

Questo teorema è mediante la def. I un'altra forma del coroll. I del teor. I (oss. III). È vero dunque se è vero nello spazio S_{n-1}; ma lo è per $n = 2,3,4$; dunque è vero in generale (int. *l*, 39).

Oss. VII. Restano così dimostrati in ogni caso i teoremi derivati dall'ipotesi fatta nell'oss. I.

Teor. VI. Dato un enniedro $a_1^{(1)}a_1^{(2)} \dots a_1^{(n)}$, *se si scambia un numero dispari di spigoli coi loro prolungamenti si ottiene un enniedro di verso opposto al dato; se si scambia invece un numero pari di spigoli coi loro prolungamenti si ottiene un enniedro dello stesso verso.*

Dim. analoga a quella del teor. XII, 96 o XIII, 146 (teor. V).

Coroll. I. Due enniedri opposti al vertice in S_n *sono dello stesso verso o di verso opposto secondo che* n *è pari o dispari.*

Difatti se n è pari, lo scambio che si fa degli spigoli dell'enniedro coi loro prolungamenti è pari, se invece n è dispari lo scambio è dispari.

Oss. VIII. Relativamente ai versi degli enniedri cogli spigoli paralleli vale il corollario analogo al coroll. III, teor. XII, 96 o al coroll. II, teor. XIII, 146 colla analoga dimostrazione.

Coroll. II. Due ennaedri opposti nello spazio completo S_{n-1} *sono diretti nello stesso verso o in verso opposto secondo che* n *è pari o dispari.*

Ciò risulta dal coroll. I stesso, considerando lo spazio $S_{n-1\infty}$ come spazio polare del vertice degli enniedri.

§ 13.

Versi delle figure identiche — Figure congruenti e simmetriche.

173. *Oss I.* Data la definizione di punti e di figure simmetriche rispetto ad uno spazio S_{n-1}, come si è fatto nel piano, nello spazio a tre e a quattro dimensioni (47, 97 e 147), si dimostrano allo stesso modo le analoghe proprietà, e fra le altre quella che due enniedri simmetrici rispetto ad uno spazio S_{n-1} sono di verso opposto, e che gli spazî simmetrici si tagliano nello spazio di simmetria. Allo stesso modo si dimostra pure che la corrispondenza d'identità fra due figure identiche è determinata da due enniedri e quindi anche da due piramidi fondamentali delle due figure, e perciò che due figure identiche non possono avere più di $n+1$ coppie di punti corrispondenti comuni. Si dimostra pure che le figure rettilinee determinate da due gruppi di m punti sono identiche se i segmenti di $m-(n+1)$ di essi dai rimanenti, e i segmenti di questi sono uguali, e così che se due enniedri di due figure identiche sono del medesimo verso o di verso opposto tutti gli enniedri corrispondenti sono dello stesso verso o di verso opposto.

Data la definizione di figure congruenti e simmetriche come nel piano, nello spazio a tre e a quattro dimensioni (58, 98 e 148) si ricava che due figure congruenti o simmetriche ad una terza sono congruenti fra loro; che due figure l'una simmetrica e l'altra congruente ad una terza sono simmetriche fra loro, e finalmente che due figure congruenti aventi n coppie di punti indipendenti corrispondenti comuni coincidono, mentre se sono simmetriche hanno in comune tutti i punti dello spazio S_{n-2} determinato dalle n coppie di punti coincidenti.

§ 14.

Superficie sferica a n — 1 dimensioni.

174. *Def. I.* Tutti i punti distanti da un punto P_0 nello spazio S_n di un segmento dato costituiscono una figura che si chiama *superficie sferica;* il segmento dato *raggio,* il punto P_0 *centro.* Due punti situati in due raggi opposti si dicono *opposti,* e *diametro* il loro segmento.

Oss. I. La superficie sferica è una figura a $n-1$ dimensioni, perchè lo è la stella di $n-2^{ma}$ specie rispetto ai suoi raggi. Così vale il cor. analogo al cor. della def. I, 101.

Def. II. Tutti i diametri o tutti i raggi della superficie costituiscono una parte dello spazio S_n che si chiama *sfera.*

Oss. II, Vale una definizione analoga alla def. III del n. 101 rispetto alla parte interna ed esterna della sfera; così pure l'oss. II, 101.

Def. III. I piani e gli spazî a tre, ecc. a $n-1$ dimensioni passanti pel centro della sfera chiamansi *piani* e *spazi diametrali.*

Coroll. Ogni piano ed ogni spazio S_m diametrale tagliano rispettivamente la sfera a $n-1$ dimensioni in una circonferenza e in una sfera a $n-1$ dimensioni.

Questa proprietà risulta immediatamente dalla definizione.

Teor. I. Una retta non può incontrare la superficie sferica a tre dimensioni in più di due punti.

La stessa dim. del teor. I, 101.

Ind. I. È per questo che indicheremo la superficie sferica a $m-1$ dimensioni col simbolo S^2_{n-1}, indicando con $n-1$ il numero delle dimensioni e con 2 il numero massimo dei punti d'intersezione con una retta.

Teor. II. Un piano qualunque taglia la sfera S^2_{n-1} in una circonferenza, in uno o nessun punto, secondo che la sua distanza dal centro è minore, uguale o maggiore del raggio.

Infatti lo spazio diametrale che unisce il piano col centro, taglia la sfera S^2_{n-1} in una sfera a due dimensioni S_2^2, che viene tagliata dal piano in una circonferenza, in uno o nessun punto (teor. II, 101).

Teor. III. Uno spazio a m dimensioni ($m > 2$, $m \leqq n-1$) *taglia la sfera S^2_{m-1} in una sfera S^2_{m-1}, in uno o in nessun punto, secondo che la sua distanza dal centro è minore, uguale o maggiore del raggio della sfera S^2_{n-1}.*

Dim. analoga a quella del teor. II, 101.

Teor. IV. Uno spazio diametrale S_m incontra la sfera S^2_{n-1} in una sfera S_{m-1} di raggio massimo.

Dim. analoga al teor. III, 101.

Coroll. Un piano diametrale taglia la sfera S^2_{n-1} in un cerchio massimo.

Def. IV. Una sfera S^2_m situata in uno spazio diametrale S_m si chiama per ciò *sfera massima.*

Def. V. Una retta tangente in un punto ad una circonferenza massima dicesi *tangente* alla superficie S^2_{n-1} in quel punto, che è il punto di *contatto,*

Teor. V. *Le tangenti in un punto della superficie sferica S^2_{n-1} sono situate in uno spazio a $n-1$ dimensioni perpendicolare al raggio passante pel punto dato.*

Dim analoga a quella del teor. IV, 101.

Def. VI. Lo spazio S_{n-1} che contiene le tangenti alla sfera S^2_{n-1} in un punto si chiama *tangente* alla sfera nel punto dato, che è il punto di *contatto.*

Teor. VI. La sfera S^2_{n-1} giace tutta da una parte di un suo spazio tangente a $n-1$ dimensioni.

Dim. analoga a quella del teor. V, 101.

Def. VII. Ogni spazio S_m che ha colla sfera S^2_{n-1} un solo punto comune, contiene infinite tangenti alla sfera e nominasi perciò spazio *tangente* alla sfera nel punto dato, come punto di contatto.

Teor. VII. Lo spazio S_{n-1} perpendicolare nel punto di mezzo di una corda alla corda stessa passa pel centro della sfera.

Dim. analoga a quella del teor. VI, 101.

Coroll. Ogni spazio diametrale S_{n-1} divide la sfera S^2_{n-1} in due parti simmetriche rispetto ad esso.

Dim. analoga a quella del coroll. teor. VI, 101.

Teor. VIII. $n+1$ punti indipendenti determinano una sfera S^2_{n-1}, che è determinata da $n+1$ qualunque dei suoi punti.

Dim. analoga a quella del teor. VII, 101.

Coroll. Una sfera S^2_{n-1} è sempre contenuta in uno spazio S_n.

Difatti essa è situata nello spazio S_n determinato dagli $n+1$ punti indipendenti che la determinano.

§ 15.

Linee e superficie o sistemi continui nello spazio generale e di dato ordine nello spazio S_n.

175. *Def. I.* Dato un sistema di linee (def. I, 36) ad una dimensione nello spazio generale tale che ad ogni punto di una linea corrisponda un punto della linea successiva e così via, e se i sistemi di punti corrispondenti sono continui, ossia linee, il sistema di linee dato dicesi *continuo* a due dimensioni rispetto al punto come elemento, od anche *superficie a due dimensioni.* Esso si chiama anche *continuo ad una dimensione* rispetto alle linee di cui si compone.

Dato un sistema ad una dimensione di superficie a due dimensioni, se fra i loro punti ha luogo la stessa proprietà dei punti delle linee del sistema anzidetto, si ha un sistema *continuo a tre dimensioni* rispetto al punto come elemento, oppure continuo *ad una dimensione* rispetto alle superficie di cui si compone, e si chiama *superficie a tre dimensioni.* Ottenute così le superficie a quattro, a cinque ecc. a $m-1$ dimensioni, allo stesso modo si ha la *superficie a m dimensioni.*

Le linee dei punti corrispondenti si chiamano *linee direttrici,* le linee o le superficie del sistema si chiamano *linee o superficie generatrici.*

Def. II. Un sistema ad una dimensione di linee che soddisfa alla def. I si chiama *sistema continuo* ad una dimensione rispetto alle linee, o a due dimensioni rispetto al punto.

Dato un sistema di sistemi a $m-r$ dimensioni tale che ad ogni punto di un sistema corrisponda un punto nel suo consecutivo, e così via; e i punti corrispondenti appartengano ad un sistema continuo a r dimensioni; il sistema si chiama *continuo a r dimensioni* rispetto ai sistemi dati che è a *m dimensioni* rispetto al punto come elemento.

Chiameremo anche la linea sistema continuo ad una dimensione di punti (def. I, 36).

Oss. I. I punti corrispondenti di due linee o superficie consecutive nelle costruzioni secondo le def. I e II possono avere una distanza quanto piccola si vuole (def. I, 36).

Oss. II. Quando diremo superficie o sistema continuo a m dimensioni, intenderemo che tale sia rispetto al punto come elemento.

Oss. III. Vedremo fra poco che le superficie coniche e sferiche che abbiamo incontrate in S_3 e S_4 soddisfano pure alla def. I.

Teor. I. Per due punti consecutivi X_0, Y_0 di un sistema generatore G_{m-r} secondo la def. II *passano due sistemi direttori consecutivi.*

Siano $L_r^{(x)} L_r^{(y)}$, i due sistemi direttori; come loro punti corrispondenti si possono considerare quelli che essi secondo la def. II hanno in comune con ciascun sistema generatore G_{m-r}. Sia G'_{m-r} il sistema generatore consecutivo di G_{m-r}, X'_0 e Y'_0 i punti in esso corrispondenti ad X_0 e Y_0, e quindi corrispondenti fra loro in $L_r^{(x)}$, $L_r^{(y)}$. Quando $(X_0X'_0)$ diventa minore di ogni segmento dato, tale diventa per la def. II anche $(Y_0Y'_0)$, e perciò quando (XY) decresce indefinitamente ciò ha pure luogo per $(Y_0X'_0)$ e per $(X'_0Y'_0)$ (coroll. ass. IV); dunque i punti corrispondenti di $L_r^{(x)}, L_r^{(y)}$ sono consecutivi, vale a dire i due sistemi direttori sono consecutivi (oss. I).

Teor. II. Un sistema continuo a r dimensioni di sistemi a $m-r$ dimensioni è un sistema continuo a $m-r$ dimensioni di sistemi a r dimensioni.

Difatti se (G_{m-r}) è il gruppo dei sistemi generatori e (L_r) quello dei sistemi direttori, ogni punto di un sistema L_r è un punto di un sistema G_{m-r}, e inversamente (def. II). Per punti consecutivi di G_{m-r} passano sistemi direttori consecutivi (teor. I), e riguardando come corrispondenti i punti di G_{m-r}, G_{m-r} è un sistema direttore nel nuovo sistema ed L_r un sistema generatore.

Teor. III. Ogni sistema continuo a m dimensioni nello spazio generale, che non è una linea, è una superficie a m dimensioni.

Il sistema a due dimensioni, generato quindi da un sistema ad una dimensione di linee, è una superficie a due dimensioni, poichè in tal caso la def. II coincide colla def. I. Sia ora $r=2$ ed $m=1$, vale a dire sia dato un sistema Σ continuo a due dimensioni di linee. Una qualunque delle superficie direttrici L_2 del sistema è generata da un sistema continuo di linee ad una dimensione. Consideriamo una linea direttrice L_1 di una superficie L_2. Per un punto A_0 di L_1 passa una linea G_1 della superficie L_2; e per esso passa una linea generatrice g_1 del sistema dato.

Per ogni punto X_0 di g_1 passa una superficie direttrice e in quella del

punto X_0 consecutivo ad A_0 si consideri una linea generatrice consecutiva alla linea G_1. Tutte le linee G_1 costituiscono una superficie a due dimensioni G_2 di cui g_1 è una linea direttrice. Tutte queste superficie a due dimensioni ottenute dalle linee g_1 passanti pei punti di L_1 costituiscono un sistema Σ'_1 continuo ad una dimensione colla linea direttrice L_1 (def. I).

Le generatrici di G_2 lo sono anche del sistema Σ, perchè due generatrici consecutive di due superficie L_2, L'_2 hanno i loro punti in generatrici del sistema Σ (def. II e teor. I); dunque ogni punto della superficie $(G_2 L_1)$, ossia Σ'_1, essendo situato in una G_2 almeno, è pure situato almeno in una generatrice g_1 del sistema Σ. Inversamente, se Y_0 è un punto di Σ; per esso passa una generatrice g_1, la quale deve avere un punto Y'_0 sulla L_2 (def. II), che a sua volta è in una generatrice G_1 di L_2. La retta G_1 ha un punto Y''_0 in L_1 pel quale passa una generatrice g''_1 di Σ. La superficie G''_2 determinata da g''_1 e G_1 contiene la g_1, perchè la superficie consecutiva L'_2 di L_2 passa pei punti consecutivi corrispondenti e la generatrice G'_1 di L'_2, consecutiva di G_1 in L_2, è data dai punti consecutivi a quelli di G_1 sulle generatrici g_1 che incontrano G_1 in L_2 (teor. I). Dunque la G''_2 contiene anche il punto Y_0, e perciò i due sistemi Σ e Σ' coincidono.

Il teorema è dunque in questo caso dimostrato (def. I).

Il teorema sia vero per $m-1$; e si ponga $m-1=r+m-r-1$. Si ottiene ogni gruppo di due numeri la cui somma è il numero m, quando si aggiunge un'unità a r o a $m-r-1$ nei gruppi corrispondenti a $m-1$.

Sia ora dato un sistema ad r dimensioni di sistemi a $m-r$ dimensioni, i quali per ipotesi sono superficie a $m-r$ dimensioni. Data quindi una superficie direttrice L_r del sistema, un punto A_0 su di essa e la superficie G_{m-r} generatrice che passa per A_0, si scelga in G_{m-r} una linea direttrice L_1 e una superficie generatrice G_{m-r-1} passanti ambedue pel punto A_0. Costruite come nel caso precedente per G_{m-r} le superficie consecutive G_{m-r-1} pei punti consecutivi di L_r, esse costituiscono con L_r un sistema a $m-1$ dimensioni, che per ipotesi è una superficie dello stesso numero di dimensioni. Considerando quindi le superficie L_r passanti pei punti di L_1, si ottiene precisamente una superficie F_m che per ragioni analoghe alle precedenti appartiene al sistema dato e lo contiene. Ma il teor. vale per $m=2, 3$, dunque vale in generale (int. *l*, 39).

Teor. II. Una superficie F a m dimensioni può essere generata nello spazio generale da un sistema continuo ad r dimensioni di superficie ad $m-r$ dimensioni o di linee.

Dimostriamolo anzitutto per $r=2$. Consideriamo una linea L_1 di punti corrispondenti della superficie F_m e in una superficie generatrice G_{m-1} a $m-1$ dimensioni una linea direttrice G_1 e una generatrice G_{m-2} che passino pel punto P_0 che la superficie G_{m-1} ha nella linea L_1. Si consideri inoltre nella superficie successiva alla data la linea direttrice in modo da essere consecutiva alla linea G_1, tale che i punti consecutivi di esse siano situati in linee direttrici della F_m (teor. I). Si ottiene così un sistema continuo ad una dimensione di linee che ha per direttrice la linea L_1, cioè una superficie a due dimensioni le cui direttrici sono direttrici della F_m. Per ogni linea L_1 che incontra la G_{m-2} si ha un tal sistema, e quindi si può costruire un sistema a due dimensioni di superficie

G_{m-2} situato sulla superficie data, che la copra interamente, e in modo che i punti corrispondenti siano situati in una superficie a due dimensioni. Le superficie G_{m-2} generatrici del sistema sono le generatrici delle superficie G_{m-1}.

Supponiamo ora che il teorema sia vero per la superficie F_{m-1} e per $r-1$ e sia data una superficie F_m a m dimensioni determinata nel modo stabilito dalla def. I. Scelta una linea di punti corrispondenti L_1 delle superficie generatrici F_{m-1}, le quali per ipotesi possono essere generate da un sistema continuo a $r-1$ dimensioni di superficie a $m-r$ dimensioni, consideriamo una superficie direttrice G_{r-1} di F_{m-1}, passante pel suo punto d'incontro con L_1, e così facciamo per le superficie consecutive F_{m-1}. Tutte le superficie direttrici G_{r-1} consecutive nelle superficie F_{m-1} a $r-1$ dimensioni lungo la linea L_1 determinano una superficie a r dimensioni. Otteniamo così un sistema continuo a r dimensioni di sistemi F_{m-r}, che copre l'intera superficie F_m, e i cui punti corrispondenti sono in una superficie a r dimensioni. Il teorema è vero per $r=2$, dunque è vero in generale.

176. *Def. I.* Se $m+1$ punti (X_0) indipendenti di uno spazio X_{m-1} hanno per limiti altri m punti indipendenti (A_0) (def. II, 10), lo spazio A_{m-1} determinato dai punti (A_0) dicesi *spazio limite* dello spazio X_{m-1}.

Teor. I. Se la distanza di un punto dai punti di una serie (X_n) in uno spazio S_m diminuisce indefinitamente, il punto appartiene allo spazio.

Dato uno spazio S_m qualsiasi, se un punto non è nello spazio S_m, esso ha una distanza normale da S_m differente da zero, la quale è minore di ogni altra distanza obliqua (oss. I, 169); la sua distanza dunque dai punti di una serie (X_n) di S_m non può diventare indefinitamente piccola, vale a dire non può essere limite di (X_n) senza cadere in S_m.

Oss. I. Il teorema fu dimostrato diversamente per la retta (teor. V, 10), e poteva essere dimostrato in questo modo riferendosi però ai teor. I e IV del n. 79.

Teor. II. Se uno spazio A_{m-1} è limite di uno spazio X_{m-1}, ogni punto di X_{m-1} può essere punto limite di uno ed un solo punto di X_{m-1}.

Il teorema fu dimostrato per $m=2$ (teor. IV. 12). Supponiamo sia vero per uno spazio X_{m-2}, e siano $A_0^{(1)} \dots A_0^{(m)}$ gli m punti indipendenti (A_0), che determinano lo spazio $m-1$, e sono limiti degli m punti indipendenti (X_0). Ogni punto delle facce a $m-2$ dimensioni della piramide (X_0) per l'ipotesi fatta può aver un punto limite sulla faccia corrispondente della piramide (A_0). Ora lo spazio X_{m-1} è determinato dalle rette che congiungono ad es. $X_0^{(m)}$ coi punti della faccia opposta della piramide (X_0). Ciascuno dei punti di queste rette può avere un solo punto limite sulle rette corrispondenti della piramide (A_0); dunque il teorema valendo per $m=2$ vale in generale (int. *l*, 39).

Teor. IV. Se m punti (A_0) indipendenti sono limiti di altrettanti punti (X_0), i punti (X_0) in intorni sufficientemente piccoli dei punti (A_0) determinano uno spazio X_{m-1}.

Il teorema è vero per $m=2$ (teor. I, 12). Supponiamo sia vero per $m-1$, e siano $A_0^{(1)} \dots A_0^{(m)}$ i punti indipendenti limiti dei punti $X_0^{(1)} \dots X_0^{(m)}$. In intorni sufficientemente piccoli dei punti (A_0) i punti (X_0) determinano a $m-1$ a $m-1$ m spazî a $m-2$ dimensioni X_{m-2}. Se gli m punti (X_0) non fossero

indipendenti sarebbero situati in uno spazio X_{m-2}, e tutti gli spazî X_{m-2} suddetti coinciderebbero. Lo spazio $X_0^{(1)}...X_0^{(m)}$ avrebbe per l'ipotesi fatta per spazî limiti gli spazî a $m-2$ dimensioni determinati dagli m punti (A_0) (def. I) che per dato sono distinti; e $X_0^{(m)}$ potrebbe avere quindi un punto limite $A'^{(m)}_0$ situato ad es. nello spazio $A_0^{(1)}...A_0^{(m-1)}$ e distinto da $A_0^{(m)}$, il che è assurdo (teor. IV, 10).

Dunque valendo il teorema per $m = 2$ vale in generale (int. l, 39).

Teor. III. Un sistema di spazî S_m determinati da $m-2$ punti dati $A_0^{(1)}...A_0^{(m-2)}$ e da ogni punto X_0 situato in un sistema continuo a n dimensioni F_n dello spazio generale è un sistema continuo a $m+n$ dimensioni.

Supponiamo che il sistema F_n sia una linea F_1. Ogni punto X_0 che è in F_1 punto limite di un punto Y_0, determina uno spazio $S_m^{(X)}$ che è limite dello dello spazio $S_m^{(Y)}$ determinato da Y_0 (def. I), e ogni punto di $S_m^{(Y)}$ può avere per limite uno ed un solo punto di $S_m^{(X)}$ (teor. I e teor, IV, 10). Ora se noi consideriamo la serie di spazî S_m che si ottengono dai punti X_0 di F_1, noi possiamo stabilire in questo modo una corrispondenza fra i punti degli spazî S_m così che ad ogni punto di uno spazio corrisponda un punto del suo spazio consecutivo, riguardato questo spazio come spazio limite del primo. Avremo in questa guisa un sistema F'_1 di punti ad una dimensione tale che ogni punto di esso è limite nel sistema e nello spazio. Di più, ad un segmento (X_0Y_0) di F_1 corrisponde un segmento $(X'_0Y'_0)$ di F'_1. Il segmento (X_0Y_0) si compone di segmenti consecutivi quanto piccoli si vuole (def. I, 36), e a questi corrispondono in $(X'_0Y'_0)$ delle parti quanto piccole si vuole, chè altrimenti se la distanza di due punti Z'_0, W'_0 di esso potesse rimanere maggiore di una distanza ε, uno dei due spazî S_m passanti per essi non potrebbe essere limite dell'altro spazio nel verso $(Z'_0W'_0)$ o $(W'_0Z'_0)$, essendo distinti per costruzione i due spazî S_m passanti per Z'_0, W'_0; mentre diventando indefinitamente piccola la distanza dei punti corrispondenti Z_0, W_0 in F_1, Z'_0 ha per limite W'_0, cioè $(Z'_0W'_0)$ deve decrescere indefinitamente. Il sistema F'_1 soddisfacendo alla def. I, 36 è una linea, ed in tal caso il teor. è dimostrato.

Supposto vero il teorema per $n-1$, siccome F_n è una superficie (teor. I, 175), si supponga F_n generata da un sistema di superficie generatrici G_{n-1} e da una linea direttrice L_1. Il sistema S_mG_{n-1} è per ipotesi continuo, ed applicando la dimostrazione precedente il teorema vale pure per n; ma è vero per $n = 1$ dunque vale in generale (int. l, 39).

Coroll. Il piano, lo spazio a tre ecc. a n dimensioni sono sistemi continui.

Teor. IV. Se in ogni superficie G_m di un sistema continuo (G_mL_n) si considera un punto e in modo che i punti in superficie consecutive siano consecutivi, tutti questi punti determinano una superficie a n dimensioni.

Che determinino un sistema ad n dimensioni è chiaro, perchè tale è il sistema di superficie G_m nel sistema dato. Se $n = 1$ il processo della dimostrazione è il medesimo della precedente per dimostrare che i punti corrispondenti formano una linea F'_1. Ammesso il teorema per $n-1$ e generando la superficie F_n mediante superficie G_{n-1} e una linea L_1, i punti determinano un sistema continuo ad una dimensione di superficie a $n-1$ dimensioni, vale a dire una superficie d'ordine n.

Coroll. I coni circolari e le superficie sferiche fin qui considerati sonò sistemi continui.

Oss. I. Poichè il piano, lo spazio a tre ecc. a n dimensioni, che nello spazio generale sono superficie speciali essi si chiamano anche *superficie lineari* o *sistemi continui lineari.*

Ogni superficie, od ogni sistema continuo, non si può chiamare *spazio* se le proprietà fondamentali degli spazî devono essere date dagli assiomi geometrici, i quali non sono definizioni puramente formali, ma sono dedotti dall'esperienza. Volendo adoperare una sola parola per tutti gli enti geometrici, può servire la parola figura o sistema. Ma se si vuole usare la parola spazio come è ormai invalso, ed anche perchè ciò puó essere utile in ricerche speciali, come ad es. noi abbiamo chiamato spazî il punto, la retta e il piano, bisogna avvertire che allora si perde con essa il concetto primitivo di spazio dato dagli assiomi e dalla def, II del n. 2, nonchè dalle ipotesi astratte non contraddicenti agli assiomi suddetti nè fra loro. Anche tutte queste denominazioni possono essere usate, perchè secondo le questioni speciali che si trattano può riuscire più conveniente una denominazione piuttosto che l'altra. *Per spazio generale intendiamo però sempre il sistema di punti che soddisfa alla def. II del n. 2.*

177. *Oss. I.* Per la dimostrazione del teor. 1 di questo numero ci appoggiamo ad un teorema di *Weierstrass*, cioè che un gruppo infinito di punti nel camqo finito di S_n ha sempre un punto limite L; e quindi pel teorema I, 10, nel gruppo vi è almeno una serie illimitata di 1ª specie (X_n) che ha il punto limite L. Questo teorema si può dimostrare nello spazio S_n collo stesso metodo adoperato da *De Paolis* nello spazio S_3 [1]).

Per la linea secondo la def. I, 36 valgono i teor. IV e V del n. 13, e mediante il teor. suddetto si dimostrano allo stesso modo i teor. III, VI e VII, 13 nello spazio S_n.

Lasciamo qui indiscussa la questione (perchè non ne abbiamo bisogno) se possa essere dimostrato il teorema di *Weierstrass* coi nostri assiomi I, V insieme coll' assioma della nota XVI, oppure colle ipotesi V e VI e VII, per un gruppo infinito di punti nel campo finito dello spazio generale intorno ad un punto, perchè la serie (X_n) di punti in questo caso può non essere contenuta in alcun spazio S_m, essendo m un numero intero dato qualsiasi della serie naturale.

Teor. I. Ogni linea in S_n avente due punti estremi di un segmento della linea, opposti rispetto ad uno spazio S_{n-1}, incontra questo spazio almeno in un punto.

Siano L_1 la linea, S_{n-1} lo spazio dati e $A_0 B_0$ i punti situati da parti opposte di S_{n-1}.

Congiungendo uno spazio S_{n-2} di S_{n-1} coi punti del segmento (A_0B_0), si ottiene un sistema continuo di spazî in S_{n-1}. Dobbiamo supporre che S_{n-2} non abbia alcun punto comune col segmento (A_0B_0), chè altrimenti il teorema non avrebbe bisogno di dimostrazione. Ciascun punto X_0 di (A_0B_0) situato ad es. dalla parte di A_0 rispetto a S_{n-1}, determina con S_{n-2} un semispazio $(S_{n-2}X_0)$. Fra il semispazio $(S_{n-2}X_0)$ e lo spazio S_{n-1} esistono, qualunque sia X_0, altri semispazî $(S_{n-2}X'_0)$, perchè scelto un punto X'_0 vicino quanto si vuole a X_0, il semispazio $(S_{n-2}X_0)$ non può essere situato dalla parte opposta di S_{n-1}. Difatti dovrebbe anche essere da questa parte X'_0, e il segmento $(X_0X'_0)$ incontrando S_{n-1} in un punto S_0 interno e dato, (oss. 167), X'_0 non potrebbe accostarsi indefinitamente a X_0.

---

1) *Teoria dei gruppi geometrici*, l. c. pag. 23. Questa dimostrazione si appoggia al postulato delle parallele nel senso di Euclide.

La serie di punti X_0 della linea L_1 data dai semispazî $(S_{n-2}X_0)$ che incontrano in un punto almeno il segmento (A_0B_0) e sono situati dalla stessa parte di A_0 rispetto a S_{n-1}, ha quindi in (A_0B_0) un punto limite X_0 (teor. III, 13 e oss. I); dunque la serie $(S_{n-2}X_0)$ ha uno spazio limite che è precisamente S_{n-1}, e perciò Y_0 è situato in S_{n-1}.

Teor. II. Se una linea L_1 ha un punto A_0 da una parte di uno spazio S_{n-1}, vi sono dei segmenti di L_1 da una parte e dall'altra di A_0 (e da una sola parte se A_0 è estremo di L_1) tali che i loro punti sono situati dalla stessa parte del punto A_0 rispetto ad S_{n-1}.

Difatti supponiamo che A'_0 sia un punto di un segmento $(A_0A'_0)$ di L_1 situato da parte opposta di A_0 rispetto ad S_{n-1} (def. I, 36). Questo segmento incontra S_{n-1} in un punto interno Y_0 (teor. I). Se in (A_0Y_0) vi fosse un altro punto $A_0^{(2)}$ situato da parte opposta di S_{n-1}, avremmo in $(A_0A_0^{(2)})$, e quindi anche in (A_0Y_0) un punto Y'_0 appartenente allo spazio S_{n-1}; dunque se così fosse in ogni segmento quanto piccolo si vuole di $(A_0A'_0)$ in L_1, il punto A_0 sarebbe limite della serie (Y_0), vale a dire A_0 apparterrebbe allo spazio S_{n-1}, contro il dato (teor. I, 176).

Teor. III. Ogni superficie a p dimensioni in S_m avente due punti, estremi di un segmento di linea della superficie, opposti rispetto ad uno spazio S_{n-1}, incontra questo spazio in una linea o in una superficie a $p-1$ dimensioni.

Sia dapprima $p=2$. Pei punti A_0 e B_0 passano due linee direttrici $L_1^{(a)}$ e $L_1^{(b)}$ della superficie F_2 (def. I, 175). Ad un punto X_0 che ha per limite A_0 in $L_1^{(a)}$ corrisponde un punto X'_0 che ha per limite B_0 in $L_1^{(b)}$ e così nelle altre linee direttrici passanti pei punti del segmento $(A_0B'_0)$ (def. I, teor. I, 175). Esistono dunque dei segmenti $(A_0A'_0)$, $(B_0B'_0)$ corrispondenti che non contengono punti da parti opposte di A_0 e B_0 rispetto a S_{n-1} (teor. II). Le generatrici che uniscono i punti dei segmenti $(A_0A'_0)$, $(B_0B'_0)$ incontrano dunque S_{n-1} in una serie di punti. A due di queste generatrici consecutive g_1 e g'_1 corrispondono punti consecutivi d' intersezione con S_{n-1}. Siano G_0 e G'_0, due punti d'intèrsezione di g_1 e g'_1 con S_{n-1}. Se G''_0 è il punto corrispondente di G_0 in g'_1, la distanza $(G_0G''_0)$ diventa più piccola di ogni segmento dato. Se G'_0 ha per corrispondente un punto G'''_0 in g_1 consecutivo di G_0, anche $(G_0G'_0)$ diventa indefinitamente piccola (coroll. ass. IV). Se G'''_0 non è consecutivo di G_0 in g_1, essendo G'''_0 limite di G'_0, e poichè G'_0 è sempre in S_{n-1}, G'''_0 appartiene ad S_{n-1} (teor. I) e quindi nella serie di punti (G_0) in S_{n-1} vi è un punto G'''_0 tale che $(G'_0G'''_0)$ diventa più piccolo di ogni segmento dato. La 2ª parte della def. I, 36 è pure soddisfatta, considerando ad es. le generatrici date dai segmenti $(A_0A'_0)$, e $(B_0B'_0)$ in $L_1^{(a)}$ $L_1^{(b)}$, dunque la serie di punti G_0 in S_{n-2} è una linea.

Supposto vero il teorema per $n-1$ lo si dimostra per n, ma vale per $n=2$ dunque vale in generale [1]).

Oss. Abbiamo escluso tacitamente da questa dimostrazione quei punti eventuali di una linea che non sono punti limiti di gruppi di punti della linea.

---

1) Dalla dimostrazione di questi teoremi che riguardano una linea che ha due punti opposti rispetto ad una retta nel piano, e una linea od una superficie che hanno due punti da parti opposte rispetto ad un piano in S_3, si vede che queste proprietà non sono così facilmente dimostrabili, come si ritiene in alcuni trattati elementari, addirittura in generale (Vedi nota 2, 51 e nota LXXII).

Def. I. Un sistema continuo (linea o superficie) a p dimensioni in S_n che viene incontrato da uno spazio S_{n-p} di S_n al più in un gruppo non continuo di punti o che non contiene gruppi continui di punti secondo la def. I, 36 chiamasi *irreducibile.*

Oss. II. Noi ci occuperemo soltanto di questi sistemi.

Teor. IV. Un sistema continuo a p dimensioni in uno spazio S_n non può essere incontrato da uno spazio S_r $(r > n - p)$ in un sistema continuo a più di $p + r - n$ dimensioni.

Supponiamo $r = n - p + 1$ e che uno spazio S_r incontri il sistema dato in un sistema a due dimensioni F_2. Prendendo due punti A_0 e B_0 di un segmento di linea sulla F_2 (def. I, 36 e def. I, 175) e facendo passare per un punto interno al suddetto segmento uno spazio S_{r-1}, esso taglia la F_2 in una linea (teor. III), contro la def. I.

Dunque per $r = n - p + 1$ il teor. è dimostrato.

Supposto che sia vero il teorema per $r = n - p + m - 1 < n - 1$ lo si dimostra nella stessa guisa per $r = n - p + m$, e perciò il teorema è dimostrato (int. *l*, 39).

178. *Def. I.* Una linea in S_n, che viene incontrata da ogni spazio S_{n-1} di S_n al più in m punti, si chiama linea *d'ordine m.*

Una superficie a p dimensioni, che viene incontrata da uno spazio S_{n-p} al più in m punti, si chiama *d'ordine m.*

Una tale superficie la indicheremo col simbolo $F^m{}_p$.

Teor. I. Una sistema continuo $F^m{}_p$ in S_n viene incontrato da ogni spazio S_r $(r > n - p)$ al più in un sistema continuo a $p + r - n$ dimensioni e dell'ordine m.

Difatti al più lo spazio S_r incontra un tal sistema in un sistema continuo a $p + r - n$ dimensioni (teor. II, 177).

Essendo $r > n - p$, uno spazio S_{n-p} di S_r interseca il luogo che la superficie $F^m{}_p$ ha in S_r in m punti (def. I), dunque è dell'ordine m.

Teor. II. Una linea dell'ordine m non può essere contenuta in uno spazio S_{m+1} senza giacere in uno spazio inferiore.

E una superficie $F^m{}_p$ non può essere contenuta in uno spazio a $p + m$ dimensioni senza essere contenuta in uno spazio inferiore.

Supponiamo che una linea $L_1{}^m$ sia contenuta in uno spazio a $m + 1$ dimensioni. Essa viene incontrata da ogni spazio S_m in m punti. Ma se esiste un punto di L_1 fuori di S_m, pei primi m punti e per il nuovo punto di $L_1{}^m$ passa uno spazio S'_m che contiene tutta la linea $L_1{}^m$ (def. II).

Se una superficie $F^m{}_p$ è contenuta nello spazio S_{p+m} ogni spazio S_m la incontra in m punti (def. I). Scelto un altro punto di $F^m{}_p$, per questo e per i primi m punti passa un altro spazio S'_m che incontra la superficie in $m + 1$ punti, e quindi la superficie deve essere contenuta almeno in uno spazio S_{p+m-1} (def. I).

Coroll. Ogni superficie di 2° ordine $F^2{}_p$ é contenuta in un solo spazio senza essere contenuta in spazi inferiori.

§ 16.

Superficie coniche in uno spazio a n dimensioni che hanno per vertice un punto.

179. *Def. I.* Sia dato uno spazio S_{n-1}, e un punto V_0 fuori di esso e nello spazio S_{n-1} un sistema continuo (linea o superficie) $F^m{}_p$ a p dimensioni di ordine m.

La figura costituita da tutte le rette che uniscono il punto V_0 coi punti del sistema $F^m{}_p$ si chiama *superficie conica o cono di* 1ª *specie* che indicheremo col simbolo $V_0 - F^m{}_p$. V_0 è il *vertice* e $F^m{}_p$ è il *sistema direttore* del cono. Le rette che congiungono il vertice coi punti del sistema direttore sono le *generatrici* del cono.

Teor. I. La superficie conica $V_0 - F^m{}_p$ a $p+1$ dimensioni e di ordine m è tagliata da uno spazio S_s passante pel vertice V_0 al più in un cono $V_0 - F^m{}_{s+p-n}$ a $s+p-n+1$ dimensioni e di ordine m, che può ridursi ad un sistema di m rette.

Ogni spazio S_{n-p} passante pel vertice taglia lo spazio S_{n-1} in uno spazio S_{n-p-1} (def. I e teor. II, 158) che ha al più con la $F^m{}_p$ m punti comuni (def. I, 177), i quali congiunti col vertice danno m generatrici del cono situate nello spazio S_{n-p}. Ogni spazio S_s di S_{n-1} taglia la $F^m{}_p$ al più in una superficie F_{s+p-n} a $s+p-n$ dimensioni (teor. II, 177). Congiungendo il vertice V_0 del cono $V_0 - F_p{}^m$ con lo spazio S_{s-1} si ha uno spazio S_s che lo taglia in un cono $V_0 - F_{s+p-n}$ a $s-p-n+1$ dimensioni e di ordine m.

Se $s=n-1$ il cono d'intersezione è a p dimensioni; se $p=n-2$ un piano passante pel vertice interseca il cono $V_0 - F_{p-1}{}^m$ al più in m rette.

Teor. II. Uno spazio qualunque S_{n-1} che non passa pel vertice taglia il cono $V_0 - F_p{}^m$ in un sistema $F'_p{}^m$ d'ordine m.

Difatti lo spazio S_{n-1} incontra tutte le generatrici del cono in un punto, e quindi lo taglia in un sistema a p dimensioni; e ogni spazio S_{n-p} che passa pel vertice e lo taglia in m generatrici, taglia lo spazio S_{n-1} in uno spazio S_{n-p-1} che ha colla superficie al più m punti comuni.

Teor. III. Uno spazio qualunque S_s taglia il cono $V_0 - F_p{}^m$ al più in una superficie a $s+p-n+1$ dimensioni e di ordine m.

Congiunto lo spazio S_s col vertice V_0 si ha uno spazio S_{s+1} che incontra il cono $V_0 - F_p{}^m$ al più in un cono $V_0 - F^m{}_{s+p-n+1}$ (teor. I) che viene intersecato dallo spazio S_s in una superficie $F_{s+p-n+1}$ d'ordine m (teor. II).

Teor. IV. Il cono $V_0 - F_p{}^m$ può essere contenuto in uno spazio a $p+1$, $p+2$ ecc. $p+m$ dimensioni senza essere contenuto in uno spazio inferiore di dimensioni (teor. II, 178).

180. *Oss. I.* Se la superficie $F^m{}_p$ dello spazio S_{n-1} è una superficie di 2° ordine o una sfera $S^2{}_{n-1}$, il cono è di 2° ordine.

In tal caso si ha che ogni piano passante pel vertice non può incontrarlo in più di due generatrici, ogni spazio a tre, a quattro ecc a $n-1$ dimensioni passanti pel vertice lo tagliano al più in coni di 2° ordine rispettivamente di due. tre. ecc. $n-2$ dimensioni. Ogni retta lo taglia al più in due punti, un piano al più in curve del 2°

ordine, ecc., uno spazio a $n-1$ dimensioni al più in una superficie di 2ª ordine rispettivamente a due, tre ecc. $n-2$ dimensioni.

Def. I. Congiungendo una tangente, un piano con uno spazio a $n-2$ dimensioni tangente in un punto della superficie S^2_{n-1} col punto V_0, si ottiene un piano, uno spazio a tre ecc. a $n-1$ dimensioni *tangente* al cono $V_0 - S^2_{n-1}$ lungo una sua generatrice.

Come in un punto di S^2_{n-2} si hanno infinite tangenti che sono tutte situate nello spazio tangente a $n-2$ dimensioni in quel punto, così tutti i piani tangenti lungo una generatrice del cono $V_0 - S^2_{n-2}$ giacciono nello spazio a $m-1$ dimensioni tangente lungo quella generatrice.

Def. II. Se la sfera S^2_{n-2} è all'infinito il cono si chiama *circolare*. La retta che unisce il vertice col centro della sfera si chiama *asse* del cono.

Teor. I. Le generatrici del cono circolare formano lo stesso angolo con l'asse.

Perchè due distanze uguali all' infinito danno angoli uguali nel campo finito.

Teor. II. n raggi uscenti da un punto V_0 determinano un cono circolare a $n-1$ dimensioni.

Perchè la sfera $S^2_{n-2\infty}$ è determinata da n punti.

Teor. III. Ogni spazio a $n-1$ dimensioni passante pel vertice taglia al più il cono $V_0 - S^2_{n-2\infty}$ in un cono circolare a $n-2$ dimensioni col medesimo asse.

Teor. IV. Ogni spazio a $n-1$ dimensioni normale all'asse taglia il cono circolare in una sfera a $n-2$ dimensioni col centro sull'asse.

Dim. analoga a quella del teor. VIII, 99.

Coroll. Un piano o uno spazio normale all'asse incontra il cono circolare in una circonferenza o in una sfera.

Teor. V. Se la superficie direttrice di una superficie conica $V_0 - S^2_{n-1}$ è sferica, ogni spazio parallelo a quello della superficie direttrice taglia il cono in una superficie sferica.

Sia infatti S'_{n-1} lo spazio parallelo a quello della direttrice. Conduciamo la retta che unisce V_0 col centro C_0 della sfera direttrice S^2_{n-2} fino all'incontro in C'_0 con S'_{n-1}. Così facciamo per due punti A_0, B_0 di S_{n-2} e otterremo due punti corrispondenti C'_0, B'_0 in S'_{n-1}. Si ha facilmente che $(C'_0 A'_0) = (C'_0 B'_0)$.

Def. III. Se il vertice V_0 del cono $V_0 - F_p{}^m$ cade all'infinito la superficie conica si chiama *superficie cilindrica*. Nel caso poi che $F_p{}^m$ sia una sfera in uno spazio S_{n-1} perpendicolare alla direzione del vertice, il cilindro si chiama *circolare*.

§ 17.

Coni e Cilindri aventi per vertice uno spazio S_m.

181. *Def I.* Consideriamo uno spazio S_{n-m-1} duale a uno spazio S_m e che non lo incontra.

In S_{n-m-1} sia data una superficie $F^r{}_p$, ove è $p < n - m - 1$.

Gli spazî a $m + 1$ dimensioni che congiungono lo spazio S_m coi punti della superficie $F^r{}_p$ costituiscono una *superficie conica* o *cono di r^{mo}* ordine, che è a $p + m + 1$ dimensioni; S_m lo *spazio vertice*, $F^r{}_p$ la *superficie direttrice* del cono. Gli spazî che congiungono lo spazio S_m del cono coi punti della direttrice si chiamano *spazî generatori del cono.*

Teor. I. Uno spazio S_{m+s} passante per lo spazio vertice S_m taglia il cono $S_m - F^r{}_p$ al più in un cono a $s + p - n + 2m + 1$ dimensioni di vertice S_m e d'ordine m.

Difatti uno spazio S_{n-m-2} di S_{n-m-1} taglia al più la $F^m{}_p$ in una superficie $F^r{}_{p-1}$; perciò congiunto lo spazio S_{n-m-2} con S_m si ha un spazio S_{n-1} che incontra al più il cono $S_m - F^m{}_p$ in un cono $S_m - F^r{}_{p-1}$. Se si considera uno spazio S_{s-1} di S_{n-m-1}, esso taglia la $F^m{}_p$ al più in una superficie d'ordine r e di $s + p - n + m$ dimensioni, e quindi uno spazio S_{s+m} passante per lo spazio S_m taglia il cono $S_m - F^r{}_p$ al più secondo un cono $S_m - F^r{}_{s+p-n+m}$ a $s + p - n + 2m + 1$ dimensioni.

Coroll. Gli spazî S_{n-1}, S_{n-2}, ..., S_{n-m} passanti per lo spazio vertice incontrano rispettivamente il cono $S_m - F_p{}^m$ in una superficie a $p + m, p + m - 1, ...$ $p + 1$ dimensioni di ordine m.

182. *Def. I.* Se la superficie $F^r{}_p$ nello spazio S_{m-n-1} è una sfera $S^2{}_{n-m-2}$, il il cono $S_m - S^2{}_{n-m-2}$ è di 2^0 ordine a $n - 1$ dimensioni.

Ogni tangente, ogni piano ed ogni spazio tangente in un punto alla $S^2{}_{n-m-2}$ congiunti con lo spazio S_m danno degli spazî a $m + 2$, $m + 3$ ecc. che diremo *tangenti* al cono lungo uno spazio generatore.

Teor. I. Un cono $S_m - S^2{}_{n-m-2}$ viene tagliato in una sfera da ogni spazio S'_{n-m-1} parallelo di 1^a specie allo spazio della direttrice.

Lo spazio S'_{n-m-1} e quello S_{n-m-1} della direttrice essendo paralleli di 1^a specie sono situati in uno spazio S_{n-m}, il quale taglia S_m in un punto V_0 e la superficie $S_m - S^2{}_{n-m-2}$ in un cono $V_0 - S^2{}_{n-m-2}$, dunque ecc. (teor. V, 180).

Def. II. Se lo spazio S_{n-m-1} è all'infinito ed è polare allo spazio $S_{m-1\,\infty}$ di S_m, il cono si chiama *circolare*. Lo spazio S_{n+1} che congiunge lo spazio S_m col centro della sfera è lo *spazio asse* del cono.

Teor. II. Gli spazî generatori del cono $S_m - S^2{}_{n-m-2\,\infty}$ fanno lo stesso angolo con lo spazio asse.

Difatti la distanza di due punti di $S_{n-m-1\,\infty}$ misura l'angolo dei due spazî S_{m+1} passanti per S_m, perchè congiungendo i due punti con un punto di S_m si ottiene un piano normale a S_m stesso (oss. II, 169).

Teor. III. Uno spazio S_{n-m} normale allo spazio vertice S_m taglia il cono

$V_0 - S^2{}_{n-m-2_\infty}$ *in un cono circolare a* $n - m - 1$ *dimensioni col vertice nel punto d' intersezione dei due due spazî* S_{n-m}, S_m.

Difatti lo spazio S_{n-m} incontra S_m in un punto V_0 e gli spazî generatori in rette passanti per V_0. La rette di S_{n-m} sono normali allo spazio S_m, perchè i loro spazî all' infinito sono polari, e quindi due di esse misurano l'angolo formato dai due spazî generatori, di cui sono le intersezioni (oss. II, 169).

Le rette suddette hanno i punti all'infinito sulla sfera d'intersezione dello spazio all' infinito di S_{n-m} colla sfera $S^2{}_{n-m-2_\infty}$.

Teor. IV. Uno spazio S_{n-m-1} *normale allo spazio asse e che lo incontra in un solo punto* A_0 *taglia il cono* $S_m - S^2{}_{n-m-2_\infty}$ *in una sfera.*

Difatti per lo spazio S_{n-m-1} conduciamo uno spazio normale S_{n-m} allo spazio S_m. Lo spazio S_{n-m-1_∞} polare dello spazio S_{m-1_∞} di S_m passa per lo spazio S_{n-m-2_∞} all'infinito di S_{n-m-1}, mentre S_{n-m-2_∞} è polare di S_{m_∞} dello spazio asse. Lo spazio S_{n-m} condotto per S_{n-m-1} ha per spazio all'infinito lo spazio S_{n-m-1_∞} polare di S_{m-1_∞}. Lo spazio S_{n-m} incontra il cono in un cono circolare a $n - m - 1$ dimensioni di vertice V_0 e di asse V_0A_0 (teor. III), il quale viene tagliato nello spazio S_{n-m} da S_{n-m-1}, che è normale all'asse V_0A_0, in una sfera a $n - m - 2$ dimensioni (teor. IV, 180).

Def. III. Questa sezione si chiama *sezione normale* del cono $S_m - S^2{}_{n-m-2_\infty}$.

Teor. V. Gli spazî che congiungono uno spazio S_m *coi punti di una sfera a* $n - m - 2$ *dimensioni di uno spazio* S_{n-m-1}, *che non incontra* S_m *ed è perpendicolare allo spazio che congiunge* S_m *col centro della sfera, costituiscono un cono circolare di vertice* S_m.

Lo spazio S_{m_∞} dello spazio asse è polare dello spazio S_{n-m-2_∞} di S_{n-m-1}. Lo spazio S_{m-1_∞} di S_m essendo contenuto in S_{m_∞} ha il suo spazio polare S_{n-m-1_∞} che passa per S_{n-m-2_∞}; dunque per S_{n-m-1} possiamo condurre uno spazio normale S_{n-m} a S_m, che lo incontra in un punto A_0, pel quale passa la normale condotta dal centro della sfera $S^2{}_{n-m-2}$ allo spazio S_m. Se X_0 è un punto qualunlunque di questa sfera, i raggi (X_0A_0), (C_0A_0) misurano l'angolo dei due spazi (S_mX_0), (S_mC_0), che è costante qualunque sia X_0, per l'uguaglianza dei triangoli $A_0C_0X_0$ rettangoli in C_0 e aventi i cateti uguali. La superficie così generata ha dunque nello spazio polare S_{n-m-1_∞} di S_{m-1_∞} una sfera $S^2{}_{n-m-2_\infty}$ col centro nel punto d'intersezione col piano asse; ed il teor. è dimostrato.

Def. IV. Se in quest'ultimo caso lo spazio S_m cade all'infinito la superficie conica o cono si chiama *superficie cilindrica* o *cilindro.*

§ 18.

Altre proprietà della sfera $S^2{}_{n-1}$.

183. *Teor. I. Da un punto della parte esterna della sfera* $S^2{}_{n-1}$ *si possono condurle infinite tangenti che formano una cono circolare a* $n - 1$ *dimensioni col vertice nel punto dato, il cui asse è il diametro passante pel punto dato.*

Dim. analoga a quella del teor. III, VIII, 101.

Coroll. I. I punti di contatto delle tangenti condotte da un punto alla superficie sferica $K^2{}_{n-1}$ *sono situati in una superficie sferica* $S^2{}_{n-1}$ *il cui spazio è normale al diametro passante pel punto dato.*

Dim. analoga al coroll. I del teor. VIII, 101.

Def. I. Questa superficie S^2_{n-1} si chiama la sfera di *contatto* del cono tangente alla superficie S^2_{n-1} col vertice nel punto dato. Una tangente, un piano, o uno spazio tangente alla superficie S^2_{n-1} dà un piano o uno spazio tangente al cono.

Coroll. II. I piani e gli spazî tangenti al cono tangente di un punto ad una superficie sferica S^2_{n-1} sono tangenti ad essa nei punti della superficie sferica S^2_{n-1} di contatto.

Oss. I. Supponiamo che da uno spazio S_{n-3} di S_{n-1} esterno ad una sfera S^2_{n-2} le si possano condurre due spazî tangenti a $n-2$ dimensioni che formino angoli uguali collo spazio diametrale passante per S_{n-3}, essendo vera questa proprietà per $n=3$ (coroll. III, teor. VIII, 101).

Coroll. III. Gli spazî tangenti S_{n-2} che si possono condurre da uno spazio S_{n-3} esterno ad una superficie sferica S^2_{n-1} formano un cono circolare a $n-1$ dimensioni, il cui asse è lo spazio diametrale a $n-2$ dimensioni passante per lo spazio S_{n-3}.

Conduciamo infatti per lo spazio diametrale che congiunge lo spazio S_{n-3} col centro della superficie S^2_{n-1}, uno spazio a $n-1$ dimensioni che la segherà in una sfera a $n-2$ dimensioni, alla quale da S_{n-3} si possono condurre due spazî tangenti che formano il medesimo angolo collo spazio diametrale suddetto (oss. I).

Coroll. IV. I punti di contatto degli spazî S_{n-1} tangenti condotti da uno spazio S_{n-3} alla superficie S^2_{n-1} sono situati in una circonferenza, il cui piano è perpendicolare allo spazio diametrale che passa per S_{n-3}.

Dim. analoga al coroll. I, teor. VIII, 101.

Def. III. Questa circonferenza chiamasi *linea di contatto* del cono.

Coroll. V. Gli spazî tangenti di un cono tangente aventi per vertice uno spazio S_{n-3} sono tali anche per la superficie sferica S^2_{n-2} nei punti della sua circonferenza di contatto.

Difatti una tangente della circonferenza di contatto di un cono tangente di 1ª specie dà uno spazio tangente al cono.

Teor. I. Da uno spazio S_{n-2} di S_n si possono condurre due spazî tangenti a $n-1$ dimensioni ad una sfera S^2_{n-1}.

Al cono circolare tangente che ha per vertice uno spazio S_{n-3} si possono condurre da uno spazio S_{n-2} passante per S_{n-3} due spazî tangenti, perchè da un punto si possono condurre due tangenti alla circonferenza di contatto del cono suddetto (teor. IV, 60), e gli spazî tangenti a $n-1$ dimensioni sono tangenti anche alla sfera. Ma il teorema è vero per $n=3$, dunque è vero in generale.

Oss. II. Essendo vera la proprietà dell'ipotesi dell'oss. I sono veri anche il coroll. III del teor. I che abbiamo dedotto da essa.

Teor. IV. Gli spazî tangenti S_{m+1} che si possono condurre da uno spazio S_m esterno alla sfera S^2_{n-1} formano un cono circolare avente per vertice lo spazio S_m e per asse lo spazio diametrale passante per esso.

Conduciamo per lo spazio diametrale S_{m+1} passante per S_m uno spazio S_{m+2} che taglia la sfera S^2_{n-1} in una sfera S^2_{m+1}, alla quale da S_m si possono

condurre due spazî tangenti S_{m+1} che formano lo stesso angolo collo spazio asse.

Coroll. I punti di contatto degli spazî tangenti a $m+1$ dimensioni condotti da uno spazio S_m alla sfera S^2_{n-1} sono situati in una sfera S^2_{n-m-2}, il cui spazio S_{n-m-1} è perpendicolare allo spazio diametrale S_{m+1} passante per S_m.

§ 19.

Intersezioni di due, tre ecc. n, sfere a $n-1$ dimensioni in S_n.

184. *Def. I.* Se due superficie sferiche a $n-1$ dimensioni hanno uno spazio tangente S_{n-1} in un punto comune A_0, si dice che si *toccano* nel punto A_0. Se sono situate dalla medesima parte dello spazio tangente si toccano *internamente*, se invece sono situate da parti opposte si toccano *esternamente*.

Nel primo caso la sfera che ha il raggio minore è contenuta nell'altra.

Teor. I. Se due sfere S^2_{n-1}, S'^2_{n-1} in S_n hanno un punto comune non situato sulla retta dei centri (asse centrale) le due sfere hanno in comune una sfera a $n-2$ dimensioni col centro sull' asse centrale e il cui spazio è perpendicolare a questo asse.

Dim. analoga a quella del teor. I, 102.

Oss. I. Vale lo stesso teor. II del n. 102 colla dim. analoga.

Teor. II. m superficie sferiche a $n-1$ dimensioni di S_n che non contengono una medesima superficie sferica a $n-1$, $n-2$,..., $n-m+1$ dimensioni o non hanno in un medesimo punto uno spazio tangente comune a $n-1$, $n-2$, ..., $n-m+2$ dimensioni, s' incontrano in una sfera a $n-m$ dimensioni, in un punto o in nessun punto.

Nel primo caso lo spazio S_{n-m+1} della sfera d' intersezione riesce normale allo spazio S_{m-1} che unisce i centri della m sfere; e nel secondo caso hanno uno spazio tangente comune a $n-m+1$ dimensioni.

Siano $K^{(1)}_{n-1}, K^{(2)}_{n-2}, \ldots, K^{(m)}_{n-1}$ le m sfere date. Se le superficie $K^{(1)}_{n-1}$, $K^{(2)}_{n-2}$ s' incontrano in una superficie $K^{(12)}_{n-2}$, e così $K^{(2)}_{n-1}$, $K^{(3)}_{n-1}$ ecc. $K^{(m-1)}_{n-1}$, $K^{(m)}_{n-1}$ in un'altra superficie $K^{(23)}_{n-2}$ ecc. $K^{(m-1m)}_{n-2}$, gli spazî a $n-1$ dimensioni di queste sfere $S^{(12)}_{n-1}$, $S^{(23)}_{n-1}$ ecc. sono normali alle rette che uniscono i centri 1, 2; 2, 3; ecc. $m-1$, m. Essi s' incontrano quindi in uno spazio S_{n-m+1} normale allo spazio S_m determinato dagli m centri. Se questo spazio incontra la sfera $K^{(12)}_{n-2}$ in una sfera K^2_{n-m}, questa è situata in ambedue le sfere $K^{(1)}_{n-1}$ $K^{(2)}_{n-1}$. Ma la sfera $K^{(23)}_{n-2}$ appartiene alla $K^{(2)}_{n-1}$, e quindi essendo lo spazio S_{n-m+1} e la sfera $K^{(23)}_{n-1}$ situati nello spazio $S^{(23)}_{n-1}$, la $K^{(23)}_{n-2}$ sarà incontrata dallo spazio S_{n-m+1} in una sfera K'^2_{n-m} che è situata sulla $K^{(2)}_{n-1}$, dunque la sfera K'^2_{n-m} coinciderà con la K^2_{n-m}. Siccome la $K^{(23)}_{n-2}$ appartiene alla $K^{(3)}_{n-1}$ vuol dire che la K^2_{n-m} appartiene anch' essa alla $K^{(3)}_{n-1}$. Analogamente si dimostra che la K^2_{n-m} appartiene a tutte le rimanenti sfere.

Se le m superficie sferiche date avessero un altro punto comune fuori della sfera anzidetta lo spazio determinato dal punto collo spazio della sfera incontrerebbe le m superficie in una superficie sferica a $n-m+1$ di-

mensioni comune. Quando lo spazio normale invece non incontra una delle superficie, allora le m superficie non hanno evidentemente alcun punto comune.

Nel caso che lo spazio normale comune agli spazî delle sfere $K^{(12)}_{n-2}$, $K^{(23)}_{n-2}$ ecc. tocchi una di queste sfere, le m superficie $K^{(1)}_{n-1}$, $K^{(2)}_{n-1}$, ..., $K^{(3)}_{n-1}$ hanno quello spazio come spazio tangente comune.

Coroll. n superficie sferiche a $n-1$ dimensioni dello spazio S_n che non hanno in comune nè una superficie sferica nè una circonferenza, o che non hanno in un medesimo punto alcun spazio tangente comune, esse si tagliano in due punti simmetrici rispetto allo spazio dei centri (*spazio centrale*) *o in due punti coincidenti o in nessun punto.*

Nel secondo caso esse hanno una tangente comune perpendicolare allo spazio dei centri.

Dim. analoga a quella del teor. III, 102.

§ 20.

Sistemi continui di figure invariabili in S_n.

185. *Sistema circolare intorno ad un piano.*

Def. I. Dai sistemi continui di figure invariabili nello spazio all'infinito si ottengono intorno ad un pnnto P_0 dello spazio S_n dei sistemi continui di figure invariabili che chiameremo *sistemi sferici*, di cui P_0 è il centro.

Def. II. Data una retta, i sistemi sferici intorno al punto all'infinito di essa danno intorno alla retta dei sistemi continui di figure che chiameremo *sistemi conici* intorno alla retta come *asse*.

Così seguitando si può dire: dato uno spazio S_m, i sistemi conici circolari che hanno per asse lo spazio all'infinito di S_m danno dei sistemi continui di figure invariabili intorno allo spazio S_m, che si chiamano sistemi conici circolari intorno allo spazio S_m come *asse*.

Def. III. Da un sistema di segmenti invariabili sopra una retta $r_{1\infty}$ otteniamo intorno ad uno spazio S_{n-1}, il cui spazio all'infinito è polare di $r_{1\infty}$, un sistema di diedri invariabili a $n-1$ dimensioni, che chiameremo *sistema circolare* di diedri a $n-1$ dimensioni, di cui lo spazio S_{n-1} è l'*asse*, e i diedri i *diedri all' asse.*

Teor. I. Lo spazio asse di un sistema circolare di diedri corrisponde a sè stesso.

Ammesso il teor. per $n-1$ lo si dimostra per n, essendo vero per $n=2,3$.

Oss. I Valgono con analoghe dimostrazioni i teor. III, IV, V, VI, VII, la def. III e il teor. VIII del n. 103.

Teor. II. Le figure di un sistema circolare sono congruenti.

Se l'asse del sistema si considera come appartenente ad una figura, esso corrisponde a sè stesso in tutte le figure.

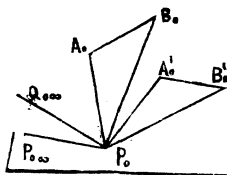



fig. 118

Se (A_0B_0), $(A'_0B'_0)$ sono due segmenti corrispondenti e sono dati $n-2$ punti $P_{0\infty}$, ... $Q_{0\infty}$ dello spazio asse, gli enniedri $P_0.P_{0\infty}$ .... $Q_{0\infty}A_0B_0$, $P_0.P_{0\infty}$.... $Q_{0\infty}A'_0B'_0$ sono dello stesso verso, perchè lo sono i due diedri $P_{0\infty}$.... $Q_{0\infty}\widehat{A_0P_0B_0}$, $P_{0\infty}$.... $Q_{0\infty}\widehat{A'_0P'_0B'_0}$ (teor. IV, 103 e oss. I), e quindi essendo congruenti due enniedri corrispondenti lo sono anche le due figure (oss. I, 173), dunque anche senza l'asse del sistema (fig. 118).

Teor. III. Le rette, i piani e gli spazî corrispondenti di un sistema circolare formano lo stesso angolo coll' asse.

Dim. analoga a quella del teor. X, 103.

Oss. II. Valgono il coroll. I del teor. X e i teor. XI, XII, del n. 103 colle stesse dimostrazioni.

Teor. IV. Due figure simmetriche rispetto ad un piano in uno spazio a a $n-2$ dimensioni appartengono in S_n ad un sistema circolare intorno allo spazio S_{n-1} come asse.

Dim. analoga a quella del teor. XIII, 103.

186. *Sistema parallelo.*

Def. I. Se l'asse A_{n-2} di un sistema circolare di diedri è all'infinito, tutti gli spazî S_{n-1} passanti per esso sono paralleli, e scelta una retta perpendicolare alla direzione di essi, i segmenti di essa servono a misurare le parti del fascio determinate dagli spazî di esso (oss. I, 169).

Considerando sulla perpendicolare un sistema continuo di segmenti invariabili si ha un sistema continuo di parti del fascio suddetto, che si chiama *sistema parallelo,* e la direzione degli spazî del sistema *direzione* del sistema.

La parte di un fascio di spazî paralleli chiameremo *zona* del fascio.

Oss. I. Sussistono i teor I, II, III del n. 104, il teor. analogo al teor. IV, e la def. II dello stesso numero.

Teor. I. Le figure di un sistema parallelo sono congruenti.

Dim. analoga a quella del teor. V, 104.

187. *Sistema generale ad una dimensione.*

Teor. I. Data una figura e una linea l nello spazio S_n, la figura appartiene ad un sistema continuo ad una dimensione di figure invariabili del quale la linea data è una linea di punti corrispondenti.

Dim. analoga a quella del teor. II, 65.

Teor. II. Due figure di un sistema continuo ad una dimensione di figure invariabili sono congruenti.

Dim. analoga al teor. II, 105.

Coroll. Due figure simmetriche di S_n non possono appartenere ad un sistema continuo di figure invariabili in S_n.

Oss. Qui vale la stessa osservazione fatta al n. 65 pei sistemi continui di figure invariabili a più dimensioni.

§ 21.

Applicazione del linguaggio del movimento ai sistemi di figure invariabili.

188. *Oss. I.* Corpi che si muovano realmente ne vediamo soltanto nel nostro mondo sensibile esterno (oss. emp. 1 e 37), quindi il movimento nello spazio S_n è puramente astratto, come tale è anche lo spazio, vale a dire senza che pei nostri sensi abbia un corrispondente oggetto esterno che ne concreti approsimativamente la realtà.

Ma per il principio del n. 18 dell'introduzione noi possiamo immaginare, sempre astrattamente, che lo spazio generale e quindi anche S_n sia dato, e perciò si può applicare ad esso il linguaggio del movimento, come si è stabilito al n. 67 dell'introduzione.

Con questo linguaggio si possono esprimere diversamente le proprietà dei sistemi continui, anche se le linee di punti corrispondenti del sistema non godono tutte le proprietà di quelle intuitive (oss. emp., def. I e II, 36), supposto però che al linguaggio del movimento non sia data tutta la libertà del n. 67 dell'introduzione, ma che esso sia applicato ai soli sistemi continui.

Dire che una figura può muoversi liberamente in S_n rimanendo invariabile significa che immaginiamo dati tutti i sistemi di figure invariabili in S_n di cui fa parte la figura data, considerando le altre figure di questi sistemi come posizioni diverse di questa figura (int. 67). Le proprietà del teor. II, 187 e del suo corollario si esprimono dicendo che due posizioni di una stessa figura sono congruenti, e che due figure simmetriche di S_n non possono trasportarsi l'una sull'altra in S_n, ma possono trasportarsi l'una sull'altra in S_{n+1}.

Il teorema che due figure congruenti di S_n non possono avere n coppie di punti corrispodenti comuni e indipendenti senza conincidere (oss. I, 173), col linguaggio del movimento esprime che una figura non può muoversi senza deformazione (def. II, 37) tenendo fissi n dei suoi punti indipendenti. Si dimostra in modo analogo al teor. X, 106 che due figure congruenti possono trasportarsi l'una sull'altra mediante una traslazione e $n-1$ rotazioni o mediante n rotazioni.

Capitolo II.

Operazioni del proiettare e del segare in S_n. Applicazione di esse allo studio delle configurazioni di un numero finito di spazî in ogni spazio S_r $(r \overset{<n}{>0})$ [1].

---

§ 1.

Operazioni del proiettare e del segare. — Figure omologiche complete.

189. *Def. I. Proiettare* i punti, le rette, i piani e gli spazî di S_n da uno spazio S_m $(m < n-1)$ significa congiungere i punti, le rette, i piani e gli spazî S_r di S_n $(r \overset{=}{<} n-m-2)$ con S_m.

Def. II. Segare uno spazio S_r con uno spazio S_m significa determinare lo spazio S_a d'intersezione di S_r con S_m, perciò deve essere $r+m-n \overset{=}{>} o$ (teor. II, IV, 158). Lo spazio S_m si chiama *spazio di sezione.*

Def. III. Le operazioni del proiettare e del segare si chiamano *duali* perchè allo spazio che proietta S_r da S_m si può far corrispondere lo spazio d'intersezione di S_{n-r-1} duale di S_r collo spazio S_{n-m-1} duale di S_m (def. 159).

Def. IV. Proiettare da un S_m uno spazio S_r sopra o *in uno spazio S_m'* significa determinare lo spazio d'intersezione S_a dello spazio S_{m+r+1} collo spazio S_m'.

Lo spazio S_a chiamasi *proiezione* di S_r in S_m'; S_m' *spazio* di *proiezione*, S_{m+r+1} *spazio proiettante,* ed S_m *centro.*

Oss. I. L'operazione del proiettare da un S_m in un S_r si compone di una proiezione e di una sezione, e quindi ad essa non è duale in S_n una sola sezione, ma una sezione ed una proiezione.

Def. V. Se lo spazio di proiezione è uno spazio duale S_{n-m-1} allo spazio centro S_m e che non lo incontra in alcun punto, ogni punto A_0 di S_n ha per proiezione un punto ed un solo punto A'_0 in S_{n-m-1}, e la proiezione si chiama *univoca.*

Oss. II. In tal caso uno spazio S_r proiettato da un S_{n-m-1} in S_m dà in questo spazio un S_r. Coll'operazione duale in S_n si sega con S_m lo spazio S_{n-r-1}, e poi si proietta da S_{n-m-1}. Ma lo spazio d'intersezione di S_m con S_{n-r-1} è S_{m-r-1} (teor. II, 158), che è duale a S_r in S_m. *Rispetto allo spazio S_m le due operazioni del proiettare in S_m e del segare con S_m sono dunque duali.*

Oss. III. Come è facile vedere, ogni proiezione secondo la def. IV si deduce da una proiezione univoca; basta dunque che ci limitiamo a quella della def. V. La

---

1) In questo capitolo non facciamo uso che dei teoremi sulle intersezioni degli spazî in S_n.

proiezione univoca non è però reciproca (int. def. II, 42) perchè il punto A'_0 è proiezione di tutti i punti dello spazio $(S_m A_0)$.

Oss. IV. Per proiettare in una retta il centro di proiezione deve essere uno spazio S_{n-2}, che è duale alla retta. Così per proiettare in un piano o in uno spazio a tre dimensioni il centro di proiezione deve essere uno spazio S_{n-3} o uno spazio S_{n-4} (coroll. def. I, 159). Con questa operazione noi otteniamo delle figure nella retta, nel piano e nello spazio S_3 segando gli spazî passanti per gli spazî S_{n-2}, S_{n-3}, e S_{n-4}; questa operazione è dunque compresa in quella più generale di segare colla retta, col piano e collo spazio S_3 delle figure qualunque dello spazio S_n.

Ma la ragione della distinzione della prima operazione dalla seconda, la si vede quando data una figura di S_n si proiettano ad es. i suoi punti e le sue rette, le sue linee in S_2, e poi si tagliano i suoi spazî e le sue superficie col piano S_2 o con un altro piano. Si ottengono così in generale figure diverse in S_2.

190. *Oss. I.* Qui supponiamo nota la formola che dà le combinazioni di n oggetti r a r, che è indicata dal simbolo $\binom{n}{r}$.

Def. I. Per *piramide completa* in S_n intenderemo la figura formata da N punti $(N \geqq n+1)$ e dagli spazî che sono da essi determinati, che si chiamano *spigoli*, se sono rette, o *facce piane, a tre* ecc. *a* $n-1$ *dimensioni* se sono piani, spazî a tre, ecc. a n dimensioni.

Teor. I. Quando in uno spazio S_r *i vertici di* $q-1$ *piramidi sono situati rispettivamente a* $q-1$ *a* $q-1$ *in* p *rette passanti per un punto* P_0, *e si pone*

$$q = n - r + 2, \quad p = N - (n-r+1)$$

quelle piramidi determinano mediante le intersezioni dei loro spigoli, facce piane..., facce a $r-1$ *dimensioni* S_{r-1} *una figura di*

$$\binom{N}{n-r+1} = \binom{p+q-1}{q-1} S_0, \ \binom{N}{n-r+2} = \binom{p+q-1}{q} S_1, \ldots \binom{N}{n} = \binom{p+q-1}{q+r-2} S_{r-1}$$

Per ogni S_0 *passano* $N-(n-r+1 = p \quad S_1, \binom{N-(n-r+1)}{2} = \binom{p}{2} S_2, \ldots$

$$\binom{N-(n-r+1)}{r-1} = \binom{p}{r-1} S_{r-1},$$

» S_1 » $N-(n-r+2) = p-1 \quad S_2, \ldots$

⋮ $\binom{N-(n-r+2)}{r-2} = \binom{p+1}{r-2} S_{r-1},$

» S_{r-2} » $N-(n-1) = p-r+2 \ S_{r-1}$

Ogni S_1 *contiene* $n-r+2 = q \ S_0$

» S_2 » $\binom{n-r+3}{2} = \binom{q+1}{2} S_0, \ q+1 \ S_1$

⋮

» S_{r-2} » $\binom{n-1}{r-1} = \binom{q+r-3}{r-1} S_0, \ \binom{n-1}{r-3} = \binom{q+r-3}{r-3} S_1, \ldots$

» S_{r-1} » $\binom{n}{r-1} S_0, \ \binom{n}{r} S_1 \ldots n \ S_{r-2}.$

Questa figura ha le stesse proprietà rispetto a ciascuno dei suoi spazî delle stesse dimensioni. Per esempio se si parte da un punto qualunque della figura si hanno $q-1$ *nuove piramidi di* $p-1$ *vertici, i quali giacciono rispettivamente a* $q-1$ *a* $q-1$ *in* p *rette passanti per quel punto, e che determinano la stessa figura.*

Questa figura può riguardarsi come la sezione dello spazio S_r in cui essa giace, colla figura completa di N punti nello spazio R_n; e viceversa, da una tale configurazione di N punti di S_n si ottiene con la sezione fatta da uno spazio S_r di S_n una figura analoga alla prima.

Questa figura è anche la proiezione della figura completa di $N = p + q - 1$ spazî S_{p-1} nello spazio S_p fatta da uno spazio S_{p-r-1} su S_r.

Siano dati N punti indipendenti in S_n che indico con le cifre 1,2,3..., N dove $N \geqq n + 1$. Essi determinano a due a due, a tre a tre, ecc. a n a n

$$\binom{N}{2} S_1, \binom{N}{3} S_2 \dots \binom{N}{m+1} S_m \dots \binom{N}{n-r+1} S_{n-r}$$

$$\binom{N}{n-r+2} S_{n-r+1}, \dots, \binom{N}{n} S_{n-1}$$

Di questa figura:

Per ogni S_1	passano	$(N-2)$	$S_2, \dots$	$\binom{N-2}{m-1}$	$S_m, \dots$
» S_2	»	$(N-3)$	$S_3, \dots$	$\binom{N-3}{m-2}$	$S_m, \dots$
$\vdots$ $\vdots$	$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$	
» S_r	»	$(N-r-1)$	$S_{r+1}, \dots$	$\binom{N-r-1}{m-r}$	$S_m, \dots$
$\vdots$ $\vdots$	$\vdots$			$\vdots$	
» S_{n-r}	»	$(N-(n-r+1))$	$S_{n-r+1} \dots$	$\binom{N-(n-r+1)}{r-1}$	S_{n-1}
» S_{n-r+1}	»	$(N-(n-r+2))$	$S_{n-r+2}, \dots$	$\binom{N-(n-r+2)}{r-2}$	S_{n-1}
» S_{n-r+2}	»	$(N-(n-r+3))$	$S_{n-r+3}, \dots$	$\binom{N-(n-r+3)}{r-3}$	S_{n-1}
$\vdots$ $\vdots$	$\vdots$			$\vdots$	
» S_{n-2}	»			$(N-n+1)$	S_{n-1}

Ogni S_1	contiene	2	S_0	
» S_2	»	3	S_0,	$3\ S_1$
$\vdots$ $\vdots$	$\vdots$			
» S_r	»	$(r+1)$	S_0,	$\binom{r+1}{2} S_1, \binom{r+1}{3} S_2, (r+1)\ S_{r-1}$
$\vdots$ $\vdots$	$\vdots$	$\vdots$		
» S_{n-r}	»	$(n-r+1)$	$S_0, \dots$	$(n-r+1)\ S_{n-r-1}$
» S_{n-r+1}	»	$(n-r+2)$	$S_0, \dots$	$(n-r+2)\ S_{n-r-2}$
» S_{n-r+2}	»	$(n-r+3)$	$S_0, \dots$	$\binom{n-r+3}{2} S_{n-r}\ \ (n-r+3)\ S_{n-r+1}$
$\vdots$ $\vdots$	$\vdots$	$\vdots$		
» S_{n-2}	»	$(n-1)$	$S_0, \dots$	$\binom{n-1}{r-2} S_{n-r1}, \binom{n-r+1}{r-3} S_{n-r+1}$ $(n-1)\ S_{n-3}$
» S_{n-1}	»	n	$S_0, \dots$	$\binom{n}{r-1} S_{n-r}, \binom{n}{r-2} S_{n-r+1}$ $\binom{n}{r-3} S_{n-r+2} \dots n\ S_{n-2}$.

Seghiamo ora questa figura con uno spazio S_r. Uno spazio S_r interseca gli spazî S_{n-r} della figura in punti, gli spazî S_{n-r+1} in rette e così via, gli spazî S_{n-1} in spazî S_{r-1}. In tal guisa la figura sezione è costituita da tanti punti rette ecc. e spazî S_{r-1} quanti sono gli spazî S_{n-r}, S_{n-r+1} ecc. e S_{n-1} della figura completa degli N punti in S_n. Siccome ciascun spazio S_{n-r} di questa figura si ottiene da una combinazione degli N punti a $(n-r+1)$ a $(n-r+1)$, e ciascuno S_{n-r+1} da una combinazione degli N punti a $(n-r+2)$ a $(n-r+2)$ ecc., così possiamo utilizzare queste combinazioni per l'indicazione dei punti, delle rette, dei piani ecc. della figura sezione. Se noi indichiamo per es. gli N punti con i numeri 1, 2, 3, ..., N, lo spazio S_{n-r} determinato dagli $n-r+1$ punti 1, 2, 3, ... $(n-r)$, $(n-r+1)$ ci dà un punto della figura in S_r che indicheremo col simbolo $123 \ldots (n-r)(n-r+1)$. Ma per quello spazio S_{n-r} passano tutti gli spazî S_{n-r+1} che si ottengono aggiungendo successivamente agli $n-r+1$ punti di S_{n-r} uno ad uno gli $N-(n-r+1)$ rimanenti punti. Uno spazio S_{n-r+1} viene tagliato dallo spazio S_r in una retta; quindi pel punto $123 \ldots (n-r)(n-r+1)$ passano tutte le rette della figura di S_r i cui simboli contengono il simbolo del punto, cioè:

$$123\ldots(n-r+1)(n-r+2),\ 123\ldots(n-r+1)(n-r+3),\ \ldots 123\ldots(n-r+1)(N-(n-r+1)).$$

Sopra ciascuna di queste rette giacciono oltre al punto $123\ldots(n-r+1)$ altri $n-r+1$ punti della figura, perché in ogni S_{n-r+1} sono contenuti $n-r+2$ S_{n-r-2}; essi corrispondono alle combinazioni degli $n-r+2$ numeri a $n-r+1$ a $n-r+1$ del simbolo della retta.

Così per es. nella prima retta giacciono i punti

$$123\ldots(n-1)(n-r+2),\ 23\ldots(n-r-1)(n-r+1)(n-r+2),\ldots;$$

nella seconda i punti

$$123\ldots(n-r)(n-r+3), 23,\ldots(n-r-1)(n-r+1)(n-r+3), \text{ ecc.}$$

Se congiungiamo due punti di una stessa colonna, otteniamo un' altra retta della stessa figura. Per es. se congiungiamo i due primi punti della prima colonna, si ha la retta:

$$123\ldots(n-r)(n-r+2)(n-r+3)$$

e per quelli della seconda colonna la retta

$$23\ldots(n-r-1)(n-r+1)(n-r+2)(n-r+2) \text{ ecc.}$$

Queste due rette s' incontrano in un punto della figura, cioè nel punto $23\ldots(n-r-1)(n-r+2)(n-r+3)$. Per ciascun punto della figura passano dunque $N-(n-r+1)$ rette di essa, e in ciascuna di queste giacciono, oltre al punto dato, $n-r+1$ punti della stessa figura. Noi possiamo formare quindi con essi $n-r+1$ *piramidi* di $N-(n-r+1)$ *vertici*, che giacciono rispettivamente in quelle $N-(n-r+1)$ rette.

Una tale piramide è formata con quei punti, i cui simboli hanno comuni $n-r$ numeri, come per es.

$$123\ldots(n-r)(n-r+2),\ 123\ldots(n-r)(n-r+3)\ldots;\ 123\ldots(n-r)(N-(n-r+1)).$$

Si può domandarsi se la figura di queste $n-r+1$ piramidi è una figura generale, oppure se una figura generale di $n-r+1$ piramidi in S_r, i cui

vertici giacciono rispettivamente in $N-(n-r+1)$ rette passanti per un punto, può essa pure considerarsi quale sezione di una piramide di N punti di S_n.

La risposta è affermativa. Infatti supponiamo date le $N-(n-r+1)$ rette passanti per un punto che indichiamo col simbolo $1\,2\,3\,\ldots\,(n-r+1)$, e sopra di esse i vertici delle piramidi in S_r indicati con gli stessi simboli di prima. Dal punto $1\,2\,3\,\ldots\,(n-r)\,(n-r+1)$ conduciamo uno spazio S_{n-r} che incontri S_r nel solo punto dato, e in questo spazio prendiamo $n-r+1$ punti del tutto indipendenti, che indichiamo con $1, 2, 3, \ldots, n-r+1$.

Congiungiamo ora i vertici, che giacciono nella retta $1\,2\,3\,\ldots\,(n-r+2)$, per es. il vertice $1\,2\,3\,\ldots\,(n-r)\,(n-r+2)$ coi punti $1, 2, 3, \ldots, (n-r)$ di S_{n-r}; otteniamo un nuovo spazio S_{n-r}, e per tutti i vertici di quella retta otteniamo $n-r+1$ spazî S_{n-r} i quali sono situati entro allo spazio S_{n-r+1} determinato dalla retta e dal primo spazio S_{n-r} passante pel punto $123\ldots(n-r+1)$.

Questi $n-r+1$ spazî S_{n-r} si incontrano quindi in un punto (teor. III, 158) che noi indicheremo col numero $n-r+2$. Se ripetiamo questa stessa operazione per le altre rette passanti pel punto $1\,2\,3\,\ldots\,(n-r+1)$, otteniamo in tutto $N-(n-r+1)$ nuovi punti, che coi punti $1,2,3,\ldots\,n-r+1$ sopra indicati danno N punti. Dalla figura completa di questi punti si ottiene mediante una sezione la figura delle $n-r+1$ piramidi date in S_r.

Per dimostrare l'ultima proprietà, osserviamo anzi tutto che gli spazî S_{r-1} della figura sono $\binom{p+q-1}{q+r-2}$, cioè in numero uguale o maggiore dei suoi punti, essendo $N \geqq n+1$. Scegliamo uno di questi spazî S_{r-1}; in esso sono contenuti $n=q+r-2$ spazî S_{r-2}, e per ciascuno di questi passano $N-n+1 = p-r+2$ spazî S_{r-1}. Si vede dunque che la figura precedente può essere ottenuta colla proiezione di un'altra configurazione.

Se noi supponiamo che nello spazio S_n si abbiano N spazî S_{n-1} in luogo di N punti, essi determinano la figura correlativa alla prima, che si compone evidentemente di $\binom{N}{2}\,S_{n-2}$, $\binom{N}{3}\,S_{n-3}, \ldots, \binom{N}{n-r+1}\,S_{r-1}$ $\binom{N}{n-r+2}\,S_{r-2}\ldots\ldots$ $\binom{N}{n}\,S_0$, e in ciascun S_{r-1} sono situati:

$$N-(n-r+1)\,S_{r-2},\ldots\ldots \binom{N-(n-r+1)}{r-1}S_0$$

Proiettando questa figura da uno spazio S_{n-r-1} qualunque sopra uno spazio S_r che è correlativo al primo e che supponiamo non abbia con esso alcun punto comune, si ottiene in S_r la figura correlativa alla precedente, ricordando che gli spazî S_{r-1}, S_{r-2}, ... S_0 sono proiettati in spazî dello stesso numero di dimensioni. In uno spazio qualsiasi S_{r-1} di essa sono situati p spazî S_{r-2} e per ciascuno dei quali passano q spazî S_{r-1}, come in ogni spazio S_{n-r+1} della figura precedente sono situati q spazî S_{n-r} ove

$$q=n-r+2 \qquad p=N-(n-r+1).$$

Ora per avere i valori di n' ed N' tali che questa figura coincida con quella del teorema, basta porre evidentemente

$$q+r-2=N'-(n'-r+1) \qquad p-r+2=n'-r+2$$

da cui

$$n' = p \qquad N' = p + q - 1 = N.$$

Osserviamo che si ha $\binom{N}{p} = \binom{N}{q-1}$ essendo $q - 1 = N - p$.

Oss. I. Gli spazî di una tal figura possono essere indicati con due simboli differenti, secondo che la si considera come sezione o come proiezione di una figura data in uno spazio superiore.

Oss. II. Questa proprietà ci permette di ottenere i teoremi delle figure complete analoghe in una maniera molto semplice, cioè mediante il principio del proiettare e del segare.

Def. II. Quando noi partiamo dal punto $123...n - r + 1$ della figura del teor. I colle successive intersezioni degli spigoli e delle facce delle $q - 1$ piramidi si giunge allo spazio $(n - r + 2)..\ (N-(n-r+1))$ (quando però questo simbolo corrisponda ad uno spazio della figura (vedi esempi §. 3). Siccome i simboli del punto e dello spazio S presi insieme ci danno tutti gli indici degli N punti, così li chiameremo *complementari;* e in generale sono *complementari* due spazî della figura i cui simboli hanno per somma il numero N.

Oss. III. La piramide più semplice in S_r ha $r + 1$ vertici, vale a dire la piramide fondamentale.

Def. III. Consideriamo due di queste piramidi in S_r i cui vertici siano due a due allineati con un punto O. Due tali piramidi si chiamano *omologiche* ed O il *centro d'omologia.*

Due vertici di esse allineati con O si chiamano *corrispondenti* e così due facce che passano per lo stesso numero di vertici.

In questo caso $q = 3 = n - r + 2$, $p = r + 1 = N - (n-r+1)$ da cui

$$n = r + 1, \quad N = r + 3.$$

Coroll. I. Gli spigoli piani ecc. e le facce S_{r-1} di due piramidi omologiche corrispondenti si intersecano in punti, rette, piani ecc. di uno spazio S_{r-1}, che corrisponde al centro d'omologia. La figura completa si compone di

$$\frac{(r+2)(r+3)}{2} S_0, \quad \frac{(r+1)(r+2)(r+3)}{2.3} S_1, \ldots, \quad \frac{(r+2)(r+3)}{2} S_{r-1}$$

Per ogni	S_0 *passano*	$r + 1\ S_1,\ \frac{r(r+1)}{2} S_2, \ldots$	$\frac{r(r+1)}{2} S_{r-1}$
»	S_1 »	$r\ S_2,$	$\frac{r(r-1)}{2} S_{r-1}$
Ogni	S_1 *contiene*	$3\ S_0$	
»	S_2 »	$6\ S_0,\ 3\ S_1$ ecc.	

Questa figura si ottiene con la sezione dello spazio S_r da una configurazione di $r + 3$ punti dello spazio S_{r+1}.

Se noi poniamo nel teorema precedente per N ed n i valori ora trovati, vediamo che il numero degli spazî S_{r-1} della figura completa di queste due piramidi è $\frac{(r+2)(r+3)}{2}$, cioè uguale al numero dei punti della medesima; dunque la figura è duale di sè stessa, ed inoltre i suoi spazî complementari sono duali. Possiamo indicare i punti della figura coi simboli 12, 13, ecc. le rette

coi simboli 123, 124 ecc. e gli spazî S_{r-1} coi simboli 1 2 3 4 ... $r+1$, così che lo spazio 3 4 ... $(r+3)$ è *complementare* al punto 12. Se il punto O viene indicato con 12, i vertici delle due piramidi coi vertici allineati con O, sono

13, 14, . . . , 1 $(r+3)$,
23, 24. . . . , 2 $(r+3)$

Gli spigoli delle piramidi sono quindi

134, 135, . . . , 145, 146, ecc.
234, 235, . . . , 245, 246, ecc.

I punti d'incontro degli spigoli corrispondenti

134, 234 oppure 34
135, 235 » 35

appartengono allo spazio 3 4 5 ... $(r+2)$ $(r+3)$, che corrisponde al punto 12.

La figura completa di due piramidi omologiche fondamentali di S_r può riguardarsi anche come la proiezione di una figura di $r+3$ punti qualunque di R_{r+1}; per conseguenza uno spazio della prima può essere espresso o col simbolo già indicato, oppure con quello dello spazio complementare.

Def. IV. In generale noi diciamo che due piramidi con più di $r+1$ vertici in R_r sono *omologiche*, quando non solo i loro vertici sono allineati due a due con un punto (*centro di omologia*) ma anche quando i loro spigoli, piani ecc. si tagliano in uno spazio R_{r-1} (*spazio di omologia*).

Pel corollario dato la seconda condizione non è necessaria per due piramidi fondamentali.

Coroll. II. Se i vertici di due piramidi in S_r sono $r-s$ e sono allineati a due a due con un punto, gli spigoli e le facce di esse s' incontrano in uno spazio S_{r-s-1}.

Teor. II. La figura completa di due piramidi omologiche fondamentali in uno spazio S_r si scompone in $r-3$ gruppi di due piramidi duali di $r+2$ vertici, rispettivamente di $r+2$ facce a $r-1$ dimensioni S_{r-1}, le quali non hanno alcun spazio comune e che prese insieme formano la figura primitiva.

Consideriamo ancora due piramidi fondamentali omologiche in S_r, il cui centro d'omologia sia 12. Con questo punto e coi vertici di una delle due piramidi, per es. 13, 14, ... , 1 $(r+3)$ formiamo una piramide di $r+2$ vertici, cioè 12, 13, ... , 1 $(r+3)$, e consideriamo anche la piramide duale 34.... $(r+3)$, 245 .... $(r+3)$, ..., 23 .... $(r+1)$ $(r+2)$. Queste due piramidi non hanno alcun spazio comune, perchè tutti i simboli degli spazî della prima contengono la cifra 1, mentre 1 non è contenuto nei simboli di quelli della seconda. Vediamo però ancora che $(r+2)$ vertici della prima e gli $\frac{(r+1)(r+2)}{2}$ punti della seconda presi insieme danno precisamente gli $\frac{(r+2)(r+3)}{2}$ punti S_0 della figura completa delle due prime piramidi. Di questi gruppi ce n' é tanti quanti sono le cifre contenute nei simboli di questa figura, cioè $r+3$.

Def. V. Date le due piramidi duali di uno degli $r+3$ gruppi, per es.

$$12,\ 13,\ \ldots,\ 1\,(r+2),\ 1\,(r+3)$$

$345\ \ldots\ r+3,\ 245\ \ldots\ r+3,\ \ldots,\ 234\ldots(r+1)(r+3),\ 234\ldots(r+1)(r+2)$, consideriamo l'ultima di esse; r delle sue facce a $r-1$ dimensioni si incontrano in un punto; per es. le prime r hanno comune il punto $(r+1)\ (r+2)$, il quale corrisponde allo spazio d'intersezione S_{r-2} delle due ultime facce, cioè $234\ldots r\ (r+1)$. Il punto $(r+1)(r+2)$ e questo spazio S_{r-2} determinano uno spazio S_{r-1}, che chiameremo *spazio diagonale della piramide*. Abbiamo dunque in tutto $\frac{(r+1)(r+2)}{2}$ spazî diagonali, che costituiscono la *figura diagonale* della piramide. Se $r=2$ si hanno 3 sole rette diagonali.

La seconda piramide può essere rappresentata dal simbolo $234\ \ldots\ r+3$, vale a dire mediante $r+2$ cifre della serie $1,\ 2,\ 3,\ \ldots,\ r+3$.

Teor. III. Tutte le piramidi diagonali di $r+2$ facce S_{r-1} degli $r+3$ gruppi della figura completa di due piramidi fondamentali omologiche in R_r, sono due a due omologiche per un punto e per uno spazio della stessa figura quale centro e spazio di omologia.

La stessa cosa accade per le $r+3$ piramidi rimanenti di $r+2$ vertici duali alle prime.

Siano date due di queste piramidi per es.

$$2345\ \ldots\ (r+3),\qquad 1345\ \ldots\ (r+3)$$

Le loro figure diagonali sono date dai seguenti spazî S_{r-1}:

Iª		IIª	
23	$45\ \ldots\ r+3$	13	$45\ \ldots\ (r+3)$
24	$35\ \ldots\ r+2$	14	$35\ \ldots\ (r+3)$
⋮	⋮	⋮	⋮
$2(r+3)$	$34\ \ldots\ r+2$	$1(r+3)$	$34\ \ldots\ (r+2)$
⋮	⋮	⋮	⋮
$s(s+1)$	$23\ \ldots\ (s-1)(s+2)\ \ldots\ (r+3)$	$s(s+1)$	$14\ \ldots\ (s-1)(s+2)\ \ldots\ (r+3)$
⋮	⋮	⋮	⋮
$s(r+3)$	$23\ \ldots\ (s-1)(s+1)\ \ldots\ (r+2)$	$s(r+3)$	$13\ \ldots\ (s-1)(s+1)\ \ldots\ (r+2)$
⋮	⋮	⋮	⋮
$(r+2)(r+3)$	$234\ \ldots\ r+1$	$(r+2)(r+3)$	$13\ \ldots\ (r+1)$

Da questo specchietto risulta che le due piramidi diagonali sono omologhe per il punto 12 quale centro e per lo spazio $345\ \ldots\ r+3$ quale spazio di omologia. Infatti tutti i punti di queste piramidi, i cui simboli non contengono nè la cifra 1 nè la cifra 2, corrispondono a sè medesimi, perchè essi sono situati nello spazio $345\ \ldots\ r+3$. Una coppia di punti, come 13 e 23 giace in una retta passante pel punto 12. Se consideriamo un'altra coppia di punti $1s$, $2s$, dove $s=4,\ 5,\ \ldots,\ (r+3)$, si vede che questi punti giacciono per diritto col punto 12, e che le rette $13,\ 1s;\ 23,\ 2s$ si incontrano nel punto $3s$ dello spazio d' omologia.

Teor. IV. Affinchè la figura in S_r del teorema I sia duale a sè stessa si deve avere $p = q + r - 2$.

Bisogna che il numero dei punti S_0 della figura sia uguale a quello degli spazî S_{s-1}, vale a dire si deve avere:

$$\binom{N}{n-r+1} = \binom{N}{n} \quad (1).$$

Si può soddisfare a questa uguaglianza ponendo:

$$N - n + r = n + 1$$

da cui

$$N = 2n - r + 1. \quad (2)$$

Ma

$$n = q + r - 2 \qquad N = p + q - 1$$

dunque

$$p = q + r - 2 \quad (3)$$

E inversamente se ha luogo questa relazione, sussiste la (2) ed anche la (1).

Da ciò che precede risulta facilmente che:

Coroll. Una tale figura duale di sè stessa si ottiene colla sezione dello spazio S_r con una piramide di $N = 2n - r + 1$ punti dello spazio S_n; e colla proiezione sullo stesso spazio S_r della piramide duale in S_n.

§ 2.

Applicazioni al piano e allo spazio S_3.

191. *Applicazioni al piano.*

Dal teorema I, 190 abbiamo per $r = 2$, ossia per il piano:

$$q = n, \qquad p = N - n + 1$$

a) Il caso più semplice è $q = 3$ e $p = 2$, allora $N = 4$, vale a dire si ottiene nel piano un quadrilatero.

b) $q = 3, \quad p = 3, \quad N = 5$

Otteniamo nel piano la figura completa di due triangoli omologici cioè quella di 10 punti, che giacciono tre a tre in 10 rette. Questa figura si scompone in cinque gruppi di un quadrangolo e di un quadrilatero completo, che non hanno alcun vertice e alcun lato comune e che presi insieme formano l'intera figura. Si ha pure che due dei cinque quadrangoli o quadrilateri sono omologici. Il centro e l'asse di omologia coincidono con un punto e colla retta corrispondente della fignra [1]).

Questa figura risulta segando un pentangono completo dello spazio R_3.

c) $q = 4, \quad p = 3, \quad N = 6$

In tal caso si hanno 20 punti, che a 4 a 4 giacciono in 15 rette, che a tre a

1) Nella Memoria sopra l'esagrammo di Pascal (Atti della R. Acc. del Lincei, 1877) abbiamo dimostrato che le 60 rette di Pascal formano 10 di queste figure, i cui punti sono punti di Kirkman; che una di questa figura è polare reciproca di sè stessa rispetto ad una conica π. Il quadrangolo e il quadrilatero di uno dei 5 gruppi citati sono polari reciproci rispetto alla conica π.

tre passano pei 20 punti. La figura così ottennta si scompone in 10 coppie di punti complementari per es. 123, 456; ecc. [1]).

d) $q=4, \quad p=4, \quad N=7$

Abbiamo tre quadrangoli

124, 125, 126, 127; 134, 135, 136, 137; 234, 235, 236, 237

i cui vertici sono situati sulle rette

1234, 1235, 1236, 1237

che passano per il punto 123.

I lati dei tre quadrangoli sono

1245, 1246, 1247, 1256, 1257, 1267
1345, 1346, 1347, 1356, 1357, 1367
2345, 2446, 2347, 2356, 2357, 2367.

I lati corrispondenti s'incontrano nei punti

145, 146, 147, 156, 157, 167
245, 246, 247, 256, 257, 267
345, 346, 247, 356, 357, 367

che giacciono tre a tre nelle rette

1456, 1457, 1467, 1567
2456, 2457, 2467, 2567
3456, 3457, 3467, 3567

le quali s'incontrano tre a tre nei quattro punti 456, 457, 467, 567 della retta 4567.

Questa retta corrisponde dunque al punto 123.

La figura si compone quindi di 35 punti, che giacciono 4 a 4 in 35 rette, passanti 4 a 4 per i 35 punti.

e) Per le figure duali nel piano si deve avere

$$N=2n-1$$

cioè:

$$p=n, \quad q=n$$

192. *Applicazioni allo spazio S_3.*

Poniamo ora $r=3$, cioè seghiamo la figura degli N punti in S_n con uno spazio S_3.

Si ha:

$$q=n-1, \qquad p=N-n+2$$

a) Sia

$$q=3, \quad p=4, \quad \text{da cui} \quad N=6, \quad n=4.$$

Otteniamo in R_3 la figura di due tetraedri omologici, cioè 13, 14, 15, 16 e 23, 24, 25, 26, i cui vertici sono situati due a due nelle quattro rette 123, 124, 125, 126 passanti pel punto 12.

Gli spigoli e le facce piane corrispondenti si tagliano in punti e rette di un piano. La figura si compone di 15 punti situati 3 a 3 in 20 rette e 6 a 6 in 15 piani, i quali passano 3 a 3 per le 20 rette (coroll. teor. I, 190). Per ciascun

[1]) Essa è analoga alla figura delle 10 coppie di punti di Steiner nell'esagrammo di Pascal.

punto passano 4 rette, e in ciascun piano ne giace un egual numero. Al punto 12 corrisponde il piano 3456. Dunque:

La figura completa di due tetraedri omologici in S_3 è duale di sè stessa. Essa si scompone in sei gruppi di un pentagono e di un pentaedro. Due qualunque dei pentagoni o dei pentaedri sono omologici. Il centro e il piano di omologia cadono in un punto e nel piano corrispondente della figura [1]).

b) $q = 4, \quad p = 5$ da cui $n = 5, \quad N = 8$

si ottiene una figura di 56 punti, che giacciono 4 a 4 su 70 rette, passanti 5 a 5 per i 56 punti, vale a dire si ottiene una figura duale di sè medesima. Al punto 123 corrisponde il piano 45678. E così vià.

§ 3.

Configurazioni generali di un numero finito di punti o di spazî.

193. *Def. I.* Un gruppo qualunque di n punti, o rette, piani e spazî in uno spazio S_m non contenuto in uno spazio inferiore chiamasi *configurazione* di S_m [2]).

Def. II. Due configurazioni sono della stessa specie in due spazî S_m e S'_m quando si possono ottenere una dall'altra mediante un numero finito di proiezioni e di sezioni successive.

Oss. I. Tenendo conto fra due configurazioni del solo fatto che si possono ottenere o no in questo modo, possiamo dire che due configurazioni della stessa specie sono configurazioni uguali (int. def. IV, 9),

Per dimostrare il seguente teorema ci appoggiamo al teorema che date due piramidi fondamentali P, P' di S_n si può dedurle per proiezione e sezione l'una dall'altra, e in guisa che ad uno spazio S_r che taglia o proietta P in un S_{n-r-1}, corrisponda uno spazio S'_r che taglia o proietta P in uno spazio S'_{n-r-1} e che le due configurazioni in S_r, S'_r, o S_{n-r-1}, S'_{n-r-1} siano della stessa specie [3]):

Teor. I. Ciascuna configurazione di $n+1$ o meno di $n+1$ punti in uno spazio R_r, può ottenersi quale proiezione di infinite piramidi fondamentali di S_n, o quale sezione di infinite piramidi fondamentali di uno spazio superiore di S_r. Una tale configurazione può essere ottenuta mediante proiezione e sezione da infinite piramidi fondamentali di quanti si vogliono spazî.

Reciprocamente, da una piramide fondamentale di S_n si possono ottenere con proiezione (o sezione) tutte le specie di configurazioni di $(n+1)$ o meno di $n+1$ punti (oppure spazî S_{r-1}) di uno spazio inferiore S_r.

---

1) La figura completa di due piramidi omologiche è polare reciproca di sè stessa rispetto ad una superficie di 2° grado (Vedi A. Behandlung der proiect. Verhältnissen ecc. Math. Ann. Vol. XIX) rispetto alla quale sono polari due qualunque delle piramidi duali di esse (teor. III,190). Così nel caso di $r=3$ i pentagoni e i pentaedri duali dei sei gruppi della figura completa di due tetraedri omologici in S_3 sono polari reciproci rispetto ad una superficie di 2° grado. S'incontra questa figura in quella completa di 6 complessi lineari in involuzione di *Klein* e della superficie dei centri di curvatura di una superficie di 2° grado (vedi A «Sopra alcune notevoli configurazioni ecc.» Memoria II. Atti della R. Accademia dei Lincei, 1881, pag. 75 e seg.).

2) La teoria generale delle configurazioni di un numero finito di spazî non riguarda soltanto quelle nelle quali ad es. gli n punti di una configurazione sono situati p a p in rette o spazî che passano r a r per gli n punti dati, ma anche quelle nelle quali gli n punti sono situati in curve e superficie. Qui noi riguardiamo il problema in questo senso più generale. Del resto la geometria (def. III, 2) non è che la scienza dei gruppi o configurazioni di punti.

3) Vedi A. «Behandlung der proiect. Verhältnissen der Räume von mehereren Dimensionen l. c.

Siano dati $n+1$ punti arbitrarî ad es. in un piano R_2, che naturalmente non siano situati su una stessa retta, e proiettiamoli da uno spazio qualsiasi S_{n-3}, che non incontra il piano. Per lo spazio S_{n-3} passano dunque $n+1$ spazî S_{n-2}, i quali però non giacciono in uno spazio S_{n-1}, poichè si è escluso il caso in cui S_{n-3} abbia uno o più punti comuni con S_2. Noi possiamo quindi scegliere negli $n+1$ spazî S_{n-2} altrettanti punti, in modo però che non siano situati in uno spazio inferiore a S_n; essi formano una piramide fondamentale. Dunque la figura degli $n+1$ punti dati nel piano è la proiezione di infinite piramidi fondamentali di S_n.

Si comprende ancora meglio il teorema duale. Date $n+1$ rette sul piano che non passano per un solo punto, per ciascuna di esse facciamo passare uno spazio S_{n-1} in S_n; gli $n+1$ spazî S_{n-1} così ottenuti determinano una piramide fondamentale di S_n, di cui la figura delle $n+1$ rette non è che una sezione della piramide fatta col piano S_2. È evidente che la stessa dimostrazione vale anche per ogni configurazione di $n+1$ punti o di $n+1$ spazî S_{r-1} in uno spazio S_r, purchè sia $r<n$ e $r>o$. Si vede che da una piramide fondamentale di S_n non si deducono soltanto con proiezione o sezione tutte le *specie* di configurazioni di $n+1$ punti o di $n+1$ spazî S_{r-1} di S_r, ma anche tutte le configurazioni di s punti, dove è $r<s<n+1$. Infatti se per es. lo spazio S_{n-r-1} che proietta la piramide fondamentale in S_r passa per $n-s+1$ dei vertici di essa, è chiaro che la proiezione si comporrà soltanto di s punti.

Oss. II. Lo studio delle configurazioni di un numero finito di punti e rette nel piano, di punti, rette e piani in S_3, ecc., diventa con questo teorema più semplice e più intuitivo.

Per determinare tutte le configurazioni di $n+1$ punti del piano o del nostro spazio basta trovare tutte le posizioni di uno spazio S_{n-3}, o S_{n-4} rispetto ad una piramide fondamentale di S_n. Da queste diverse posizioni per es. di S_{n-3} proiettando sopra un piano S_2 che non incontra S_{n-3} si avranno tutte le configurazioni richieste.

Possiamo dire subito che se dagli $n+1$ punti della piramide fondamentale in S_n si vogliono ottenere $n+1$ punti della retta, del piano o dello spazio S_3, bisogna che gli spazî proiettanti non abbiano nessun punto comune con gli spigoli di quella piramide. Se per es. lo spazio proiettante S_{n-3} sul piano S_2 avesse un punto comune con lo spigolo 12, esso determinerebbe con questo spigolo uno spazio S_{n-2}, che incontrerebbe il piano S_2 in un solo punto, e si avrebbe allora in esso una configurazione di n punti.

Osservo poi un'altra cosa che facilita la ricerca delle posizioni degli spazî proiettanti rispetto alla piramide fondamentale di S_n, e cioè che invece di proiettare direttamente per es. da uno spazio S_{n-3} sopra un piano, si ottiene lo stesso risultato proiettando successivamente da un punto sugli spazî successivamente inferiori a S_n sino a che si arriva al piano. Tutti i punti di proiezione determinano lo spazio S_{n-3}. In questa guisa il problema di determinare le posizioni speciali dello spazio S_{n-3} rispetto alla piramide di S_n si risolve nel determinare le posizioni speciali dei centri di proiezione rispetto ad essa e alle sue successive proiezioni. Così si ha anche il vantaggio di studiare nel medesimo tempo le posizioni speciali di tutti gli spazî proiettanti la piramide negli spazi inferiori ad S_n, e quindi anche in S_3 [1]).

---

3) Con questo metodo abbiamo studiato un'estesa classe di configurazioni in S_2 e S_3 nella nostra memoria «Intérpretations géom. de la théorie des substitutions de n lettres. Annali di Matematica, 1883.

AGGIUNTA

Primi principii di geometria analitica a n dimensioni.

194. Come si parte dalla geometria elementare ordinaria per stabilire la geometria analitica del piano e dello spazio a tre dimensioni, in modo analogo si può svolgere la geometria analitica dello spazio a n dimensioni. Qui accenniamo soltanto i primi principî.

Date n rette indipendenti in S_n passanti per un punto (*origine*), esse determinano *un sistema di assi coordinati Cartesiano*, che è *ortogonale* quando le rette sono due a due perpendicolari, il che è possibile (teor. VIII, 168). Un punto P_0 è determinato dagli n segmenti paralleli agli assi coordinati passanti per P_0, considerati dal punto P_0 fino al punto d'intersezione cogli spazî a $n-1$ dimensioni (*coordinati*) determinati dai rimanenti assi (teor. II, 158). Le lunghezze di questi segmenti si chiamano *coordinate* del punto P_0, e si indicano con $x_1, x_2, ..., x_n$.

Basandosi su teoremi precedenti si trova facilmente che la distanza fra due punti di coordinate x_i e x'_i $(i=1, 2, ... n)$ nel sistema ortogonale è

$$\delta = \sqrt{\Sigma(x_i - x'_i)^2}. \qquad (1)$$

Se uno dei punti cade nell'origine, indicando con $\alpha_1, \alpha_2, ... \alpha_n$ gli angoli che un raggio forma cogli assi, e quindi anche del raggio parallelo condotto dall'origine al raggio dato (oss. II, 169) si ha:

$$\Sigma \cos^2 \alpha_i = 1 \qquad (2)$$

Le formole di trasformazione fra un sistema obliquangolo e un sistema ortogonale colla stessa origine sono:

$$x_i = \Sigma x'_i \cos \alpha_i \qquad (3)$$

e quindi si stabiliscono facilmente le relazioni fra due sistemi Cartesiani qualunque.

Scelto uno spazio parallelo ad uno degli spazi coordinati, ad es. $(x_2 ... x_n)$ (def. I, 166), i suoi punti soddisfano alla relazione

$$x_1 = p \qquad (4)$$

e inversamente una tale relazione (equazione) rappresenta uno spazio parallelo allo spazio coordinato suddetto.

Con una trasformazione da un sistema obliquangolo ad un sistema ortogonale di cui un asse è perpendicolare ad uno spazio S_{n-2} dato, facendo uso delle formole (3) si trova che la sua equazione rispetto al sistema obliquangolo è

$$\Sigma\, x_i \cos\alpha_i - p = o \qquad (5)$$

Facilmente si dimostra colle formole di trasformazione che un'equazione di 1° grado nelle coordinate (variabili) rappresenta uno spazio S_{n-1}.

Dati n spazi indipendenti, si presenta il problema della determinazione

delle coordinate del punto d'intersezione degli n spazî, le quali sono le soluzioni comuni alle n equazioni lineari che rappresentano gli n spazî dati.

Introdotto il sistema Plückeriano nel quale uno spazio è determinato da n coordinate u_i, cioè dai valori inversi negativi dei segmenti che lo spazio S_{n-1} determina sugli assi coordinati a partire dall'origine.

Uno spazio S_m in S_n può essere determinato da $m+1$ punti o da $m+1$ spazî S_{n-1} indipendenti (coroll. teor. III, 157 e teor. II, 159), e analiticamente sia nell'uno come nell'altro caso esso viene rappresentato da $m+1$ equazioni lineari secondo che le variabili sono coordinate di punti o coordinate di spazî a $n-1$ dimensioni. Un'equazione a n variabili ha così una doppia rappresentazione geometrica. In questa doppia rappresentazione geometrica riposa il principio di dualità.

Scelta una piramide fondamentale di riferimento per coordinate di un punto P_0 s'intendono $n+1$ grandezze (lunghezze) x_i tali che

$$\rho\, x_i = \mu_i \,.\, p_i \qquad (6)$$

dove μ_i sono costanti arbitrarie diverse da zero, e p_i le distanze normali condotte dal punto alle facce della piramide.

Analogamente le coordinate di uno spazio S_{n-1} soddisfano (oss. I, 169) alle relazioni

$$\sigma\, u_i = \lambda_i \,.\, q_i \qquad (7)$$

dove λ_i sono costanti arbitrarie diverse da zero e q_i le distanze normali dei vertici della piramide fondamentale dallo spazio dato.

Stabilite le formole di trasformazione fra il sistema cartesiano e l'ultimo sistema e con un'opportuna scelta delle costanti in (6) e (7) si trova la condizione acciocchè un punto x_i sia situato in un spazio u_i, cioè

$$\Sigma\, u_i\, x_i \equiv o \qquad (i = 1, 2,.,. n+1). \qquad (8)$$

Dati $m+1$ punti indipendenti di coordinate $x^{(k)}{}_i$ $(k = 1, 2,\ldots, m+1)$, le coordinate di ogni punto dello spazio S_m da essi determinato si mettono sotto la forma:

$$\rho\, x_i = \Sigma\, \lambda_{(k)}\, x^{(k)}{}_i$$

ove λ_k sono k parametri.

Stabiliti i sistemi di riferimento, come nella geometria descrittiva si stabiliscono i metodi di rappresentazione [1]), si procede ora adoperando l'uno ora l'altro sistema di coordinate secondo le questioni che si vogliono trattare. D'altronde basta osservare che il sistema Cartesiano si ottiene dall'ultimo sistema quando una delle facce a $n-1$ dimensioni della piramide fondamentale cade all'infinito.

Basta questo rapido cenno per far rilevare la natura tutta geometrica dei nostri spazî [2]).

195. *Proiettività assoluta.*

Se sono dati quattro punti sulla retta assoluta (ip. I, 18) le cui distanze

---

1) Vedi A. Geom. descrittiva a quattro dimensioni Atti R. Istit. Veneto 1882.

2) Vedi pref.

dall'origine sono rappresentate dai numeri ξ_1, ξ_2, ξ_3, ξ_4, per rapporto anarmonico dei quattro punti s' intende la funzione

$$\frac{\xi_1 - \xi_3}{\xi_2 - \xi_3} \cdot \frac{\xi_2 - \xi_4}{\xi_1 - \xi_4} = \Delta \qquad (1)$$

Dato Δ e dati ξ_1, ξ_2, ξ_3, possiamo calcolare ξ_4 mediante le operazioni fondamentali applicate un numero finito di volte, si ha cioè:

$$\xi_4 = \frac{\xi_3(\Delta\xi_1 - \xi_2) + \xi_1\xi_2(1 - \Delta)}{\xi_3(\Delta - 1) + \xi_1 - \xi_2\Delta}$$

Basta considerare pel nostro scopo quei numeri infiniti e infinitesimi formanti coi numeri finiti un gruppo che ci trasforma in sè medesimo nel senso del teor. *m* del n. 93 dell'introduzione, come abbiamo supposto pei segmenti nell'oss. I del n. 16. Valgono del resto le stesse considerazioni per tutta la classe dei numeri da noi trovata.

Ebbene, siccome le operazioni fondamentali sono a senso unico e variando i loro oggetti variano anche i loro risultati, così variando ξ_3 varia anche ξ_4, e ξ_4 può essere un numero finito o infinito o infinitesimo del gruppo suddetto.

È chiaro dunque che essendo date tre coppie di elementi di due serie ξ_1, ξ'_1 ; ξ_2, ξ'_2 : ξ_3, ξ'_3, ad un elemento ξ_4 corrisponde un determinato elemento ξ'_4, in modo che:

$$\frac{\xi_1 - \xi_3}{\xi_2 - \xi_3} \cdot \frac{\xi_2 - \xi_4}{\xi_1 - \xi_4} = \frac{\xi'_1 - \xi'_3}{\xi'_2 - \xi'_3} \cdot \frac{\xi'_1 - \xi'_4}{\xi'_2 - \xi'_4} \qquad (2)$$

L'equazione della proiettività è come ordinariamente:

$$\alpha\xi\xi' + \beta\xi + \gamma\xi' + \delta = o \qquad (3)$$

ove α, β, γ, δ dipendono da ξ_1, ξ_2, ξ_3, ξ'_1, ξ'_2, ξ'_3. È facile vedere che anche in questo caso la corrispondenza proiettiva fra serie continue di elementi sulla retta è continua e reciproca. Difatti da (3) si ha:

$$\xi' = -\frac{\beta\xi + \delta}{\alpha\xi + \gamma}, \quad \xi'_1 = -\frac{\beta(\xi + \varepsilon) + \delta.}{\alpha(\xi + \varepsilon) + \gamma}$$

La differenza è

$$\frac{\beta\xi + \delta}{\alpha\xi + \gamma + \alpha\varepsilon} + \frac{\beta\varepsilon}{\alpha\xi + \gamma + \alpha\varepsilon} - \frac{\beta\xi + \delta}{\alpha\xi + \gamma}$$

la quale, se ε diventa più piccolo di ogni numero del gruppo, ha per lim. assoluto lo zero, e quindi a due elementi $\xi\xi_1$ indefinitamente vicini corrispondono due elementi $\xi'\xi'_1$ pure indefinitamente vicini.

Si ha dunque:

Si può stabilire la proiettività di due punteggiate indipendenti dall' ass. V. d' Archimede.

APPENDICE

Studio storico e critico dei principii della geometria.

Siccome in queste, più che in altre ricerche è necessario uno studio particolareggiato delle opere altrui, così abbiamo creduto opportuno, specialmente per la scuola di magistero, di raccogliere qui le nostre osservazioni sui principali lavori sui fondamenti della geometria, a preferenza su quelli pubblicati in questo secolo; completando così la prefazione e le note del testo stesso, e facendo conoscere le idee che dominarono fin quì in questi argomenti, come si svolsero, quale sia la loro importanza e quali le loro difficoltà. Un tale studio non è veramente la cosa più facile, quando si tratta non di una semplice esposizione di un solo lavoro, ma di un raffronto fra molti lavori esposti con metodi talvolta disparatissimi; e quando si tratta, come qui, di dovere non di rado criticare. Noi non abbiamo però l'intenzione di fare uno studio storico critico completo di questi lavori, ma di accennare soltanto i punti più importanti o che possono dar luogo a ulteriori discussioni scientifiche. Sarebbe bene però specialmente pei giovani, che questo lavoro fosse fatto; come in generale per tutti gli argomenti importanti delle matematiche moderne. Dalla storia ben fatta di un argomento si può meglio intravvederne l'ulteriore sviluppo e la sua connessione con altre teorie.

S'intende che qui non ripeterò le osservazioni generali della prefazione, che il lettore dovrà tener presente. Mi giustifico anzi fin d'ora se forse ho discussi più spesso i difetti che i pregi delle opere altrui, sebbene esse meritino per altri titoli la stima e talvolta la più schietta ammirazione.

La critica imparziale ed attenta, così nelle matematiche come in ogni altra speculazione scientifica, è strumento efficace nella ricerca del vero, perchè il notare gli errori rende più difficile che si rinnovino e più facile la via nell'eliminarli. Ma siamo altresì pienamente convinti del valore che hanno tutti i lavori coscienziosi in questa difficile questione, anche se non sempre raggiungono il rigore e lo scopo desiderato in ogni particolare, imperocchè la scienza matematica, e specialmente la geometria, anche nei principî procede e si perfeziona per gradi. Crelle disse che nello stabilire i principî della geometria non vi sono minori difficoltà che nello svolgimento delle teorie più complicate: «queste sono rivolte verso l'altezza, quelle verso la profondità;

ed altezza e profondità sono ugualmente illimitate ed oscure»[1]. Certo è che le difficoltà che s'incontrano nella seconda direzione richieggono un tempo ed una costanza molto maggiori che nelle ricerche superiori, ove un'idea nuova e feconda può condurre presto a importantissimi risultati. Esprimere invece delle idee sui fondamenti vale poco o nulla se non si mostra che effettivamente esse possono attuarsi. Mettere sotto una nuova forma anche un vecchio principio in guisa da far risaltare alcune sue relazioni con altre teorie è già un progresso; onde questi lavori non vanno tanto giudicati per i difetti che eventualmente contengono quanto principalmente per i risultati e i miglioramenti effettivamente ottenuti e le idee sulle quali si appoggiano. E poichè un autore nulla deve pubblicare senza la convinzione di avere ottenuto qualche vantaggio; trattandosi in questi argomenti di proprietà in gran parte note, così mi pare opportuno che l'autore giustifichi egli stesso la sua convinzione acciò il lettore possa meglio giudicare i suoi risultati, senza per questo menomare i meriti altrui.

Nel giudicare però i difetti stessi bisogna tener conto che ve ne sono di diverse specie, e non sempre della stessa importanza; che vi sono anche errori i quali non dipendono da leggerezza del pensatore ma dal momento storico della scienza, e che tali errori furono e sono utili nel senso che mettono gli altri sulla traccia della verità. Gauss ad es. ha manifestato pubblicamente l'opinione dell'impossibilità della dimostrazione del postulato V di Euclide in seguito alla critica da lui fatta ad alcune dimostrazioni di questo postulato[2]. S'intende che l'errore, specialmente in questi lavori, deve essere evitato; ma bisogna distinguere errore da errore. Non si può poi disconoscere che nella ricerca si bada, e si deve badare da principio, più alla fecondità delle idee nuove, che a circoscriverne bene il campo di validità, come del resto dimostra chiaramente lo svolgimento storico della scienza; e sarebbe quindi ingiusto togliere ogni merito a coloro che seminano il campo d'idee feconde, e che altri va poi depurando dalle erbe cattive; anzi dico il merito principale, imperocchè senza nuove idee nessuna scienza ha mai progredito. Per dare un esempio, nelle «Geometrische Untersuchungen» di Lobatschewsky vi sono due difetti non piccoli; l'uno che egli si appoggia tacitamente sulla retta infinita, in modo da lasciar credere che oltre alla geometria Euclidea non esista che il suo sistema; l'altro che egli non ha reso evidente l'indimostrabilità del postulato V di Euclide. Così Euclide non ha dimostrato la possibilità del suo postulato, per quanto lo svolgimento della sua geometria la confermi; e, come abbiamo già osservato nella prefazione, egli deduce delle conseguenze che non derivano dai suoi principî, nella forma in cui sono dati. Egli è ben certo che si deve cercare di evitare ogni errore, anche di forma, ma sarebbe ridicolo il dire che per questo Euclide e Lobatschewsky hanno fatto della poesia, come sarebbe assurdo contrastare il grande impulso che questi lavori fondamentali hanno dato alla scienza geometrica.

---

1) Giorn. di Crelle vol. 45. Zur Theorie der Ebene. Questa memoria fu letta all'Acc. di Berlino nel 1834.

2) Gött. Gelehrte Anzeigen, 1816

Abbiamo insistito su di ciò perchè vi è anche una critica la quale crede di poter demolire i lavori degli altri soltanto perchè vi è qualche difetto, non importa di qual natura, e alla quale basta che un teorema ammetta un caso di eccezione, che una teoria contenga qualche conseguenza sbagliata per dichiararli falsi, senza badare che il teorema negli altri casi e la teoria senza la conseguenza suddetta possono essere anche di un' importanza capitale per la scienza. Questa critica esagerata, anche quando è fatta in buona fede, non può avere che degli effetti perniciosi pei giovani che si cimentano con ardore nelle pacifiche lotte del pensiero, perchè li abitua ad un scetticismo funesto verso sè e verso i proprî maestri.

Così non è utile quella critica che trova tutto da lodare, oppure si trattiene per un esagerato sentimento di delicatezza di rilevare anche i difetti, quando essi meritino menzione. E non possiamo neppure approvare quella critica che vuole attribuire ad ogni costo ai grandi uomini ciò che spetta agli altri, e va a questo scopo interpretando a modo suo ogni frase ed ogni pensiero loro per trovare appoggio alle sue asserzioni. Noi pure vogliamo che nella storia della scienza si tenga conto delle idee appena accennate; ma sarebbe ingiusto attribuire una teoria ad un autore, solo perchè appena vi si trova per incidenza qualche idea o qualche caso speciale. Non bisogna dimenticare che di nessuna teoria si può dire: *Prolem sine matre creatam.* Così dicasi di quella critica, la quale trattando per es. di Euclide vuole attribruire gli errori, o quelli che si credono tali, dei suoi libri senza una prova certa a cattivi traduttori o a commentatori poco fedeli, soltanto perchè ciò sembra più glorioso per lui. La gloria di Euclide non diminuisce per questo anche se nei suoi famosi Elementi vi sono non pochi difetti. Bisogna guardarsi anche nei proprî giudizî da un mal' inteso sentimento di nazionalità, poichè se si comprende come sia piacevole e doveroso di rilevare il valore dei proprî compatriotti, specialmente quando questo non è conosciuto dagli stranieri, questo sentimento non deve però far velo a pregiudizio della verità. L'imparzialità deve andare sempre sopra ad ogni altro sentimento e sopra ad ogni altra considerazione personale. La critica vuol essere alta, serena, coscienziosa, coll'animo verso il bene; deve combattere l'errore nell'unico interesse della scienza, ma deve pure riconoscere i meriti acquisiti e l'importanza e la fecondità delle idee o dei risultati altrui. La critica fatta così, può anche cadere in qualche errore di interpretazione o di giudizio, ma non solo deve essere rispettata ma eziandio incoraggiata; coloro che mal tollerano anche questa critica mostrano di non avere uno spirito superiore, e di essere più amanti di sè che della scienza.

Per l'indole stessa, di questo trattato tralascio di parlare di tanti opuscoli o libri che si occupano degli assiomi geometrici dal punto di vista filosofico; a certi giudizî dati veramente con molta leggerezza e poca o nessuna conoscenza dell'argomento, che talvolta dal campo filosofico si spingono entro il recinto matematico della questione, risponde il mio libro da sè. Nemmeno mi intrattengo di quei lavori di matematici nei quali si discorre degli assiomi geometrici troppo in generale e indeterminatamente perchè si possa dar loro qualche valore nella storia dell'importante questione; quantunque tanto gli uni

che gli altri contengano spesso osservazioni giuste e sottili, e sia utile la loro lettura. Così non ci occupiamo qui espressamente dei trattati di geometria elementare; di alcuni fra i migliori abbiamo già parlato talvolta nella prefazione e nelle note del testo; come pure escludiamo quei lavori che riguardano i principî dei metodi geometrici; ci occupiamo invece di quelli che riguardano i principî della geometria in sè, ma non di quelli che pur occupandosi di questioni elementari non hanno per scopo precipuo i principî stessi.

In questo studio non seguiamo rigidamente nessun ordine prestabilito, ci regoliamo secondo il caso; però anzichè all'ordine cronologico badiamo più alla divisione dei lavori in gruppi secondo le idee in essi prevalenti.

Sino alla fine del secolo scorso nessuno ha posto mai in dubbio la validità degli assiomi di Euclide, e si può dire che nessuno si allontanò mai dalle idee e dal metodo del grande geometra greco nella trattazione degli Elementi. I tentativi di dimostrazione del postulato delle parallele risalgono a tempi remoti. Gemino, Proclo, Tolomeo, l'arabo Nassaradin e Clavio furono certo fra i primi in questi tentativi [1]). Ma non è a credere che fino al principio di questo secolo non si sia sentito il bisogno di una riforma nei principî della matematica e della geometria. Archimede considerò la retta come la linea più corta compresa fra due punti. Questa proprietà come definizione della retta viene oggidì giustamente combattuta da molti geometri, perchè contiene un concetto analitico molto complesso [2]). Ma il grande siracusano ha dato con un postulato questa proprietà della retta senza voler definire con essa la retta stessa; sebbene contro il postulato si possano fare analoghe osservazioni. Tale definizione fu poi peggiorata dal celebre Legendre col dire che la retta è il più corto cammino fra due punti, potendosi intendere per cammino non la linea ma la sola lunghezza della linea [3]).

Leibniz, sommo filosofo, e matematico, si occupò con molto amore anche del nostro problema, cercando di dimostrare alcuni assiomi di Euclide e proponendo varie definizioni per la retta e per il piano [4]).

Egli definisce ad es. il piano dopo aver definito la sfera come luogo dei punti equidistanti da due punti dati A e B, e la retta come il luogo dei punti

---

1) M. Cantor: Vorlesungen über Gesch. der Math. pag. 358; H. Hankel: Zur Gesch. der Math. p. 272; Clavius: Euclidis Elementorum, Francoforte; 1654, pag. I, 29-30. Si fa spesso ad Euclide l'appunto di aver confuso gli assiomi sulle quantità cogli assiomi geometrici, e difatti in molte traduzioni si dà al postulato delle parallele il numero XI, in altri il numero XII. Nell'edizione greca pubblicata con una traduzione latina da Heiberg (l.c.) i primi assiomi sono chiamati *nozioni comuni*, mentre i postulati sono separati da esse e sono in tutto cinque.

Fra le nozioni comuni vi è l'assioma VIII, cioè «due cose che coincidono sono uguali» al quale non si sa veramente che significato Euclide abbia voluto attribuire, mentre poi fa uso del principio del movimento dei corpi rigidi fin dalla IV prop. del libro I. L'appunto suddetto va fatto invece senza dubbio al Legendre che nei suoi Éléments de géométrie mescola gli assiomi delle quantità cogli assiomi geometrici.

2) De sphoera et Cylindro. Vedi a tal proposito: Du Bois Reymond: Erleuterungen zu den Anfangsgründe der Variationsrechnung-Math. Ann. XV, 1879.

3) Hoüel. (Essai critique sur les principes fondamentaux de la géométrie; Paris, 1882) osserva giustamente che gli autori che danno una tale definizione della linea retta per coerenza dovrebbero dare per definizione del piano il postulato III di Archimede, e cioè: la superficie piana è più piccola di tutte quelle che sono terminate dal medesimo contorno

4) Leibnizens math. Schriften, herausg. v. G. J. Gerhardt, Berlin, 1849 Vol. 5.—Caracteristica geometrica. — Analysis geometrica propria. — III. De analysi situ IV. In Euclidis πρωτα.

equidistanti da tre punti A,B,C. Si vede dunque che anche Leibniz ebbe l'idea di generare il piano e la retta mediante la sfera [1]). Considerò anche la retta come la linea i cui punti non si nuovono tenendo fissi due dei suoi punti, definizione già nota prima di Leibniz. Ma le definizioni di cui egli fa più spesso uso sono queste: il piano è quella superficie che divide lo spazio in due parti congrue, e la retta è invece la linea che divide il piano in parti congrue [2]).

Per figure congrue intende quelle che sono uguali e simili. Queste figure sono identiche nel senso nostro, ma non sono sempre dirette nel medesimo verso, sebbene poi nella definizione di esse Leibniz aggiunga che si possono sostituire in ogni luogo (s'intende nello spazio a tre dimensioni) [3]). L'uguale lo riferisce all'area o al volume, o come diciamo noi alla grandezza intensiva, e il simile alla forma.

V. Giordano gli osserva però giustamente che la linea che divide il piano nel modo suddetto potrebbe essere anche curva [4]).

Leibniz fa una critica delle definizioni e degli assiomi di Euclide, ma egli tenta invano di dimostrare ciò alcuni assiomi. Egli crede ad es. di dimostrare il postulato delle parallele e riporta alcune dimostrazioni di Proclo non sempre soddisfacenti.

Il P. Saccheri, professore all'università di Pavia, ci lasciò nel 1733 un libro molto importante sui tentativi da lui fatti su questo proposito [5]), e che fu messo in luce dal prof. Beltrami [6]). L'A. considera nel piano un quadrangolo $ABCD$ con due angoli retti in A e B, i cui due angoli in C e D sono uguali e possono essere retti, ottusi od acuti. Le ipotesi risultanti da questi tre casi le chiama ipotesi dell'angolo retto, dell'angolo ottuso e dell'angolo acuto, e dimostra che se in un solo caso è vera una delle tre ipotesi, è vera in ogni altro caso (prop. V, VI e VII). Dimostra poi che nel triangolo rettangolo la somma dei due angoli non retti è uguale a un retto nell'ipotesi dell'angolo retto, minore di un retto nell'ipotesi dell'angolo acuto e maggiore di un retto in quella dell'angolo ottuso (prop. IX). E ancora: se in un triangolo qualunque ABC la somma degli angoli è uguale, minore o maggiore di due retti valgono rispettivamente le ipotesi dell'angolo retto, acuto ed ottuso (prop. XV); e quindi, per la prop. IX, ciò vale per ogni triangolo. Qui evidentemente il P. Saccheri dimostra il teorema dato molto tempo dopo da Legendre, e cioè che se in un triangolo la somma degli angoli è uguale a due retti, tale è pure in ogni altro triangolo.

---

1) Vedi anche la lettera a Hugens l. c. vol. II, pag. 20.

2) l. c. vol. II, pag. 174 e la lettera a V. Giordano, vol. I, pag. 196.

3) l. c. vol. V pag. 172.

4) Vol. I pag, 198. Vitale da Bitonto fu lettore di matematica nella Sapienza di Roma. Nel suo *Archimede* definisce la retta come la «linea revoluta intorno ai suoi estremi immoti, le di cui parti ritengono sempre il medesimo sito di prima; ritiene però ottima la definizione di Euclide, ma nel suo *Euclide restituto* (Roma 1686) fa uso della definizione secondo la quale la retta è la più breve fra due punti, perchè più facile all'intelligenza degli inesperti (l. c.).

5) Euclides ad omni nævo vindicatus ecc. Mediolani 1733.

6) Un precursore italiano di Legendre e di Lobatschewsky: Rend. dell'Acc. dei Lincei, marzo 1889. Recentemente P. Mansion si è occupato pure di questo libro importante (Annales de la Societé scientifique de Bruxelles. 1891). Questo mio cenno serve anzi a completare in qualche parte le critiche suddette ed è da esse completato.

Da questo breve cenno appare manifesto come il Saccheri avesse intravveduto la teoria delle parallele in tutta la sua generalità, mentre Legendre, Lobatschewsky e G. Bolyai hanno escluso a *priori* senza saperlo l'ipotesi dell'angolo ottuso, o l'ipotesi Riemanniana. Ma il P. Saccheri vittima del preconcetto del suo tempo, secondo il quale la sola geometria possibile era l'Euclidea, nonostante una discussione sottile, e tanto più efficace in quanto è condotta col metodo Euclideo, si affaticò ad abbattere colle proprie mani l'edifizio che egli stesso aveva innalzato, vale a dire a dimostrare la falsità delle sue due nuove ipotesi.

Per la prima vi riesce facilmente per un errore fondamentale contenuto nelle sue considerazioni su questa ipotesi, che s'incontra nella prop. XIII, nella quale dimostra che se (AC) e (BD) sono perpendicolari alla retta AB in A e B e gli angoli in C e D sono retti, ottusi od acuti, (CD) è uguale o minore o maggiore di (AB). Nella dimostrazione del secondo caso, che corrisponde appunto all'ipotesi dell'angolo ottuso fa uso della prop. XVI del 1° libro di Euclide, e cioè che un angolo esterno del triangolo è maggiore di ciascuno degli interni opposti, la quale esclude appunto l'ipotesi dell'angolo ottuso. E nella dimostrazione della falsità di questa ipotesi (prop. XIV) si appoggia alla prop. XVII del 1° libro di Euclide, cioè che due angoli di un triangolo hanno una somma minore di due retti; la quale dipende dalla XVI sopra citata. Egli fa uso di questa prop. anche negli altri due casi, e quindi toglie molta generalità alle sue considerazioni, poichè essa è una proprietà dipendente dalla retta infinita.

Ma le conseguenze che se in un solo caso l'ipotesi dell'angolo ottuso è vera essa vale in ogni caso; che se in un triangolo la somma è maggiore di due retti lo è in tutti gli altri, sono dimostrate con qualche imperfezione, facile a togliersi, e tanto più restano dimostrate le proprietà relative alle altre due ipotesi.

L'A. non ha sottoposto fin da principio ad alcun esame l'assioma che una retta è determinata da due dei suoi punti; ma in fondo se con questo assioma viene esclusa la prima forma Riemanniana rimane possibile la seconda.

La dimostrazione della falsità dell'ipotesi dell'angolo acuto non riesce al Saccheri così facile come quella dell'angolo ottuso, ma prima di dimostrarne la falsità svolge considerazioni molto simili ad alcune altre di Lobatschewsky. Il difetto in questa dimostrazione, come osserva il Beltrami, sta specialmente nella prop. XXXVII, ove il Saccheri tenta dimostrare la falsa proposizione che la curva CBD, luogo degli estremi delle perpendicolari di data lunghezza erette sul segmento rettilineo (AB) nell'ipotesi dell'angolo acuto, è uguale alla base opposta (AB); il che ammette implicitamente l'ipotesi dell'angolo retto.

Da questo breve resoconto risulta dunque che se il Saccheri non fu un grande innovatore della scienza geometrica, egli fu un vero precursore di Legendre, di Lobatschewsky e di Riemann.

I tentativi per dimostrare il postulato V di Euclide continuarono; fra questi notiamo quelli di Bertrand di Ginevra e di Legendre [1]. Questi nei suoi

1) Bertrand: Développement nouveau de la partie élém. des math. Génève: 1778, Vol. II. 17-19.

Éléments de géométrie, stampati la prima volta a Parigi nel 1794, credette dalla 3ª fino all'8ª edizione di avere esposto la teoria delle parallele senza alcun postulato speciale. Accortosi però che la sua dimostrazione non era scevra da errori tornò nella 9ª edizione al suddetto postulato, ma nella 12ª e altrove sostenne nuovamente di aver potuto dare con ulteriori riflessioni la desiderata dimostrazione [1]).

Gli sforzi quantunque vani dei matematici, e specialmente di Legendre, nella dimostrazione del postulato Euclideo devono aver influito senza dubbio a richiamare l'attenzione dei geometri sullo spinoso argomento. E difatti, come dicemmo fu Gauss il primo che esaminando alcune dimostrazioni di questo postulato ha espresso l'opinione che esso non sia dimostrabile. Questa idea è ripetuta anche nella lettera scritta a Bessel il 27 genn. 1829, ma l'idea concreta di una conseguente geometria senza il postulato suddetto si trova solo nelle lettere a Schumacher dal 1831 al 1846 [2]). Dalla lettera scritta a Bolyai nel 1799 e riportata da Schering, in cui domanda a V. Bolyai notizia dei lavori di questo sui principî della geometria, non risulta effettivamente che Gauss si occupasse allora della geometria non Euclidea. Fino a prova contraria non possiamo dunque dire che Gauss si sia occupato prima di Lobatschewsky di una tale geometria, tanto più che per quanto sappiamo nessun scritto del sommo matematico fu pubblicato dopo la sua morte su questo argomento [3]). Noi crediamo perciò nostro dovere di attribuire la priorità della teoria col postulato delle due parallele al geometra russo, il quale svolse una tale geometria col metodo puramente geometrico, scegliendo però come si è detto l'ipotesi della retta infinita, dalla quale, escluso il postulato delle parallele di Euclide, risulta che per un punto si possono condurre due parallele ad una retta data [4]). Nella memoria di lui stampata nel giornale di Crelle conclude che la geometria immaginaria è concepita sopra un piano più generale di quello della geometria ordinaria, che questa è un caso particolare della prima, ed è la sua geometria differenziale; che i valori degli elementi differenziali delle linee curve, delle superficie e dei volumi dei corpi sono gli stessi nella geometria immaginaria e in quella ordinaria. Nelle «Geometrische Un-

---

1) Pref. alla 1ª edizione. Réflexions sur différentes manières de démontrer la théorie des paralleles, Mém. de l'Ac. Paris; 1833. Degli Elementi di Legendre, nonostante alcuni pregi e nuovi concetti importanti ecco cosa dice Hoüel: «Legendre, trascinato dall'esempio dei suoi contemporanei, non ha saputo conservare in tutta la sua purezza i metodi veramente geometrici degli antichi, e li ha profondamente alterati, mescolando i procedimenti aritmetici dell'analisi moderna (l. c. pag. 5). Si può anche aggiungere che non sempre nelle dimostrazioni vi è lo stesso rigore che si riscontra in Euclide.

2) La corrispondenza con Schumacher relativa a questo argomento fu tradotta in francese da Hoüel, e pubblicata nelle Mém. de la Societé des sciences di Bordeaux tom. v. 1869. Vedi Schering Gauss' Geburtstag nach Hundertjähriger Wiederkehr; 1877. Gauss zum Gedächtniss. v. Sartorius, v. Waltershausen; Leipzig 1856.

3) Notiamo anche che Volfango Bolyai fu in grande intimità con Gauss, mentre suo figlio Giovanni nulla disse nella sua celebre «Scienza assolutamente vera dello spazio» sulla priorità di Gauss in tale questione.

4) Le ricerche di Lobatschewsky furono stampate nel Corriere di Kasan del 1829, poi nelle memorie dell'università di Kasan degli anni 1836-37 sotto il titolo: *Nuovi principî di geometria, con una teoria delle parallele*; poi nel Giorn. di Crelle del 1837 sotto il nome di *Geometria immaginaria* e ancora nel 1840 nei suoi *Studî di geometria sulla teoria delle parallele* pubblicati a Berlino nel 1840, e finalmente nella *sua Pangeometria* stampata nel 1855 a Kasan, la quale fu tradotta in italiano da Battaglini nel suo giornale e a parte (2 ed. Napoli 1814) e in francese da Hoüel l. c.

tersuchungen » ottiene pure il risultato che la geometria dell' orisfera è identica a quella del piano ordinario. Egli aggiunge che non vi è altro mezzo oltre alle osservazioni astronomiche per decidere sull'esattezza della geometria ordinaria; che la differenza delle somma degli angoli di un triangolo da due retti bisogna cercarla nei triangoli più grandi, e che questa somma nei triangoli astronomici più grandi da lui misurati non differisce neppure di un centesimo di secondo da due angoli retti. La geometria di Lobatschewsky anche se fosse vera nel mondo esterno non troverebbe dunque applicazioni che nelle osservazloni astronomiche, mentre per la pratica usuale basta e si deve preferire la geometria Euclidea.

G. Bolyai nel 1832 svolse la medesima idea [1]. È da osservare che col nome di scienza assolutamente vera, egli non intese dire che la geometria non Euclidea sia assolutamente vera, perchè con questo nome intende quella che comprende tutte e due queste geometrie. Egli dice infatti:

«Si ha dunque una *trigonometria piana a priori* nella quale il solo sistema stesso «rimane *ignoto*, e quindi solamente le grandezze *assolute* delle espressioni restano «incognite, però un *solo* caso noto fisserebbe manifestamente tutto il sistema. La «trigonometria sferica poi è stabilita assolutamente».

Soltanto non si può ritenere assolutamente vera perchè per lo meno Bolyai ammette la retta infinita.

Coi lavori dei due citati geometri si collega quello di Battaglini «Sulla geometria immaginaria» [2]. L' illustre autore stabilisce per via analitica il principio della nuova teoria delle parallele, sia per il piano che per lo spazio, e perviene in modo diverso alle relazioni tra le parti di un triangolo in questa geometria. Egli trova dapprima la funzione che esprime la rotazione colla quale da una data retta Ω_0 intorno ad un punto p in un piano P si passa ad una retta Ω_z. Analogamente per la rotazione di un piano dello spazio e dello scorrimento di un punto sulla retta. Egli introduce poi il concetto dei punti ideali di una retta dati su di essa da quelle passanti per un punto non comprese nell' angolo di parallelismo relativo al punto dato [3]; e ne enuncia alcune proprietà importanti.

L' idea di Leibniz di generare il piano e la retta colla sfera viene svolta in un nuovo indirizzo da V. Bolyai nell'esposizione dei principî della geometria [4]. Siccome non abbiamo potuto leggere le sue pubblicazioni ori-

---

1) Sulla scienza dello spazio assolutamente vera e indipendente dalla verità o dalla falsità dell'ass. XI di Euclide (giammai da potersi stabilire a priori) in appendice al trattato del padre «Tentamen jnventutem studiosam matheseos purae etc. Maros-Vásàrhely, 1832; trad. ital. di Battaglini, Napoli 2. ed. 1875; trad. franc. di F. Schmidt: Mèm. de la Soc. de Bordeaux t. V, e a parte; Paris, 1868. Veggasi anche Frischauf: Elemente der Abs. Geometrie nach G. Bolyai bearbeitet; Leipzig, 1872. Sui lavori di V. Bolyai veggansi le notizie date dal sig. Schmidt nella traduzione suddetta.

Ci è impossibile di constatare la parte di priorità in alcune questioni particolari che spetta a G. Bolyai in confronto di Lobatschewsky, imperochè non conosciamo le ricerche pubblicate in russo da questo geometra nel corriere di Kasan.

2) Rendiconti della R. Acc. di Napoli, giugno 1867.

3) Questo angolo è la metà di quello delle due parallele alla retta data condotte da un punto qualunque del campo finito del piano. Esso dipende dalla distanza del punto dalla retta.

4) l. c. e Kürzer Grundriss eines Versuchs: I Die Arit. etc. II In der Geometrie die Begriffe der Ger. Linie, der Ebene, des Winkels allgemein, der Winkellosen Formen etc. — Maros Wásárhely: 1851.

ginali, così ne riferiamo alcune notizie togliendole dall'opuscolo citato di Hoüel.

«Se A e B, A' e B' sono due sistemi di punti, si può immaginare che ciascuno «di questi sistemi faccia parte d'un sistema solido qualunque. Se si può trasportare «una di queste figure sopra l'altra in modo che posto A in A', B possa coincidere con «B', si dirà che le loro *distanze* sono *uguali*.

Dopo di che dà la definizione della sfera come quella superficie i cui punti sono *equidistanti* dal centro. «Una sfera separa lo spazio in due parti, l'una *interna* e «l'altra *esterna*. Un punto non può passare dall'una all'altra di queste parti senza «incontrare la sfera».

«Una sfera scorre su sè stessa facendola ruotare intorno al suo centro.

«Due sfere di centri differenti non possono coincidere. Con un centro dato si può «sempre descrivere una sfera passante per un punto dato.

«Si può con un centro dato descrivere una sfera che racchiuda nel suo interno «una figura data qualunque di dimensioni finite.

«Siano date due sfere S e S' di centri O e O', e tali che ciascuna di esse passi «per il centro dell'altra. Siccome ognuna di queste due sfere ha una parte interna «all'altra, esse avranno necessariamente dei punti comuni. Se A è uno di questi «punti, facendo ruotare l'insieme delle due sfere intorno ai due centri supposti fissi, esso «descriverà il luogo dei punti comuni alle due sfere. Questo luogo sarà una curva «chiusa C, che scorrerà su sè stessa e alla quale daremo il nome di *cerchio*.

«Se la figura ruota in modo che O venga in O' e O' in O, S coinciderà con S', «e S' con S. Per conseguenza, il cerchio C ricadrà nella prima sua posizione. Dunque «il cerchio è sovrapponibile a sè medesimo per rotazione.

«Coi centri O e O' descriviamo due altre sfere S_1, S'_1 uguali fra loro e inviluppanti rispettivamente le sfere S e S'. Ciascuno dei centri O e O' sarà interno alle «due sfere, onde si conclude facilmente che le due sfere, aventi una parte interna «comune, devono necessariamente incontrarsi. Si vede ugualmente che la loro intersezione è un nuovo cerchio C_1, che può scorrere su sè stesso, e sovrapporsi su sè «medesimo per rotazione.

«Se si costruiscono così due serie di sfere uguali, che si estendono in modo «continuo sino all'infinito, il luogo dei cerchi secondo i quali esse s'incontrano a «due a due, si estenderà indefinitamente, e formerà una superficie che può scorrere «su sè stessa, allorquando la si fa ruotare intorno ai punti O e O', ed è sovrapponibile a sè medesima per rotazione. Noi chiameremo questa superficie un *piano*.

«Quando si capovolge la figura ponendo O in O' e O' in O si può far sì che un «punto A del cerchio C ritorni nella posizione prima occupata. Da una parte e dall'altra di A, i punti del cerchio si disporranno a due a due gli uni sugli altri, e si «distribuiranno così simmetricamente rispetto ad A. Se si indicano con M e M' due «qualunque di questi punti simmetrici, essi potranno essere considerati come le posizioni simultanee di due mobili che partano da A e percorrano il cerchio in senso contrario. Questi si incontreranno necessariamente in un punto B, che con A divide il «cerchio in due metà sovrapponibili AMB, $AM'B$. Il ribaltamento della figura potrà «essere considerato come prodotto da una mezza rotazione attorno ai due punti A e «B, che nel ribaltamento restano immobili.

«Nella semirotazione della figura intorno ad A e B, ciascun punto m del «piano, appartenente al cerchio c, descrive una semicirconferenza, e si porterà in «un punto m' dello stesso cerchio; e fintanto che questo cerchio non si ridurrà ad un «punto unico non potrà ritornare alla sua primitiva posizione, se non quando avrà «compiuta la intera rivoluzione.

«Ora, in ogni cerchio c vi sono due punti che si trovano nella loro posizione «primitiva dopo la prima rotazione. Dunque questi punti hanno dovuto descrivere «due cerchi nulli, vale a dire essi non hanno cambiato posizione durante la rotazione.

«L'insieme di tutti questi punti forma una linea, che resta immobile allorquando

« la si fa ruotare intorno a due dei suoi punti, Questa linea si chiama *linea retta.* »

Con questo metodo e sempre mediante il movimento Bolyai dà le proprietà che la retta può scorrere su sè stessa, e che due rette coincidono quando hanno due punti comuni. Analogamente per le proprietà del piano.

Abbiamo riportati questi cenni del lavoro di Bolyai perchè sebbene, come Hoüel stesso osserva, questa teoria presenti dei punti oscuri (e davvero così come è esposta presenta molte lacune) la si incontra poi trattata da parecchi altri autori, che non hanno conosciuto questo lavoro di Bolyai. Non di rado succede in queste ricerche di vedere autori svolgere le stesse idee di altri, senza che lo sappiano e senza che cerchino di togliere i difetti e di colmare le lacune dei lavori precedenti; forse anzi aggiungendo nuovi errori e nuove lacune.

Lobatschewsky nella sua Pangeometria dichiara di aver preferito di incominciare la geometria con la sfera e col cerchio, definendo il piano come fa appunto Bolyai, e la retta come luogo geometrico delle intersezioni di due serie di cerchi uguali concentrici situati tutti in un piano. Egli non aggiunge però null'altro in proposito, nè sappiamo se in qualche altro lavoro precedente egli abbia fatto conoscere questo suo metodo.

Parleremo in seguito di questo indirizzo; intanto osserviamo che i due autori suddetti non partono dal concetto di distanza, ma da quello di coppia.

Chi ci ha dato per primo una discussione profonda sui principî della geometria fu il Riemann nella sua memoria « Ueber di Hypothesen die der Geometrie zu Grunde liegen » presentata per la sua abilitazione all'insegnamento nella facoltà filosofica dell'università di Gottinga [1]) nell'anno 1854 e pubblicata dopo la sua morte nel 1867. Questa memoria oltre che aver richiamata l'attenzione dei matematici sulle varietà ad n dimensioni e in ispecie su quelle a curvatura costante, nelle quali è compresa come caso particolare la varietà corrispondente allo spazio ordinario, ha accennato pure alla possibilità di un altro sistema di geometria nel quale la retta è finita, vale a dire che da un punto non si può condurre alcuna parallela ad una retta data, pur rimanendo inalterati gli altri assiomi di Euclide e senza contraddire alla esperienza attuale.

Riemann è oscuro nella definizione del concetto di grandezza. Egli parla di « *Aufeinanderlegen der zu vergleichenden Grössen* » (della sovrapponibilità delle grandezze da confrontarsi), e che il misurare richiede « *ein Mittel die eine Grösse als Massstab auf die andere fortzutragen* » (un mezzo per trasportare una grandezza quale scala su di un altra). Qui, siccome non dà altra spiegazione, adopera il concetto del movimento dei corpi rigidi in varietà puramente astratte. Egli parte pure dall'idea di continuità e del discreto senza definirli (I, 1), ma ammette poi tacitamente noto il continuo numerico e delle funzioni in generale (II, 2). L'*einfache ausgedehnte Mannigfaltigkeit* » (varietà semplicemente estesa) è distinta dal fatto che da un elemento (punto) è possibile

---

1) Abh. der Kön. Gesellschaft der Wiss. zu Göttingen. Vol. XIII, 1867. — B. Riemanns gesammelte Math. Werke; herausg. von H. Weber. Leipzig, 1879. Vedi trad. franc. di Hoüel negli Annali di Matematica vol. III, 1870..

un avanzamento (Fortgang) continuo e secondo due versi (Seiten), avanti e indietro. Come si vede questa non è astrattamente una definizione ben determinata, perchè manca la definizione di *versi*, e di *avanti* (vowärts) e *indietro* (rückwärts) e del *continuo*.

Egli parla poi di un «*veränderliches Stück*» (parte variabile) di una varietà ad una dimensione senza dire che cosa intenda per «Stück» di una tale varietà (I, 3).

Se Riemann avesse voluto determinare meglio i suoi concetti prima di ammettere il continuo numerico ($x_1, x_2, \ldots x_n$) e la continuità delle funzioni, che applica poi alla ricerca delle relazioni di misura in una varietà a n dimensioni, egli avrebbe dovuto, io credo, trasformare radicalmente tutti i primi paragrafi [1].

Dopo aver data la generazione di una varietà ad n dimensioni, dimostra che l'elemento di essa viene determinato da n grandezze continue indipendenti $x_1, x_2, .., x_n$, e inversamente n grandezze $x_1, \ldots x_n$ determinano un solo elemento della varietà. Egli suppone anche tacitamente che la corrispondenza fra gli elementi della varietà e il continuo aritmetico ($x_1, x_2, .., x_n$) sia continua, vale a dire che ad una variazione infinitesima dell'elemento corrisponda una variazione infinitamente piccola del continuo ($x_1, x_2, .., x_n$), e reciprocamente; intendendo per infinitesimo quello potenziale e non l'attuale.

Questa è in fondo la *prima* ipotesi di Riemann. Egli dichiara esplicitamente al capitolo II che carattere essenziale (wesentliches Kennzeichen) di una varietà ad n dimensioni è la determinazione dell'elemento per mezzo di n grandezze (coordinate). Il sig. G. Cantor ha invece osservato che questo carattere non basta perchè occorre eziandio la continuità della corrispondenza fra gli elementi della varietà e i sistemi di valori del continuo ($x_1, x_2 .., x_n$), imperocchè non ammettendola si può ridurre la determinazione dei singoli elementi della varietà ad una sola variabile o coordinata reale e continua; di guisa che senza la condizione suddetta il numero delle coordinate indipendenti reali e continue che servono alla determinazione unica e completa degli elementi di una varietà ad n dimensioni può essere ridotto ad un numero arbitrario di variabili [2]. Il sig. Netto ha fatto poi vedere in generale che la condizione suddetta è anche sufficiente per la determinazione della varietà [3].

La *seconda* ipotesi di Riemann riguarda l'indipendenza della lunghezza delle linee dal luogo, e perciò come egli dice «ogni linea è misurabile per mezzo di ogni altra» [4]. Per la determinazione della linea, secondo Riemann, le coordinate dei suoi punti devono essere funzioni di una variabile. Se ben comprendo, egli suppone qui delle funzioni tali che le linee da esse rappresentate siano misurabili mediante l'una qualunque di esse. L'ipotesi suddetta non riguarda però la rigidezza della linea, ma soltanto la conservazione della sua lunghezza.

---

1) Veggasi la nostra introduzione.

2) Crelle's Journ. Vol. 84, 1878. trad. francese negli *Acta Math.*, vol. II.

3) Ein Beitrag zur Mannigfaltigkeislehre; giorn. di Crelle, vol. 86, 1879. Di tale questione si erano prima occupati anche Lüroth, Jürgens e Tomae.

4) Egli si esprime così: Massbestimmungen erfordern eine Unabhängigheit der Grössen vom Ort, die in mehr einer Weise stattfinden kann; die zunächst sich darbietende Annahme, welche ich hier verfolgen will, ist wohl die, dass die Länge der Linien unabhängig von der Lage sei: also *jede Linie durch jede messbar sei* (II, 1).

La *terza* ipotesi esprime che l'elemento lineare della varietà è uguale alla radice quadrata di una funzione intera omogenea e positiva di 2° grado delle grandezze dx, nella quale i coefficenti sono funzioni continue delle grandezze x.

La *quarta* ipotesi ammette la *curvatura costante* della varietà, la quale corrisponde alla proprietà della sovrapponibilità delle parti della varietà.

Queste ipotesi, come si vede sono geometricamente tutt' altro che semplici e ancora meno intuitive. Il metodo è indiretto, perchè se non si sapesse che l'elemento lineare per lo spazio Euclideo è $ds = \sqrt{\Sigma dx^2}$, non verrebbe certo in mente di scegliere questa ipotesi anzichè quella che l'elemento lineare si esprima mediante la radice quarta di un'espressione differenziale di 4° grado [1]).

L'ipotesi della curvatura costante non è da sola sufficiente per la geometria, che deve corrispondere ai dati dell'esperienza. *Gauss* ha dimostrato che la curvatura di una superficie non muta quando essa viene piegata senza rottura o stiramento, o come si dice quando essa è flessibile ma inestendibile, e per conseguenza i rapporti di misura rimangono i medesimi. Però bisogna osservare che nel piegare una superficie sopra un'altra della stessa curvatura, essa può coprire più volte, ad es. un numero finito o infinito di volte la seconda, come avviene pel piano sul cilindro, e quindi la geometria della seconda superficie è soltanto identica a quella della prima quando la si consideri come un numero finito o infinito di superficie differenti, costituenti una sola superficie, chè altrimenti riguardandola come una sola e semplice superficie le proprietà di posizione sulla medesima possono essere diverse. Ad esempio perchè il cilindro rappresenti tutto il piano Euclideo occorre considerarlo come infinite superficie cilindriche non coincidenti, in modo da formare una sola superficie; il che si vede dividendo il piano in tante striscie piane uguali, e piegandone una a cilindro si pieghino tutte le altre sullo stesso cilindro. Ma la geometria del cilindro semplice non corrisponde in tutto al piano; ed è poi contraria ai dati dell'esperienza in quanto che in un intorno di un punto per quanto piccolo si vuole si possono costruire due geodetiche, ad es. una generatrice e un'elica, in modo che abbiano in esso due punti comuni, mentre nel campo delle nostre osservazioni due rette del piano non possono avere due tali punti senza coincidere.

L'insufficienza della curvatura costante per lo spazio ordinario o a n dimensioni è ancora più manifesta nel nostro spazio generale. Invero, in questo lo spazio dato non si può scambiare con una varietà di punti a tre (o a n dimensioni) della stessa curvatura, perchè per due punti dello spazio generale passa per lo più una sola geodetica, cioè la retta.

Ho creduto bene di dir ciò perchè non si creda, che piegando il piano in modi diversi, le forme da esso assunte possano sempre essere considerate come piani Euclidei corrispondenti a tutte le proprietà geometriche del piano dato dall'esperienza. Si può soltanto dire che la geometria metrica rimane

1) Riemann stesso dice: « Per lo spazio

$$ds = \sqrt{\Sigma dx_i^2}$$

quando si esprime la posizione dei punti mediante coordinate rettangolari; lo spazio è dunque compreso in questo caso più semplice.

sempre la stessa. Il piano dunque nello spazio generale è uno soltanto, sebbene vi siano altre superficie a due dimensioni a curvatura costante nulla. Osservo anche che per lo spazio generale questa questione non esiste, perchè esso non si può piegare, in quanto che questa operazione esige una dimensione di più.

Le ipotesi di Riemann non soltanto confermano quella di Lobatschewsky, ma egli stesso ha fatto rilevare che lo spazio sebbene illimitato può essere finito. E questo è a mio parere il risultato più importante della memoria di Riemann, per quanto ad esso si possa giungere in un modo molto più semplice.

Il primo però a svolgere il concetto matematico delle varietà a n dimenfu H. Grassmann nella sua citata Ausdehnungslehre, pubblicata la prima volta nel 1844. Si deve alla forma involuta e spesso indeterminata nel principio, ed anche al nuovo calcolo simbolico del quale principalmente si occupa, se parecchie idee profonde che vi si trovano non sono state abbastanza apprezzate, e sono state introdotte poi da altri sotto forma più propria o almeno più opportuna allo svolgimento di quelle stesse idee [1]). Anche Grassmann si occupò alquanto dei principî della geometria, ma delle sue idee in proposito ci occuperemo più avanti.

Con la precedente memoria di Riemann si collega quella di Beltrami « Sulla teoria degli spazî a curvatura costante » [2]) la quale serve di complemento e di schiarimento a quella di Riemann. Questo importante lavoro si collega a sua volta con altro precedente [3]) e con la celebre memoria dello stesso autore che abbiamo citato nel frontespizio del nostro libro. Nella seconda egli ottiene un risultato notevolissimo, e cioè che le sole superficie suscettibili di essere rappresentate sopra un piano in modo che ad ogni punto corrisponda un punto, e ad ogni linea geodetica una linea retta, sono quelle la cui curvatura è dovunque costante. Quando questa curvatura è nulla, la legge di corrispondenza non differisce dall'ordinaria omografia, e quando non è nulla, questa legge è reduttibile alla proiezione centrale sulla sfera ed alle sue trasformazioni omografiche, teorema codesto che è in stretta relazione coi principî della geometria piana, come fece vedere il Klein [4]).

Nel saggio sulla geometria non Euclidea Beltrami parte da una formola che rappresenta il quadrato dell'elemento lineare di una superficie la cui curvatura è dovunque costante e negativa, e che egli chiama superficie *pseudosferica*. Il risultato principale a cui egli giunge è che la geometria delle superficie pseudosferiche semplicemente connesse nello spazio Euclideo è identica alla geometria piana di Lobatschewsky, dimostrando che in una tale geometria due punti determinano sempre la retta [5]).

Beltrami ha indicato un modo per costruire approsimativamente una

---

1) Vedi la nota sulle definizioni di spazio e di geom. a n dimensioni ecc.

2) Annali di Mat. serie II. t. II, 1868; trad. francese di Hoüel negli Annales de l'École normale sup. 1869

3) Risoluzione del problema: Riportare i punti di una superficie sopra un piano in modo che le linee geodetiche vengano rappresentate da linee rette. Ann. di Mat. serie I, t. VII, 1866.

4) Ueber die sogennante Nicht Euclidische Geometrie. Math. Ann. vol. VI, pag. 135.

5) Egli ottiene un tale risultato appoggiandosi all'analoga proprietà del sistema Euclideo. Di tale proprietà noi abbiamo dato una dimostrazione diretta e puramente geometrica (Vedi pag. 233).

parte della pseudosfera o meglio una parte della superficie di rotazione che serve di tipo alle pseudosfere [1]).

Nella prima memoria sopra citata egli estende questi risultati alle varietà analitiche ad n dimensioni partendo dall'elemento lineare sotto la forma:

$$(1) \qquad ds = \frac{R\sqrt{dx^2 + dx_1^2 + \ldots + dx^2_n}}{x}$$

ove le $n+1$ variabili $x, x_1, \ldots x_n$ sono legate dalla relazione

$$x^2 + x_1^2 + \ldots + x_n^2 = a^2 \qquad (2);$$

prova che la varietà è a curvatura costante e semplicemente connessa entro allo *spazio limite* determinato dall'equazione (2), esclusa la x, supposto che le x, R ed a siano reali; e dimostra che in una tale varietà si possono scegliere le variabili in modo che le geodetiche siano rappresentate da equazioni lineari, e le trasformazioni le quali lasciano inalterati i rapporti di misura sono rappresentate da equazioni lineari. Mette poi in relazione questa teoria con la geometria Euclidea e non Euclidea [2]).

Fu osservato a Lobatschewsky e a G. Bolyai che non hanno dimostrato la possibilità del loro sistema, sebbene abbiano stabilite le formole della trigonometria di questo sistema contenenti una costante k, le quali danno il sistema Euclideo quando k diventa infinita. La stessa osservazione può esser fatta anche a Riemann, poichè nel lavoro di lui una vera dimostrazione, almeno esplicita della possibilità logica di una varietà a curvatura costante positiva negativa o nulla, non c'è, sebbene per ciò che dicemmo nella prefazione non vi sia alcuna ragione per dubitarne. Per la geometria a due dimensioni si ha una prova sperimentale della indimostrabilità del postulato di Euclide cogli altri suoi postulati, la quale è data dalla superficie sferica entro il campo delle nostre osservazioni esterne, come pure da una parte della superficie pseudosferica sulla quale la somma degli angoli del triangolo è minore di due retti. In questo caso non si può dubitare che mutino le proprietà della superficie estendendo maggiormente il campo d'osservazione e quindi anche la superficie stessa, perchè nei triangoli più grandi la differenza da due retti cresce sempre più. Non si ha invece una prova analoga per la geometria che si ritiene la più vera. Difatti il piano che è una superficie, esistente indipendentemente dai postulati che noi diamo per determinarla, può soddisfare, allargando il campo d'osservazione, tanto alla geometria di Riemann quanto a quella di Lobatschewsky, anche se presentemente la somma degli angoli dei triangoli più grandi è con grandissima approssimazione uguale a due retti.

Per lo spazio a tre dimensioni si ha un'altra prova per i sistemi di Lobatschewsky e di Riemann considerando una superficie di 2.° grado (reale o immaginaria) nel campo d'osservazione e applicando ad essa la definizione della distanza e dell'angolo di Cayley, e quindi poichè nel sistema di Lobatschewsky la geometria dell'orisfera è identica alla geometria del piano Euclideo, si ha pure una prova della possibilità del postulato di Euclide nella geometria piana.

Così potendo costruire nell'ambiente esterno colla geometria descrittiva la proiezione parallela di una superficie di 2° grado a tre dimensioni riguardata come assoluto, il cui contorno apparente nel nostro spazio è una superficie di 2° grado ordi-

---

1) Sulla superficie di rotazione che serve di tipo alle superficie pseudosferiche. Giorn. di Battaglini, vol. X, apr. 1872. Di tale superficie nel 1873 si occupò pure il de Tilly. Bulletin de l'Ac. royale de Belgique Vol. XXXV.

2) Molti lavori di altri autori furono pubblicati dopo quelli di Riemann e di Beltrami specialmente sulla teoria della curvatura delle varietà a più dimensioni; ma essi non hanno per iscopo i principî della geometria. Rilevo però in relazione a questa teoria il teorema di Brill secondo il quale lo spazio pseudosferico a tre dimensioni non esiste nello spazio Euclideo a quattro dimensioni, ma esiste però nello spazio a cinque dimensioni.

naria, possiamo costruire nel suddetto ambiente un sistema di Lobatschewsky a tre dimensioni. E così via La possibilità dunque delle tre ipotesi è provata sperimentalmente.

Abbiamo dato nel testo delle spiegazioni per persuadere il lettore della possibilità logica delle nostre ipotesi II, III e IV, che risiede nell'indipendenza del campo infinito dal campo infinito, nel senso da noi inteso, e la cui possibilità è evidente per la semplicità delle stesse ipotesi; ma qualora, come abbiamo fatto per le nostre ipotesi dell'introduzione se ne desse una dimostrazione più rigorosa, sarebbe posta fuori di questione l'indimostrabilità del postulato Euclideo con ragioni puramente logiche [1]).

I lavori della geometria non Euclidea hanno dato luogo ad una vivissima polemica sulla dimostrabilità o no del postulato di Euclide, come era da aspettarsi dopo l'opinione di Kant sull'assoluta verità di tutti gli assiomi geometrici quali forme *a priori* dell'intuizione spaziale. Sicuro che con filosofi, i quali in cose in cui non si ha punto alcuna certezza dicono: *è così* anzichè dire: *forse è così*, la discussione non può degenerare che in polemiche appassionate, le quali non conducono ad alcun risultato. È davvero curioso come chi accusa gli altri di mancanza di buon senso in tali polemiche ha generalmente torto; e queste accuse fra scienziati che si rispettano non dovrebbero mai essere permesse, non solo per cortesia ma eziandio perchè non servono a nulla [2]).

Un altro lavoro di capitale importanza in questi studî generali sui principî della geometria fu pubblicato nel 1859 da A. Cayley, uno dei più fecondi e originali matematici moderni [3]). Questa memoria si riferisce alla geometria ad una e a due dimensioni riguardandole come un'interpretazione della teoria

1) Secondo il sig. Rausenberger (Die Elem. Geom. system. u. critisch behandelt-Leipzig; 1887, pag. 54) non è escluso ancora che la geometria non Euclidea non possa essere logicamente impossibile, e ritiene che la dimostrazione dell'indimostrabilità del postulato di Euclide non si potrà forse mai dare.

Il sig. Lindemann (Vorlesungen ü. Geometrie v. Clebsch. 2. vol. Leipzig; 1891, p. 552-563) per dimostrare che il postulato suddetto non è conseguenza logica degli altri postulati di Euclide dice che se la geometria di Riemann e di Lobatschewsky conducesse ad un assurdo, ciò dovrebbe accadere pure sulle superficie a curvatura costante positiva o negativa esistenti nella geometria Euclidea, e quindi anche il postulato V. di Euclide sarebbe incompatibile cogli altri postulati, e *perciò sarebbe in generale impossibile ogni ricerca geometrica.*

Come non mi sembra nel vero il sig. Rausenberger, non ci sembrano buoni gli argomenti del sig. Lindemann.

2) Fra i matematici contrari a questa geometria rilevo alcuni nomi illustri. Anzitutto G. Bertrand, il quale nei Comptes Rendus del 1869 difese una dimostrazione del postulato delle parallele data dal sig. Carton, e data venti anni prima dall'italiano sig. Minarelli nel tomo VIII dei Nouvelles Annales di Terquem. Bertrand qualifica tale geometria quale *debauche de logique.* La dimostrazione di Minarelli, come dice Genocchi (Bulletin de l'Ac. de Belgique t. XXXVI, pagina 193) assomiglia a quella di Jvory e la cui insussistenza fu dimostrata da Legendre stesso.

Bellavitis nella XI Rivista dell'Istituto Veneto (1872), pur essendo contrario alla geometria non Euclidea osserva giustamente che nei principî della geometria bisogna procedere di definizione in definizione senza chiedere nulla alla geometria stessa. Così Genocchi credette ad una possibile dimostrazione del postulato Euclideo nonostante i lavori di Riemann, Beltrami, Klein, Helmoltz e de Tilly: l. c. Sur un Mém de Daviet de Foncenex et sur les géométries non Euclidiennes: Mem. delle R. Acc. de Torino 1877. Lettre à M. Quetelet, Bulletin de l'Ac. Roy. de Belgique t. XXXVI, 1873.

G. Bertrand e Bellavits negano giustamente che si possa fondare la geometria sul solo ragionamento, perchè fa d'uopo ricorrere all'intuizione spaziale; ma vanno troppo in là quando come i Kantiani sostengono l'assoluta evidenza del postulato V di Euclide. Questi, come altri matematici, hanno trascurato la considerazione che sebbene dall'esperienza o dall'intuizione, che si esercita in un campo limitato dello spazio, noi ricaviamo i nostri assiomi; nella geometria sono possibili tutte quelle ipotesi astratte che non contraddicono all'intuizione spaziale. Però, come abbiamo detto nella prefazione non sono nel vero neppure quei matematici i quali considerano la possibilità geometrica dal solo punto di vista astratto o analitico.

Fra le tante critiche alle dimostrazioni del postulato di Euclide noto quella di Lüroth: Ueber Bertrand's Beweis des Parallelen Axioms-Zeitsch. von Schlömilch. XXI pag. 294-297.

3) A sixth memoir upon quantics. Phil. Trans. of the Roy. Society of London, 1859; opp. Collected Papers; London, vol. II, 1889.

delle forme binarie e ternarie svolte nelle memorie precedenti dallo stesso autore. Scopo principale di essa è quello di derivare la geometria metrica dalla geometria proiettiva. Egli assume perciò assiomaticamente la proprietà che ogni punto della retta o del piano è determinato da due o da tre coordinate omogenee, e inversamente (salve le debite eccezioni); senza dare però, come Riemann, alcuna ragione geometrica di questo assioma complesso. Poi stabilisce pure assiomaticamente che un'equazione lineare rappresenta una retta, dimodochè una retta viene determinata da tre coordinate omogenee che sono precisamente i coefficenti della sua equazione. Con queste sole proprietà il Cayley svolge i principî della geometria proiettiva della retta e del piano senza alcun concetto metrico, ottenendo così uno splendido risultato.

Premessi questi principî, e specialmente la condizione affinchè due coppie di punti siano coniugate armoniche, egli introduce l'originale concetto della distanza riferita ad un altro ente geometrico, che chiama *assoluto*. Nella retta l'assoluto è dato da una coppia di punti A_1A_2. Considerando un'altra coppia di punti PP', che riguarda come inscritta in A_1A_2, determina i punti doppî dell'involuzione A_1A_2, PP'. Uno di questi punti lo chiama *centro d'inscrizione*, l'altro *asse di inscrizione*. La coppia PP' è chiamata dall'*A. point-pair circle* o *circle* (cerchio); il centro e l'asse di inscrizione sono il *centro* e *l'asse* del «circle». E per definizione stabilisce che i due punti di un «circle» sono *equidistanti dal centro.*

Per ottenere la scala costruisce P'' in modo che PP'' sia un «circle» rispetto a P' come centro, vale a dire P'' è il punto corrispondente di P nell'involuzione determinata dalla coppia A_1A_2 e dal punto doppio P'. Il punto P' è interno al segmento (PP''). Così nello stesso modo si costruisce P''' che è ad ugual distanza di P' da P'', e, come si vede, il punto $P^{(n)}$ si avvicina indefinitamente ad A_2. Similmente dalla parte opposta.

Le distanze di tre punti qualunque A, B, C le sottomette alla seguente relazione, che costituisce pure un assioma:

$$\text{dist. } (AB) + \text{dist. } (BC) = \text{dist. } (AC).$$

Se l'equazione dell'assoluto è data da una forma di 2° grado:

$$a_x{}^2 = (a_1x_1 + a_2x_2)^2 = 0, \qquad (a_{ik} = a_{ki} = a_i\, a_k = a_k\, a_i),$$

dalla relazione delle coppie armoniche si ricava la condizione dell'equidistanza, e quindi coll'aiuto della relazione suddetta si ottiene l'espressione della distanza di due punti z_i e y_i sotto la forma:

$$\text{arc cos} \frac{a_y\, a_z}{\sqrt{a_y{}^2\, a_z{}^2}}$$

Nel piano come assoluto si ha una conica, la quale determina l'assoluto sopra ogni retta. L'assoluto intorno ad ogni punto è dato invece dalle due tangenti che dal punto possono condursi alla conica. Assume il quadrante, cioè $\frac{\pi}{2}$, come unità di misura in tutti questi sistemi, per la quale unità i due punti su una retta sono armonici rispetto all'assoluto. Così, la distanza di due

punti è uguale alla distanza delle loro polari rispetto all'assoluto, e inversamente, e quindi la distanza di un punto da una retta è definita come il complemento della distanza della polare del punto dalla retta data. Donde si ricava che la distanza del polo dalla sua polare è il quadrante. Una conica inscritta nell'assoluto, che tocca cioè l'assoluto in due punti, si chiama *cerchio*; il suo centro è il punto d'intersezione delle due tangenti e l'asse è la retta congiungente i due punti di contatto. Tutti i punti del cerchio sono equidistanti dal centro, e tutte le tangenti lo sono dall'asse; e la prima distanza è complementare alla seconda. L'espressione della distanza di due punti qualunque del piano ha una forma simile a quella sulla retta. Facilmente si ricavano le espressioni della distanza di due rette e quelle di un punto da una retta.

Cayley considera poi il caso che l'assoluto sulla retta si riduca ad un punto, e nel piano a due punti, nel qual caso si ottiene l'espressione della distanza nel sistema di Euclide quando l'assoluto è supposto all'infinito. Egli considera pure il caso della sfera. Da un tale punto di vista le proprietà metriche di una figura non sono proprietà della figura considerata in sè, ma in relazione con un'altra figura, cioè l'assoluto. Rispetto alia questione dei principî della geometria, oltre che non si giustifica come il punto sia determinato nel piano da tre coordinate omogenee, e non si studiano le parti semplici di tale principio, dal punto di vista geometrico vi è l'altra questione ancora più importante e più complessa, cioè la rappresentazione della retta nel piano mediante un'equazione lineare, e inversamente. Osservo inoltre che in confronto con questo metodo la distanza è per noi un ente che dipende invece dalla figura in sè [1]), e le sue diverse espressioni analitiche dipendono dall'assioma delle parallele. E questo è il metodo geometricamente più proprio. Il processo e le idee di questo lavoro di Cayley sono puramente analitici [2]).

Molto probabilmente Cayley non conosceva all'epoca in cui scrisse questa memoria i lavori di Lobatshewsky e di G. Bolyai, perchè con facilità avrebbe potuto porre le sue ricerche in relazione colla geometria non Euclidea.

Colle precedenti ricerche, e specialmente nell'indirizzo di Cayley, si collegano i lavori di Klein su questa geometria [1]), nei quali nuovi e importanti concetti sono svolti, sempre dal punto di vista analitico, sebbene essi abbiano un carattere geometrico più spiccato. Scopo principale di essi è sempre la teoria delle parallele e le relazioni fra la geometria proiettiva e quella metrica. Klein, partendo nella prima sua memoria dalla rappresentazione dei punti della retta mediante due grandezze numeriche omogenee e dalle proprietà fondamentali della distanza e dall'osservazione che lo scorrimento in una retta e la rotazione in un fascio equivalgono ad una trasformazione lineare che muta la forma in sè stessa, determina l'espressione della distanza di due

1) Vedi intr. n. III. e parte I, n. 5 e la nota sul movimento.

2) Altri lavori di Cayley che hanno intime relazioni con questi sono l'Abstract Geometry (Phil. Trans. of the Roy. Society of London, 1870) e una nota sulla geom. non Euclidea (Math. Ann. Vol. V, 1871) nella quale partendo dalla espressione della distanza e dell'angolo data da Klein nella geometria iperbolica deduce le formole della trigonometria, supponendo per maggior semplicità che l'assoluto sia un cerchio.

punti quale logaritmo del rapporto anarmonico dei due punti con quelli dell'assoluto, moltiplicato per una costante, che in Cayley è uguale a $\frac{1}{2}\sqrt{-1}$ [2]).

Così opera analogamente nel piano considerando la conica assoluta di Cayley. Da qui Klein entra in campo con nuovi e importanti concetti determinando quelle trasformazioni piane che corrispondono ai movimenti del piano, le quali sono appunto quelle che trasformano la conica assoluto in sè medesima, e che formano un *gruppo* nel senso che applicando una trasformazione dopo un'altra si ottiene sempre una trasformazione del medesimo gruppo. Le trasformazioni suddette sono di due specie, quelle della prima formano un gruppo continuo, non così quelle della seconda specie; e poi fa vedere che in queste trasformazioni i rapporti di misura non cambiano.

La geometria di Lobatschewsky o di Riemann e di Euclide corrispondono ai casi in cui l'assoluto è reale, immaginario o ridotto sulla retta ad un solo punto. È perciò che Klein le chiama geometrie *iperbolica, ellittica semplicemente e doppiamente elittica) e parabolica.* È il Klein che ha rilevato per primo la distinzione di queste due forme della geometria Riemanniana [3]).

La geometria parabolica viene considerata da Klein come caso limite della geometria iperbolica. Non basta definire in questo caso i movimenti come quelle trasformazioni, o meglio una classe delle medesime, che lasciano inalterata la conica assoluto, perchè una coppia di punti (che tale è l'assoluto nella geometria parabolica) si trasforma in sè stessa mediante un sistema quattro volte infinito di trasformazioni, mentre quelle corrispondenti ai movimenti, sono in numero tre volte infinito. Basta stabilire a tal'uopo che il cerchio è una linea chiusa.

Un altro concetto importantissimo e che facilmente risulta da quelli di Cayley è l'indipendenza della geometria proiettiva dall'assioma delle parallele. Klein fa anche osservare che la geometria proiettiva può essere svolta prima della determinazione della misura, o in altre parole che il rapporto anarmonico non contiene questo concetto. Egli vi dedica nel primo suo scritto poche parole piuttosto oscure; il che non è certo un pregio trattandosi che questo è il punto fondamentale della sua ricerca, e che quindi di primo acchito doveva essere posto fuori di discussione. Questo bisogno di maggiori schiarimenti l'ha sentito il Klein stesso, tanto che nella sua seconda memoria vi è tornato sopra con più particolari.

Egli suppone dato un campo limitato verso l'infinitameute grande nello spazio ordinario colle seguenti proprietà:

---

1) Math. Annalen, vol. IV. e VI.

2) L'espressione della distanza di due punti quale logaritmo del rapporto armonico di due punti e dei due punti all'infinito della retta nella forma data da Klein fu trovata anche da Fie S. Marie (Etudes analitiques sulla théorie des paralleles; 1871, pag. 28 e 48). Però questa forma presso Flie S. Marie non è che accidentale, mentre in Klein è il concetto fondamentale indipendente da qualsiasi concetto di misura prestabilito.

3) Non si può dire veramente che la doppia forma di questa geometria sia sfuggita a Riemann perchè egli dà quella della sfera come un esempio. Essa è sfuggita però a Beltrami. In fondo prima degli studî di Klein essa poteva passare inosservata, inquantochè non si tratta che di un carattere fondamentale che le distingue, mentre d'altra parte si possono dedurre facilmente l'una dall'altra. — Vedi la parte I pag. 257, 258. Però anche dopo le memorie di Klein la 1 forma sfuggì ad es. a de Tilly, Frischauf e Poincarè. Di una tale questione si sono pure occupati Newcomb: Elementary theorems relating to the Geometry of a space of tree dimensions and of uniformes positive curvatura in the fourth dimension. Giorn di Crelle, vol. 83, 1877; e Killing (l. c.)

1) mediante tre punti arbitrarî dello spazio dato passa una ed una sola superficie del sistema;

2) la curva d'intersezione che può essere comune a due superficie del sistema, appartiene a tutte le superficie che contengono due punti della curva.

In fondo qui ammette che *ogni* coppia di punti determini una retta, e che *ogni* retta avente due punti comuni col piano vi giaccia per intero. Bisogna badare che l'*A*. ha qui in vista uno scopo speciale della geometria, cioè che per un tale sistema di superficie e di curve vale la geometria proiettiva nello stesso senso del sistema di rette e di piani di uno spazio limitato a tre dimensioni, oppure che si può stabilire una corrispondenza tale che ai punti dello spazio dato corrispondano dei numeri in modo che le superficie del sistema siano rappresentate da equazioni lineari.

Come si vede questo importante risultato è appunto l'ipotesi da cui parte il Cayley.

È da osservare che i due principî suddetti valgono anche nel nostro spazio generale rispetto alle rette e ai piani, e che per mezzo di essi si può dimostrare che dati tre punti *ABC*, il quarto armonico *D* è determinato ed unico. Ma non si può ricavare il risultato analitico suddetto senza ammettere che lo spazio sia a tre dimensioni, proprietà che è inclusa dunque tacitamente nei principî anzidetti [1].

Per stabilire la geometria proiettiva secondo i concetti dello Staudt, Klein introduce l'assioma della continuità; e poichè la proiettività dimostra che vi è una relazione costante fra quattro elementi, questa relazione, egli dice, si può considerare come un numero reale. Si indichino tre elementi *A*,*B*,*C* come elementi fondamentali, e agli altri elementi *D* si distribuiscano secondo una legge arbitraria i numeri reali fra ∞ e $+\infty$; allora ad ogni gruppo *ABCD*, corrisponderà un numero. Dai rapporti anarmonici si sale poi alle coordinate omogenee che non sono altro che i valori relativi dei rapporti anarmonici. È il Fiedler che ha trattato per primo di queste coordinate e ha dimostrato che la retta e il piano sono rappresentati rispettivamente nel piano e nello spazio ordinario da un'equazione di 1° grado [2].

Il modo con cui poi il Klein ha spiegato il concetto fondamentale della prima sua memoria ha sollevato dei dubbî da parte di Cayley stesso [3] e di sir R. Ball [4] tanto che li Klein vi torna sopra di nuovo in un suo recente scritto [5] seguendo però un'altra via, simile a quella tenuta anche da De Paolis [6], e che si trova sviluppata nelle lezioni citate di Clebsch-Lindemann.

---

1) Lindemann (l. c.) dà questi principî indipendentemente dalla limitazione dello spazio; ma li dà per lo spazio a tre dimensioni, senza definirlo nei principî stessi. A ciò si può riparare aggiungendo come terzo principio che se due piani hanno un punto comune, essi hanno almeno un altro punto comune.

2) Die Darstellende Geometrie, Leipzig. 1871; trad. italiana dei prof. Padova e Sayno: Firenze 1874. Il Fiedler stesso prima di cominciare a trattare delle coordinate proiettive esprime pure l'opinione che la geometria elementare si possa considerare come un caso speciale della geometria proiettiva introducendo i concetti di misura colla teoria dell'involuzione.

3) Collected Papers-Notes and References

4) On the theorie of. Content: Irish Ac. of. Dublin, 1889

5) Zur Nicht Eucl. Geometrie Math. Ann. vol. XXXVII, 1891

6) Sui fondamenti della geom. proiettiva. Atti della R. Acc. dei Licei 1880-81. Oltre a questa memoria le osservazioni di Klein sulla costruzione delle forme proiettive hanno dato luogo ad alcune

Klein fa anche vedere nella prima memoria come dai concetti di Cayley si passi a quelli di Riemann e di Beltrami, e nella seconda si occupa altresì delle varietà numeriche a più dimensioni [1]).

Nell'ultima si occupa dell'interessante problema di determinare le diverse forme Euclidee e non Euclidee a due e a tre dimensioni, in particolare di quelle Euclidee a due dimensioni.

Nell'indirizzo dei lavori di Cayley, di Battaglini e di Klein è d'annoverare la memoria già citata di sir R. Ball, sebbene egli parta da principî alquanto diversi.

Egli chiama «Content» ciò che è secondo Grassmann un «System dritter stufe». Chiama le singole grandezze del «Content» *oggetti*. Supponendo che a_1, a_2, a_3, a_4, siano oggetti, indipendenti, ogni altro oggetto del «Content» è espresso dal simbolo

$$x_1 a_1 + x_2 a_2 + x_3 a_3 + x_4 a_4$$

ove x_1, x_2, x_3, x_4 sono grandezze numeriche qualunque. Le espressioni della forma $x_1 a_1 + x_2 a_2$, $x_1 a_1 + x_2 a_2 + x_3 a_3$, rappresentano rispettivamente un «*range*» e un «*extent*». Egli stabilisce cinque assiomi per la funzione che chiama «*intervene*» fra due oggetti, la quale corrisponde alla distanza di due punti dello spazio ordinario e cinque altri assiomi analoghi per la «*departure*» fra due «ranges», che corrisponde all'angolo di due rette; e aggiunge poi un undecimo assioma per stabilire che se due «ranges» hanno una «departure» nulla, il loro oggetto comune è all'infinito, e inversamente.

Mette poi il «Content» in corrispondenza univoca con lo spazio ordinario, nel quale riguarda il punto determinato senz'altro da quattro grandezze omogenee x_1, x_2, x_3, x_4. Cogli assiomi stabiliti trova l'espressione della distanza e dell'angolo secondo il concetto di Klein [2]). In questa memoria, come in altre, che partono dal punto di vista di Cayley, e si appoggiano sulla rappresentazione analitica, non ci pare ben dimostrato che ad es. il luogo dei punti all'infinito del piano, soltanto perchè in ogni retta vi sono due tali punti, sia proprio una conica, o almeno che si possa considerare come tale [3]).

I risultati di Cayley e di Klein, specialmente di quest'ultimo, hanno servito al sig. Pasch per trattare sistematicamente col metodo puramente geometrico ed elementare la geometria proiettiva indipendentemente dall'assioma delle parallele [4]).

Ciò che distingue anzitutto il metodo del Pasch, si è che egli non riconosce nella geometria una scienza astratta le cui forme siano tipi a cui si accostino

---

note di Zeuthen e Lüroth (Math. Ann. vol. VII), di Tomae (Geom. der Lage), di Darboux (Math. Ann. vol. XVII), di Schur (Math. Ann. XVII) e di Pasch (l. c.).

1) Vedi più avanti.

2) Di questa teoria, e specialmente della teoria del movimento nello spazio ellittico si occuparono altri matematici inglesi, fra i quali lo stesso S. R. Ball (Proc. of the Roy. Irish Ac. 1885-1886), Clifford. l. c., Buchheim: London M. S. Proc. XV, 1883, e. XVI, 1884.

3) Noi abbiamo veduto che il luogo dei punti all'infinito nel sistema Euclideo può essere considerato come una retta rispetto all'unità Euclidea, e abbiamo ammesso che lo sia effettivamente in senso assoluto coll'ip. VII (parte I, n. 49 e 68). Di ciò si è pure occupato il sig. Pasch (Neuere Geometrie, Leipzig 1882).

4) l. c.

gli oggetti reali stessi fuori di noi, ma sono per lui questi oggetti medesimi. Un punto è quindi per lui un corpuscolo, che non si lascia ulteriormente dividere in parti entro i limiti dell'osservazione diretta [1]); così analogamente per la linea e per la superficie. Gli assiomi geometrici devono essere dati soltanto per gli oggetti stessi del campo limitato delle nostre osservazioni, e nessun'altro assioma, nè nessun'altra ipotesi deve essere data per gli oggetti fuori di questo campo, anzi questi oggetti stessi sono introdotti con denominazioni mediante certi enti geometrici costruiti coi soli che si ammettono come effettivamente esistenti. È per questo che l'A. separa gli enti geometrici fondamentali in due campi: gli enti *proprî* (eigentliche), e gli enti *improprî* (uneigentliche). Ma il campo degli enti proprî non è soltanto illimitato verso l'illimitatamente grande, come suppone il Klein nei principî sopra enunciati, ma anche verso l'illimitatamente piccolo. Il sig. Pasch dunque vuole applicare i dettati del puro empirismo alle forme geometriche, senza però che egli dimostri impossibile il metodo seguito da Euclide e dagli altri geometri [2]).

Oltre che per le considerazioni svolte nella prefazione e nell'introduzione [3]), non possiamo approvare questo metodo anche pel fatto che mentre anch'egli vuole il rigore matematico nelle dimostrazioni indipendentemente dalla osservazione (l. c., pag. 43), in ogni assioma e in ogni dimostrazione porta appunto l'incertezza e l'inesattezza dell'osservazione stessa, dimodochè per molti teoremi da principio vi è l'incertezza del campo della loro validità, e occorre poi dimostrarli nuovamente per gli enti improprî; il che naturalmente complica assai il metodo stesso [4]). I corpusculi (punti) si possono ottenere in diversi modi, ad es. come parti comuni di due aste cilindriche o di due aste parallelopipede sottilissime, e non si sa veramente come i punti si possano ritenere identici, mentre in realtà così non lo sono. Da quanto dice il Pasch sulla congruenza, due punti sono identici perchè si possono trasportare in modo da toccarsi l'un coll'altro; ma due corpi possono toccarsi senza essere punto uguali, anche se piccolissimi. Altrove egli dice che la geometria proiettiva non può far senza della congruenza se non ammette l'assioma della continuità della punteggiata [5]); che questo assioma però non é ammissibile col metodo del puro empirismo. Ma per stabilire quando due figure sono congruenti il sig. Pasch ricorre al movimento senza deformazione, vale a dire tacitamente in senso astratto all'esistenza di sistemi continui di figure invariabili. Bisognerebbe dunque che l'A. avesse mostrato come in senso astratto si possa definire la congruenza senza il criterio del continuo, nascosto nell'idea di movimento. Egli sostiene infatti giustamente che la dimostrazione in sè deve essere indipendente dall'intuizione della figura, o meglio secondo lui, dalla pura rappresentazione sensibile della figura (l. c. pag. 17 e 99); ma perchè ciò possa ottenersi

---

1) Anche noi non abbiamo bisogno nei nostri assiomi di dire come fa Euclide, che il punto non ha parti; ma nell'introduzione (§ 1. cap. IV,) ne abbiamo fatto uso per spiegare le ipotesi sul continuo.

2) Vedi Du Bois Reymond Allgem. Th. ecc.

3) Intr. § 1, cap. IV.

4) L'analogia fra le classi di punti e quelle dei numeri a cui ricorre il sig. Pasch (l. c. p. 40) non è che lontana, perchè ogni classe di numeri è logicamente ben determinata, mentre non è così di quella dei punti proprî, almeno come é data dal sig. Pasch.

5) Projective Geometrie und analy. Darstellung: Math. Ann. vol. XXX, pag. 129.

in modo completo bisogna, come noi abbiamo sostenuto nella prefazione, che anche gli assiomi, fatta astrazione dall' intuizione, ci diano delle proprietà astratte ben determinate, mentre non è così delle figure congruenti, chiamandole tali quando si possono trasportare l'una sull'altra, senza dire astrattamente che cosa significhi questo trasporto [1]).

Non ci pare poi che egli si mantenga sempre fedele ai principî del puro empirismo. Egli dice infatti che due figure sono congruenti quando si possono trasportare in modo che i punti di esse vengano a toccarsi (an einander stossen). Egli suppone dunque la penetrabilità dei corpi che non è certo un'ipotesi puramente empirica, essendo le figure i corpi stessi e non degli enti ideali. Inoltre ci pare che non sempre, come a pag. 115-120, vi sia abbastauza chiarezza in modo da non lasciar dubitare che gli assiomi II, IV e VIII conducano fuori del campo delle nostre osservazioni, il che toglierebbe la differenza fra punti proprî e improprî del campo finito, e si verrebbe meno con ciò al principio di stabilire gli assiomi soltanto per gli oggetti osservabili [2]).

---

1) Il prof. Klein nell'ultima sua memoria citata esprime alcuni giudizî sugli assiomi geometrici che dobbiamo discutere.

Egli è contrario alle vedute del sig. Pasch in quanto riguarda la dimostrazione geometrica, che secondo noi debbono anzi essere estese agli stessi assiomi, sebbene ci appoggiamo sempre al processo costruttivo dell'intuizione spaziale; il che non fa certamente chi prima o poi usa il formalismo analitico in modo più o meno intuitivo.

Klein per giustificare la sua diversità di vedute dice che si cita a questo proposito il processo della geometria analitica puramente calcolatrice che astrae dalle figure, ma che egli non può ritenerla come geometria propriamente detta.

« Mi è impossibile, egli dice, di svolgere logicamente una considerazione geometrica senza avere continuamente dinanzi agli occhi la figura a cui si riferisce ». E più sotto: « Una considerazione geometrica la penso in modo che la figura di cui si tratta la teniamo come tale sempre davanti agli occhi, e ci riferiamo agli assiomi ogni qualvolta si tratta di dimostrazioni rigorose ».

In fondo, quanto al metodo siamo pienamente d'accordo; ma Klein non ha spiegato come si possa tenere la figura « fortgesetzt vor Augen » attraverso i calcoli di cui egli pure fa uso. Anzi dove egli usa il linguaggio comune senza simboli, il vero metodo suo è generalmente l'analitico. Certo che Klein si accosta molto più nei suoi lavori al metodo intuitivo di altri matematici, ad es. di Cayley, che trattano la geometria col metodo analitico, ed egli sa fare frequente uso di considerazioni geometriche anche nelle ricerche d'analisi.

Se ben intendo, non siamo neppure d'accordo per quanto egli dice sulla considerazione geometrica, perchè per noi la dimostrazione, specialmente nella questione dei principî, deve essere sempre rigorosa, e quando non lo è, essa è più o meno diffettosa.

Quanto poi all'opinione di Klein che l'irrazionale debba essere fondato aritmeticamente, non posso che riferirmi alla mia introduzione stessa, oppure sottto altra forma alla mia nota citata sul continuo rettilineo.

Sono invece pienamente d'accordo con Klein quando dice che gli assiomi sono la *domanda* mediante la quale stabiliamo delle *affermazioni esatte* nell'intuizione inesatta. Io mi esprimo invece dicendo che gli assiomi sono il risultato dell'intuizione e dell'astrazione insieme, che così sono formati gli oggetti geometrici, i quali non chiamiamo comunemente astratti ma intuitivi, dando la prevalenza all'intuizione.

2) Come corollario dell'assioma II si ha che dato un segmento (AB), i cui punti A e B sono proprî, in ognuno dei prolungamenti di (AB), ad es. da A a B *vi è un altro punto proprio* B' tale che $(AB) \equiv (AB)$. L'assioma IV è espresso così:

« Se C_1 giace nel segmento AB, e si prolunga il segmento AC_1 del segmento congruente $C_2\, C_3$, e così via, si arriva a un segmento $C_n\, C_{n+1}$ che contiene il punto B ».

Come si vede questo è l'assioma d'Archimede.

L'ass. VIII stabilisce che se si aggiunge ad una figura un punto proprio, si può fare altrettanto per una figura congruente alla prima in modo che le figure risultanti sono pure congruenti.

Siano dati ad es. due triangoli ABC, $A'B'C'$ congruenti, i cui vertici siano punti proprî in modo però che $A'B'C'$ siano sulla superficie limite del campo della nostra osservazione per il quale soltanto devono essere dati gli assiomi. Si abbia inoltre un punto proprio D fuori del piano ABC; può darsi che il punto D', tale che i due tetraedri $ABCD$, $A'B'C'D'$ siano congruenti, sia un punto improprio, ossia non situato nel campo suddetto. Se il sig. Pasch ritiene che l'assioma valga soltanto quando D' è proprio, non si sa spiegare perchè dopo avere esteso il concetto della congruenza a punti qualunque egli dia il teor. 4 a pag. 115, secondo il quale in figure congruenti qualunque a un punto proprio dell'una corrisponde un punto proprio dell'altra.

Il sig. Pasch dà ventidue assiomi per la geometria proiettiva dello spazio ordinario, cioè otto per la retta, partendo dal segmento rettilineo, quattro per il piano e dieci per le figure congruenti, tutti comuni alle ipotesi Euclidea e non Euclidee.

Egli dichiara che non si occupa di spiegare col suo metodo quale di queste ipotesi corrisponda alla realtà, e non si occupa della geometria metrica; così manca nel suo libro una parte principale dei fondamenti della geometria.

Dopo avere introdotto il concetto di *punto matematico* col quale non intende altro che un sistema di quattro numeri reali, non contemporaneamente nulli (pag. 191), parrebbe che il metodo empirico fosse stato adottato per arrivare a questa definizione, mentre l'A. torna ancora sul concetto empirico di punto quando stabilisce che il trasporto della figura in numeri e il ritorno ad essa dai risultati numerici non può seguire con la stessa precisione (p. 200); cosa del resto notissisima senza bisogno di tanti sviluppi, quando la figura si considera come oggetto sensibile.

Ma anche avesse abbandonato i concetti empirici, il punto geometrico ideale non è niente affatto un sistema di numeri, e per questa idea non occorrono certamente tutte le considerazioni che ha svolto dapprima il sig. Pasch [1]. Se si adotta poi l'analisi nello studio della geometria, e la scienza così ottenuta si chiama *geometria analitica,* la quale è allora da distinguere dalla geometria propriamente detta, si abbandona il campo delle osservazioni dirette per studiare la geometria, ciò che fa appunto la geometria ideale o astratta.

È poi da osservare che il sig. Pasch come è empirista in geometria, lo dovrebbe essere pure in analisi, ma egli stesso confessa che la matematica se non si vuol restringere ad un campo limitatissimo deve accettare il numero irrazionale, ossia il continuo numerico. Ora il continuo numerico non è accettato dall'empirista, perchè tutto deve potersi ricondurre a rappresentazioni sensibili. Il numero irrazionale richiede appunto un processo infinito che l'empirista non ammette [2]. Si dirà che l'analisi si può svolgere per via puramente numerica, ma bisogna vedere se effettivamente l'analisi dal punto di vista empirico possa essere svolta per questa via. Ma anche ammesso che l'analisi si possa svolgere dal punto di vista empirico accettando l'irrazionale, la conclusione a cui egli arriva conferma la ragione d'essere della geometria ideale, la quale appunto si confonde astrattamente colla geometria che si ottiene applicando l'analisi senza restrizioni.

Il sig. Pasch esclude col suo metodo a *priori* (ma non a *posteriori*) la geometria a più di tre dimensioni, basando la possibilità geometrica sulla sola osservazione diretta e greggia; mentre noi la basiamo altresì sui fatti mentali [3]).

---

1) Vedi intr. § 1, cap V e parte I oss. emp. I.

2) Nel libro: Einleitung in die differential u. Integ. Rechnung. 1882. pag 13, il sig. Pasch dice: «mentre la misura empirica dà un numero che varia col limite dell'esattezza, la matematica cerca re«gole generali indipendenti da speciali rapporti di osservazione, e perciò non può far senza dei nu«meri irrazionali, quando non vuole restringersi in un campo troppo angusto».

Vedi Du Bois Reymond: Allg. Theorie ecc. ad es pag. 178 e 205-206.

3) Abbiamo già detto che anche Helmoltz pure essendo quello tra i matematici che più che altri ha sostenuto l'urto dei Kantiani e l'origine empirica della geometria, non la pensa quanto alle forme geometriche come il sig. Pasch. Citerò anche Clifford il quale arriva pure per via sperimen-

Per quanto non si possa essere favorevoli al metodo empirico del Pasch, pure bisogna lodarne lo scopo di voler porre la geometria su basi indiscutibilmente vere e compatibili fra loro, e il metodo appunto da lui usato inteso a scomporre gli assiomi in parti semplici, sebbene egli non dica le ragioni per le quali li ritiene indipendenti. Sono poi importanti in questo libro specialmente i capitoli relativi alla corrispondenza proiettiva e alla rappresentazione dei punti della retta e dei rapporti anarmonici con numeri; teoria questa di cui si era occupato anche De Paolis [1]). Il libro di Pasch sia pel rigore nelle dimostrazioni, sia per il metodo puramente elementare e geometrico che egli adopera va considerato come un notevole contributo nella questione dei principî della geometria proiettiva.

Un'altra via in questi studî fu aperta, subito dopo di Riemann, da H. v. Helmoltz, uno fra i più grandi pensatori di questo secolo, nella sua memoria «Ueber die Thatsachen die der Geometrie zu grunde liegen» [2]). Partendo da un punto di vista più intuitivo di quello di Riemann, egli ha stabilito quattro assiomi, che valgono per tutti e tre i sistemi di geometria, e per le varietà ad n dimensioni, che egli chiama *spazî* sebbene egli svolga poi le sue ipotesi nello spazio a tre dimensioni. La prima ipotesi è la seguente:

«Lo spazio ad n dimensioni è una varietà estesa di n^{ma} specie, vale a dire che «il suo particolare, il punto, viene determinato mediante la misura di n grandezze «(coordinate) qualunque, variabili in modo continuo e indipendenti fra loro. Ogni movi«mento di un punto è perciò accompagnato da una variazione continua almeno di una «coordinata. Se devono aver luogo delle eccezioni, ove o la variazione sia discontinua «oppure a malgrado del movimento non abbia luogo alcuna variazione di tutte le coor«dinate, queste eccezioni sono soltanto limitate a certi luoghi determinati da una «o più equazioni (cioè punti, linee, superficie e così via), che rimarranno dapprima «escluse dalla ricerca.

«È da osservare inoltre, che per continuità della variazione nel movimento non «è soltanto inteso che vengono percorsi tutti i valori estremi delle grandezze varia«bili, ma eziandio che esistono i quozienti differenziali».

Questa è la prima ipotesi di Riemann. C'è soltanto la differenza che qui entra in campo l'idea del movimento, come si vedrà meglio in appresso. Helmoltz non dà la generazione delle varietà, ma la fa dipendere senz'altro dalla corrispondenza col continuo numerico.

La *seconda* ipotesi suppone l'esistenza dei *corpi rigidi* e *mobili,* vale a dire che si mantengouo inalterati mediante il movimento, come è necessario, egli dice, per poter confrontare le grandezze spaziali mediante la congruenza. E dà la seguente definizione di corpo rigido:

«Tra le n coordinate di ciascuna coppia di punti, che appartiene ad un corpo «rigido ha luogo un'equazione (Gleichung) indipendente dal movimento, che è la

---

tale alla nozione del punto comunemente inteso. La superficie, egli dice, non è uno strato sottilissimo del corpo, come la linea non è una parte di superficie. e il punto una parte della linea: The common sense of the exact sciences. Questa opera postuma dell'illustre matematico inglese fu tradotta in italiano del prof. Maggi: Milano, 1886. Essa non ha la pretesa di stabilire i principî della scienza in modo logicamente rigoroso, ma la cui lettura crediamo utile ai giovani.

1) Sui fondamenti ecc. l. c.

2) Gött. nach. 1868, opp. Wiss. Abh. vol. II, pag. 618.

«medesima per tutte le coppie congruenti di punti. *Congruenti* sono quelle coppie «di punti che insieme o una dopo l'altra possono coincidere con la medesima cop-«pia di punti».

Lie ha formulato in modo più preciso per lo spazio a tre dimensioni le ipotesi suddette. La prima ipotesi dice che sono possibili delle trasformazioni della forma

$$\begin{aligned} x' &= f(x, y, z, a_1, a_2, \ldots) \\ y' &= \varphi(x, y, z, a_1, a_2, \ldots) \\ z' &= \psi(x, y, z, a_1, a_1, \ldots) \end{aligned} \qquad (A)$$

ove $a_1\, a_2 \ldots,$. sono dei parametri, $f.\ \varphi$ e ψ funzioni analitiche di cui le altre proprietà sono determinate dagli altri assiomi.

Indicando con $\omega\,(x_1, y_1, z_1, x_2, y_2, z_2)$ un'invariante dei due punti (x_1, y_1, z_1), (x_2, y_2, z_2), la seconda ipotesi significa per una qualunque delle trasformazioni (A) che si ha:

$$\omega\,(x'_1, y'_1, z'_1, x'_2, y'_2, z'_2) = \omega\,(x_1, y_1, z, x_2, y_{,2}\, z_2) \quad ^{1)} \quad (B)$$

Indipendentemente dall'idea del movimento suddetto, la seconda ipotesi di Helmoltz secondo le nostre considerazioni sui sistemi continui di figure invariabili si può ridurre a questa: che dato un sistema di elementi (S) i cui elementi appartengono ciascuno ad un continuo lineare avente la proprietà della prima ipotesi, e in modo però che fra questi sistemi continui lineari vi sia una corrispondenza univoca e dello stesso ordine (supposto anche che uno o più di questi continui possano ridursi ad un solo elemento) vi è fra le coppie di punti corrispondenti la stessa funzione delle coordinate, che si chiama *distanza* degli elementi della coppia. In tal caso (S) si chiama *corpo rigido*, e due posizioni di (S) si chiamano *congruenti* [2].

La *terza* ipotesi di Helmoltz ammette la piena libertà di movimento dei corpi rigidi, che consiste in questo: che ogni punto può trasportarsi al posto di ogni altro, o senza l'idea di movimento: che due punti qualunque dati appartengono ad una linea colle suddette proprietà, tenendo però conto delle distanze che lo legano agli altri punti del corpo a cui appartiene.

«Il primo punto di un sistema rigido è dunque assolutamente mobile. Quando «esso è fissato, per il secondo punto ha luogo un'equazione, e una delle sue coor-«dinate è funzione delle altre n-1. Dopo che è fissato anche il secondo, si hanno «due equazioni per il terzo, e così di seguito. In tutto si richiedono $n\,(n+1)/2$ co-«stanti per la determinazione di un sistema rigido».

Secondo Lie (l. c.) questa ipotesi equivale a quest'altra. Il punto x_1, y_1, z_1 può essere trasportato in qualunque punto dello spazio; quando esso rimane fisso, ogni altro punto (*di posizione generale*) può prendere ∞^2 posizioni che sono determinate dall'equazione data dall'uguaglianza delle distanze del punto mobile dal punto fisso. Se i due punti x_1, y_1, z_1; x_2, y_2, z_2 rimangono fissi, allora un terzo punto di posizione generale x_3, y_3, z_3 occupa ∞^1 posizioni determinate da due equazioni analoghe; e finalmente quando tre punti x_1, y_1, z_1; x_2, y_2, z_2; x_3, y_3, z_3 rimangono fissi (salvo quando hanno una posizione speciale) allora le tre equazioni della forma

$$(C) \qquad \omega\,(x_i, y_i, z_i; x_4, y_4, z_4) = \omega\,(x_i, y_i, z_i; x_4', y_4', z_4') \quad (i=1, 2, 3)$$

devono essere soddisfatte dalle sole coordinate $x'_4 = x_4,\ y'_4 = y_4,\ z'_4 = z_4$.

---

1) Bemerkungen zu v. Helmoltz Arbeit über die Thatsachen ecc. — Berichte der Ges. der Wiss zu Leipzig, 1886. — Ueber die Grundlangen der Geometrie (ib. ott. 1890).

2) Vedi pref. e le nostre osservazioni sul movimento senza deformazione.

Lie fa qui un'osservazione importante. Helmoltz non ha accennato alla *posizione generale* dei punti mobili, e non tenendone conto Lie fa vedere che i movimenti dello spazio Euclideo sono caratterizzati dai soli tre primi assiomi.

La *quarta* ipotesi è la seguente:

«Infine dobbiamo attribuire allo spazio un'altra proprietà che è analoga alla «*monodromia* delle funzioni ad una variabile complessa, la quale esprime che due «corpi congruenti rimangono anche congruenti dopo che l'uno di essi ha eseguito «una rotazione intorno ad un asse. La *rotazione* è distinta dal fatto che le coordi-«nate d'un certo numero di punti del corpo mobile rimangono inalterate durante il «movimento. Si ha invece l'*inversione* del movimento quando le coordinate prendono «gli stessi valori complessi già percorsi in modo continuo. Noi possiamo esprimere «questo fatto nel seguente modo:

« *Quando un corpo rigido ruota intorno ad n-1 dei suoi punti; se questi sono «scelti in modo che la sua posizione dipenda da una sola variabile indipendente, la «rotazione conduce il corpo senza inversione nella posizione primitiva dalla quale «è partito*».

Parrebbe dalla prima esposizione di questa ipotesi e dal titolo che le dà l'A. in una sua precedente nota [1]) che non fosse possibile il movimento di un corpo rigido ad es. intorno a due punti fissi nello spazio ordinario, mentre ciò è già ammesso dalle precedenti ipotesi, perchè se il corpo è rigido secondo le ipotesi II e III, esso si mantiene nel movimento sempre congruente a sè medesimo e a qualunque altro ad esso congruente. Nella seconda dizione sottosegnata si comprende invece che Helmoltz non sembra voler dire la medesima cosa, ma bensì ammette che il corpo pur mantenendosi invariabile nella rotazione ritorni senza inversione nella posizione primitiva da esso occupato.

In altro luogo sostiene pure la possibilità geometrica che manchi la ipotesi IV [2]).

«Sarebbe possibile, egli dice, una geometria nella quale ciò non avesse luogo. « Questo si vede nel modo più semplice per la geometria del piano. Si supponga che «in ogni rotazione di ciascuna figura piana le sue dimensioni lineari crescano pro-«porzionalmente all'angolo di rotazione, allora dopo un intera rotazione di 360 gradi «la figura non sarebbe più congruente alla sua posizione iniziale. Del resto ciascuna «altra figura che nella prima posizione fosse ad essa congruente potrebbe esserlo an-«che nella seconda quando fosse fatta ruotare di 360 gradi. Con questa ipotesi sa-«rebbe possibile un *conseguente sistema di geometria* non compreso nella forma «Riemanniana».

de Tilly ha per primo sostenuto che questa ipotesi per lo spazio deriva dalle precedenti: poi Lie e Klein, quest'ultimo con una dimostrazione molto semplice e intuitiva [3]). Per la geometria del solo piano l'assioma suddetto, come ha dimostrato Helmoltz stesso, é invece necessario.

Alla fine del suo lavoro egli nota anche la soluzione che ottiene per la geometria piana compatibile coi suoi assiomi, e cioè che il cerchio àbbia assintoti

---

1) Questa nota è un sunto della memoria citata e pubblicato precedentemente nelle Verh. der nat. medic. Verein zu Heidelberg del 1866, tradotta in francese da Hoüel nelle Mém. de la Soc. des sciences de Bordeaux, 1867. Helmoltz intitola questa ipotesi: *Ipotesi dell' indipendenza della forma dei corpi rigidi dalla rotazione.*

2) Populäre Wiss. Vorträge Heft. III, 41. Braunschweig. 1876.

3) de Tilly: Essai sur les principes fond. de la géométrie et de la mec. Bordeaux, 1879; Lie l. c.; Klein: Zur Nicht. Eucl. ecc. l. c, pag. 565.

reali. Secondo noi queste due soluzioni della geometria piana sono soluzioni improprie da doversi rigettare a *priori* perchè contrarie all'esperienza, sebbene matematicamente possibili [1]).

Lie dimostra nel senso spiegato che sono possibili i gruppi di movimenti dei sistemi Euclideo e non Euclidei, e diversi altri gruppi, fra i quali cinque in cui non ha luogo libertà di movimento pei punti di un intorno arbitrariamente piccolo. In questi gruppi tenendo fisso un punto, rimane fisso una certa cuva passante per esso, in modo che quando si tien fisso un punto, ogni punto assume ∞^2 posizioni, eccettuati quelli della classe suddetta. La distinzione molto importante di questi gruppi deriva dal concetto di posizione generale dato nella III ipotesi.

G. Cantor oltre l'osservazione già citata nota pure l'arbitrarietà della corrispondenza fra i punti dello spazio ordinario e i valori del continuo aritmetico (x, y, z). Difatti egli dice, è un'ipotesi a cui non ci si sente spinti da alcun bisogno quella che a ciascun sistema di valori razionali o irrazionali di x, y, z corrisponda realmente un punto dello spazio. Egli dimostra poi che si possono immaginare degli spazî discontinui nei quali fra due punti N e N' è possibile un infinito numero di movimenti continui. Un tale spazio si ottiene ad es. dall'ordinario separando da esso tutti quei punti le cui coordinate sono numeri algebrici. Egli conclude quindi che dal solo movimento continuo non si può nulla decidere intorno alla continuità dello spazio in tutto e per tutto, e che per conseguenza sarebbe utile lo studio della meccanica nello spazio discontinuo avente le proprietà sopra accennate per dedurre possibilmente dal suo confronto colla realtà qualche fatto in appoggio della perfetta continuità dello spazio dipendente dall'esperienza [2]).

Le ipotesi III e IV di Helmoltz sono certamente più intuitive di quelle di di Riemann, ma non si può dire altrettanto della prima e della seconda, oltre che il metodo di svolgimento è prettamente analitico e tutt'altro che elementare.

L'A. non si occupa poi di mostrare come dai suoi assiomi senza altre ipotesi si possano dedurre le proprietà fondamentali degli enti principali della geometria elementare.

Colle ipotesi di Helmoltz i movimenti infinitesimi intorno ad un punto scelto come origine delle coordinate sono dati dalle seguenti equazioni:

$$\frac{dx}{d\eta} = a_0 x + b_0 y + c_0 z + \ldots\ldots$$

$$\frac{dy}{d\eta} = a_1 x + b_1 y + c_1 z + \ldots\ldots$$

$$\frac{dz}{d\eta} = a_2 x + b_2 y + c_2 z + \ldots\ldots$$

Lie fa ad Helmoltz l'appunto di non tener conto nello svolgimento che ie coefficienti a_i, b_i, c_i possono annullarsi contemporaneamente pur soddisfacendo le equazioni di trasformazione alle ipotesi suddette. In tal caso però tutti i punti infinitamente vicini all'origine rimarrebbero fissi, facendo astrazione da grandezze infinitesime di 2º ordine. E difatti Lie trova un gruppo siffatto che corrisponde alle ipotesi di Helmoltz, compreso però il concetto di posizione generale dato nella III ipotesi, che a dire il vero in quella di Helmoltz non c'è.

---

1) Vedi pref.

2) Math. Ann. vol. XX, pag. 119, opp. Acta Math. vol. 2. Veggasi a questo proposito la nostra nota al § 1 del cap. IV della nostra introduzione.

Helmoltz aggiunge due altri assiomi:

V. Lo spazio è a tre dimensioni.

VI. Lo spazio è esteso all'infinito;

i quali assiomi, come egli stesso avverte non bastano ancora a separare il sistema di Euclide da quello di Lobatschewsky. Qui si osserva una certa confusione nelle denominazioni dell'assioma V e dei precedenti, nei quali per spazio ad n dimensioni s'intende una varietà ad n dimensioni (ip. I). La chiarezza nella discussione dei concetti fondamentali è un requisito principale, e ci pare che questo manchi nel lavoro di Helmoltz. Una più precisa scelta di nomi avrebbe forse risparmiato ad Helmoltz gli attacchi di alcuni filosofi [1]).

Egli ha pure cercato in uno splendido discorso di popolarizzare l'idea della possibilità dei tre sistemi di geometria valendosi di eleganti considerazioni fisiche e delle ricerche già note, specialmente delle memorie già citate di Beltrami. Helmoltz accenna che potrebbe non essere vero il principio che un corpo muovendosi non si deformi senza che ce ne accorgiamo, o nel nostro linguaggio che lo spazio vuoto possa non essere un sistema identico nella posizione delle sue parti, perchè si può concepire che lo spazio goda di questa proprietà e non abbia luogo invece il suddetto principio. In tal caso la curvatura dello spazio in ogni suo punto non sarebbe costante [2]).

Non è a credere però che il sistema di Lobatschewsky o quello sferico richiedano che ciò avvenga; ciò ha luogo soltanto nella rappresentazione dei suddetti sistemi nel sistema Euclideo.

Clifford a questo proposito dice: «ora potrà darsi che le lunghezze si alterino pel solo fatto che si trasportano da un luogo all'altro, senza che ce ne accorgiamo? Chiunqne voglia meditare seriamente su questa questione, finirà per persuadersi che essa è interamente priva di senso» [3]).

Altrove Helmoltz dice cbe gli assiomi si lasciano ricondurre ai tre seguenti:

1) Fra due punti è possibile una linea più corta, che chiamasi retta.

2) Per tre punti passa un piano. Un piano è una superficie nella quale giace interamente ogni retta che ha con essa due punti comuni.

3) Per un punto è possibile una linea, che è parallela ad una linea retta. Parallele sono due rette che giacciono nello stesso piano, e non si incontrano a distanza finita [4]).

Come si vede, Helmoltz adotta qui i principî citati di Klein, salve alcune differenze che non si possono ben giudicare non avendo egli definiti tutti i concetti che questi assiomi contengono.

Gli assiomi della precedente memoria di Helmoltz conducono al metodo (o ad uno simile) di costruire il piano e la retta mediante la sfera, il che, come si è visto, fu tentato da V. Bolyai e da Lobatschewsky.

Un libro importante che mette in relazione gli assiomi di Helmoltz coll'indirizzo di V. Bolyai è quello già citato di de Tilly [5]). Il metodo da cui

---

1) Vedi alla fine la nota sulla def. dello spazio e della geom. a più di tre dimensioni.

2) Vedi anche Erdmann, l. c, pag. 59-60.

3) l. c.

4) Die Thalsachen etc. l. c.

5) Il valente geometra belga si è occupato per primo della meccanica astratta in una memoria presentata nel 1868 all'Accademia del Belgio e pubblicata nelle Mémoires couronnées del 1870. Questa memoria si divide in cinque parti: la 1.a parte contiene un'esposizione sommaria della geometria

parte è sempre analitico, sebbene nello svolgimento egli voglia far uso del metodo sintetico.

Egli dà le prime nozioni empiriche di superficie, di linea e di punto, e spiega come il punto possa essere determinato da tre grandezze (coordinate) indipendenti e variabili in modo continuo, ammettendo però l'ipotesi che intorno ad un punto possa essere costruito un sistema continuo di superficie chiuse inviluppantesi le une colle altre e senza punti o linee singolari. Le nozioni di de Tilly oltre che su queste proprietà di cui fa uso altrove, hanno il loro fondamento sulle tre dimensioni dello spazio, che non dà come assioma. Non definisce astrattamente la linea e la superficie, ma dal metodo analitico si sa che cosa devono essere.

Alle nozioni tien dietro il primo assioma composto di due parti, che egli chiama assioma della distanza. Questa è introdotta come una grandezza « di cui abbiamo la nozione intuitiva o sperimentale e comparabile con le grandezze della medesima specie considerate nello stesso tempo o in tempi diversi »; non dice però di quale specie essa sia. L'assioma è il seguente:

a) « La distanza varia nello spazio in modo continuo, vale a dire se si considera « una linea limitata qualunque AB, la distanza dei punti di questa linea ad una « delle due estremità, per es. B, varia in modo continuo da AB fino a zero. Però se « la linea AB è qualunque, la distanza in questione potrà avere dei massimi e dei « minimi, ma senza cessare d'essere continua; e poichè essa deve tendere a zero, « vi sarà necessariamente nella vicinanza del punto B una regione $B'B$ nella quale « la distanza del punto B andrà sempre diminuendo, se si cammina verso B, e crescendo se si parte da B.

b) « Essendo dato un sistema di punti in numero finito o infinito $ABCD$.... (in « altri termini una figura qualunque) e un punto B' tale che $AB' = AB$, esistono dei « punti $C'D'$... tali che il sistema $A'B'C'D'$... è assolutamente identico al primo; vale « a dire che in questi due sistemi le distanze fra le coppie dei punti corrispondenti « od omologhi sono tutte uguali a due a due, intendendo per punti omologhi o corrispondenti quelli indicati da una medesima lettera ».

Introdotta l'idea di movimento de Tilly dà un'altra forma alla 2ª parte del suo assioma, cioè:

« Essendo dato un sistema di punti in numero finito o infinito $ABCD$... (in altri « termini una figura qualunque) e un punto B' dello spazio tale che $AB' = AB$, il « sistema dato si può *muovere* intorno al punto A tenuto *immobile* in modo che questo « sistema rimanga *invariabile*, e che il punto B sia portato in B', intendendo che la « invariabilità di un sistema consista nell'invariabilità di tutte le distanze fra i punti « che lo compongono ».

---

astratta, ove basandosi su considerazioni meccaniche svolge dapprima la trigonometria cinematica piana e sferica; la 2.a parte dà alcuni complementi di geometria, sempre sotto il punto di vista meccanico; la 3.a si occupa della cinematica; la 4.a della statica; e infine la 5.a della dinamica. E arriva alla importantissima conclusione che nulla si oppone nella meccanica teoretica ad ammettere che la somma degli angoli del triangolo rettilineo sia minore di due angoli retti.

Non possiamo discutere i principî esposti in questo interessante e originale lavoro, perchè ciò ci condurrebbe lontani dallo scopo che qui ci siamo prefissi, sebbene si tratti di argomento molto affine al nostro.

Genocchi si è pure occupato contemporaneamente al de Tilly di alcuni principî della meccanica astratta, ma nel senso di trovare piuttosto un punto di appoggio alla geometria Euclidea, che di arrivare alla conclusione citata di de Tilly (Mem. della società dei XL l. c. ecc.).

Della geometria non Euclidea il de Tilly si occupò anche nel Bull. de l'Ac. Roy. de Belgique serie 2, t. XXX, 1870 pag. 28-37; t XXXVI, p. 124; 3 serie t. XIV, 1887; Bull. de Darboux t III, 1872 pagina 131-138.

Egli aggiunge però che questa seconda forma non è una traduzione letterale della redazione primitiva, poichè non soltanto si ammette per questo assioma l'esistenza dei due sistemi identici $ABCD$...., $A'B'C'D'$.., ma una serie continua di sistemi tutti identici, e dei quali ciascuno è infinitamente vicino a quelli che lo precedono e a quelli che lo seguono. Ma questa proprietà, egli dice, è una conseguenza dell'assioma dato nella prima forma, vale a dire del principio di continuità combinato con l'esistenza del sistema identico ad $ABCD$... per qualunque posizione del punto B'.

Anzitutto dalla prima forma non risulta punto la continuità dello spazio come egli la suppone, lo che deriva anche dalla ultima osservazione già citata del Cantor, e inoltre de Tilly non dimostra come dall'assioma nella prima forma i due sistemi $ABCD$..., $A'B'C'D'$... appartengano ad un sistema continuo di sistemi ad essi identici; imperocchè è chiaro che la seconda redazione dell'assioma ammette qnalche cosa meno e qualche cosa più della prima. Ed invero secondo la definizione data di figure identiche i due sistemi $ABCD$..., $A'B'C'D'$... possono essere anche di verso opposto, per es. due triedri opposti al vertice. Se così é, non è vero che per la continuità essi appartengano nello spazio a tre dimensioni ad una serie continua di triedri ad essi identici. Nella seconda redazione invece si ammettono questi sistemi, ma allora le figure sono congruenti, vale a dire identiche e del medesimo verso in S_3. Se de Tilly intendeva accennare soltanto alle sole figure congruenti nella prima redazione, come appare anche da quanto dice a pag. 17 del suo libro sul movimento dei corpi rigidi ove l'identità e la congruenza sono la stessa cosa, allora la sua definizione di figure identiche è troppo generale, perchè comprende anche le figure simmetriche. Doveva dunque nella prima redazione aggiungere la condizione che i due sistemi $ABCD$..., $A'B'C'D'$..., appartengano ad un sistema continuo, esaminando poi se sia o no necessaria la condizione imposta da Helmoltz alle linee descritte nel movimento nella definizione della congruenza, questione di cui noi pure ci siamo occupati. In tal caso però per provare la identità di due figure non occorre soltanto dimostrare la uguaglianza delle distanze, ma eziandio che è verificata l'altra condizione suddetta [1]).

Siccome de Tilly fa poi uso continuo dell'intuizione del movimento senza deformazione, per il modo con cui l'adopera in parecchie dimostrazioni, non si può dire che egli abbia resa la geometria indipendente dall'intuizione del movimento stesso, anzi si nota nell'autore della meccanica astratta una forte tendenza a trattare la geometria con considerazioni meccaniche.

L'A. ammette in seguito l'assioma che la distanza possa diventare infinitamente grande (che corrisponde alla VI ipotesi di Helmoltz) e da ultimo dà il postulato delle parallele di Euclide. Nelle nozioni di de Tilly è compresa in fondo la prima ipotesi di Helmoltz, e nell'assioma della distanza la seconda ipotesi, con questo che Helmoltz definisce la distanza come una quantità o una funzione delle coordinate. Così pure nel suddetto assioma dato nella 2ª redazione è compresa la possibilità del movimento di rotazione intorno ad un punto fisso, ma non ammette in esso che ogni altro punto possa

1) Vedi pref., pag. 203-205 e la nota sul movimento.

acquistare ∞^2 posizioni. Egli non dimostra una tale propritā, mentre senza di essa non è possibile la sfera. L'assioma di de Tilly contiene però una condizione di più, cioè la continuità della distanza quando il punto si muove in una linea.

de Tilly dà due teoremi che sono fondamentali nella sua ricerca, e cioè che in ogni linea e in ogni superficie a partire da un punto vi è una *«région à croissance continue»* finita, nel senso che le distanze di un punto A ad es. di una linea dagli altri punti della linea vanno in un tratto finito sempre aumentando fino ad un determinato valore δ diverso da zero; e poichè egli non dà la definizione della linea e della superficie e si appoggia al metodo analitico, le dimostrazioni di questi teoremi lasciano insoddisfatti, e avrebbero certo bisogno almeno di un maggiore svolgimento per far vedere che nessun'altra ipotesi è qui nascosta [1]). Osserviamo ancora che nella dimostrazione delle proprietà della sfera, egli si serve dell'assioma che la distanza di due punti può essere infinita, mentre la sfera ne è indipendente. Il modo appunto di cui fa uso dell'intuizione del movimento e del tempo lascia pure spesso perplessi sul rigore della dimostrazione, ad es. della dimostrazione alla pag. 32, che se un sistema invariabile si muove intorno ad un punto fisso, un punto mobile A si porta in B e nello *stesso momento* B si porta in C ecc. e si ottiene una linea che scorre su sè medesima. Così non ci pare soddisfacente la dimostrazione che due punti AB determinano la linea retta, la quale, dalla sola esistenza di superficie generate da tratti di linea AMB le une dentro alle altre, stabilisce che il volume generato da esse ha per limite una linea AB.

Subito dopo il 1° assioma egli si appoggia sul fatto che la distanza di due punti può aver tre espressioni analitiche diverse, come dimostra poi alla fine del suo libro, le quali corrispondono ai tre sistemi di geometria più volte citati. A parer mio vi è però un'imperfezione in questo metodo, cioè che il calcolo dato a pag. 158 per determinare la funzione della distanza non è derivato subito o poco dopo l'assioma stabilito, come avrebbe dovuto essere, ma bensì anche dall'uso di tre assi ortogonali e delle formole di trigonometria generale, fondate sulle conseguenze lontane di quell'assioma. In altre parole de Tilly da principio ammette il fatto che la distanza di due punti può avere tre espressioni analitiche diverse che soddisfano al suo assioma, e ne trae le conseguenze.

Il piano secondo de Tilly viene generato da una retta normale ad un'altra retta che la incontra e ruota intorno ad essa [2]). L'angolo è dato secondo lui da due rette o da due raggi limitati da un punto comune.

---

1) Veggasi anche Killing: Erw. des Raumsbegriffs, pag. 3.

2) Crelle (l. c.) attribuisce a Fourier la priorità di questa definizione del piano. Nelle Séances des écoles normales citate Fourier propone, come Leibniz, di definire la retta come luogo dei punti che hanno rispettivamente la stessa distanza da tre punti fissi. e il piano come luogo di punti che hanno rispettivamente la stessa distanza da due punti fissi, definizione che non furono però approvate da Monge. Rispondendo a Fourier questi osserva: «le considerazioni di cui fai uso nella tua definizione hanno qualche cosa di più complicato della linea retta che tu vuoi definire; e suppongono un'abitudine della geometria che non si può avere acquistata senza la nozione della linea retta». Cassani ha particolarizzato la suddetta definizione della retta usata anche da Genocchi (l. c.) supponendo che la terna di punti sia equilatera o come egli dice *regolare*. (I nuovi fond. della geom. Giorn. di Battaglini, vol. XX).

Abbiamo già dette le ragioni nella prefazione e nell'introduzione per le quali non è conveniente scegliere a fondamento della geometria il concetto di distanza senza quello della retta. E per ora neppure coloro che intendono con questo concetto la coppia di punti anzichè una funzione delle coordinate, che poi in fondo esprime la lunghezza del segmento rettilineo compreso fra i due punti, hanno saputo evitare il concetto numerico, anche se lo hanno evitato apparentemente, poichè non hanno ben stabilito per via puramente geometrica quando una coppia è maggiore o minore di un'altra senza cui non si può definire la parte interna ed esterna della sfera e la continuità di queste parti. Osservo qui ancora che nei lavori i quali si svolgono col concetto della distanza o con quello di coppia, oltre che fa bisogno di operare direttamente nello spazio a tre o a n dimensioni, chè un tale metodo non è applicabile nello spazio generale, non si studia dapprima il problema se una sfera abbia uno o più centri, perchè anche per ogni raggio r sufficientemente piccolo è possibile immaginare a priori che ne abbia più d'uno. Difatti nelle nostre ricerche prima di deciderci per l'uno o l'altro dei sistemi conosciuti, abbiamo dovuto supporre che vi siano coppie di punti vicinissimi che non determinino la retta; e soltanto dopo abbiamo dimostrato che il gruppo di punti che a due a due non determinano la retta è finito, e poi che nella retta aperta non vi è alcuna coppia di questi punti, mentre sulla retta chiusa soltanto i punti opposti possono avere tale proprietà. Questa ricerca sulla sfera, pare a noi, dovrebbe premettersi allo studio dell'intersezione di due sfere. Di più a coloro che come V. Bolyai vogliono seguire il metodo geometrico puro si può chiedere come definiscano il continuo dello spazio di cui hanno bisogno.

Dal libro di de Tilly, ove il concetto di distanza come concetto fondamentale, e la generazione della retta e del piano per mezzo della sfera si trova trattata con maggior cura ed esito che negli altri, si riconoscono meglio i difetti e le difficoltà di questo metodo. Rispetto poi all'insegnamento l'A. stesso, quando applica le sue ricerche al trattato di geometria elementare di Rouché e Comberousse riconosce esplicitamente l'impossibilità di seguire il suo metodo nella dimostrazione delle proprietà fondamentali della retta e del piano.

Nonostante però questa critica, non è a credere che il libro di de Tilly non meriti molta considerazione dal punto di vista generale dei metodi sui principî della geometria; imperocchè se abbiamo fatto qua e là delle osservazioni, non abbiamo però detto che i difetti non si possano togliere compatibilmente col metodo scelto.

Molti si sono provati prima e dopo di de Tilly a far senza dell'assioma del piano, dando di esso una costruzione o mediante due serie di sfere congrue concentriche, oppure mediante la rotazione di una retta normale ad un'altra e che la incontra in un punto. Noto fra questi oltre agli autori già nominati Dehana, Gerling, Erb, Crelle, Duhamel, Flie S. Marie, Cassani e Frischauf [1]).

---

1) Dehana: Diss inaug. Marburg, 1837 — Gerling: Giorn. di Crelle vol. 20 pag 332. — Erb: Die Probl. der geraden ecc. Heidelberg, 1846. — Crelle: l. c. — Duhamel: Des méthodes dans les sciences

Questo metodo in fondo ha da una parte la sua origine avuto forse in un malinteso, e cioè che la linea retta non si possa definire, mentre si dice si può definire la sfera. Ora è chiaro, come abbiamo fatto vedere nell'introduzione, che bisogna partire almeno da una forma fondamentale che non si può *costruire*, ma la cui *definizione* si può dare mediante le sue proprietà che servono a distinguerla dalle altre forme; e noi abbiamo fatto anche vedere nell'introduzione come sia più conveniente di scegliere come forma fondamentale il sistema continuo di elementi identico nella posizione delle sue parti e determinato dal minor numero di elementi, quando esso esista come nella geometria. Ora nel metodo suddetto, come forma fondamentale o si considera la distanza o la coppia di elementi. D'altronde la sfera per essere costruita ha bisogno appunto della definizione di spazio a tre o a n dimensioni, e che per questa vi sono maggiori difficoltà che per la definizione della retta.

D'altra parte il detto metodo ebbe un'origine più giustificata nell'osservazione già citata di Gauss sull'imperfezione dell'assioma del piano; che da noi si trova completamente tolta senza ricorrere alla sua generazione mediante la sfera o mediante il movimento di rotazione di una retta. Abbiamo data la dimostrazione pel solo sistema Euclideo basandoci sulla teoria delle parallele, mentre per il sistema Riemanniano abbiamo fatto uso dell'ip. VII. Crediamo ad una possibile dimostrazione indipendentemente dal postulato delle parallele, e abbiamo detto altrove le ragioni di questa nostra credenza, indicando anche la via secondo la quale riteniamo si possa riuscire [1]).

Duhamel nel vol. II del suo ottimo libro citato dà dell'assioma del piano una dimostrazione più empirica che geometrica. È degno di nota il metodo elegante con cui egli introduce il concetto di lunghezza delle linee e ne svolge le conseguenze.

Cassani ha il merito di essere stato uno dei primi in Italia ad occuparsi dei principî della geometria seguendo l'indirizzo di V. Bolyai e di Helmoltz, sebbene egli non distingua bene in principio gli assiomi dalle definizioni. Cassani nella sua *Geometria rigorosa* ha riconosciuto la necessità di dimostrare che due sfere non possono tagliarsi che in una circonferenza, e quindi studia con maggior cura che negli altri lavori analoghi l'intersezione di due sfere. Non sempre però le sue dimostrazioni soddisfano interamente.

Il libro di Frischauf è manchevole dal lato dei concetti fondamentali, e quindi non si può dire che egli abbia raggiunto lo scopo «di poter chiarire a quei lettori che ne sentono bisogno le oscurità degli elementi» perchè le sue dimostrazioni da principio hanno molte lacune alle quali il lettore deve supplire con la propria intuizione; ma ottenuta la retta ed il piano egli procede con metodo geometrico semplice alla trattazione sistematica della geometria elementare, specialmente di Lobatschewsky, e dà un cenno dei concetti fondamentali dei lavori di Riemann, di Helmoltz e di Beltrami.

Con spirito geometrico sono dettati gli assiomi di Hoüel nel suo citato opuscolo. Il primo di essi stabilisce che la posizione di una figura nello spazio è fissata da tre dei suoi punti in generale; il secondo afferma l'esistenza della linea retta determinata da due qualunque dei suoi punti, e tale che ogni porzione di essa si applica esattamente sopra ogni altra porzione, allorquando queste due porzioni hanno

---

de raisonnement, 1866. — Flie S. Marie l. c. — Cassani: Geometria rigorosa — Venezia 1872. Intorno alle ipotesi fondamentali della geom. Giorn. di Battaglini vol. XI e XX. — Frischauf: Elem. der abs. Geometrie; Leipzig, 1876.

1 Vedi pag. 379-380.

due punti comuni; il terzo riguarda la esistenza del piano che contiene ogni retta avente con esso due punti comuni, e del quale ogni porzione può essere applicata esattamente sulla superficie piana stessa, sia direttamente, sia dopo averla capovolta facendole eseguire una mezza rotazione intorno a due dei suoi punti; e finalmente il quarto assioma dice che per un punto si può condurre una sola parallela ad una retta data. Ma sia per il modo con cui sono esposti sia per la sostanza non si può dire che essi soddisfino al rigore che l'A. stesso reclama. Sono notevoli e degne di considerazione le osservazioni che egli fa intorno all'insegnameuto della geometria nelle scuole secondarie.

Un altro importante indirizzo in questi studî dal punto di vista generale, e al quale abbiamo già accennato parlando dei lavori di Helmoltz, è quello di riguardare la teoria geometrica di una data varietà come quella di un gruppo finito continuo di trasformazioni. Il primo a introdurre questo concetto di gruppo fu il Lie, e la teoria feconda di questi gruppi va gia acquistando ognora maggiore importanza per le sue svariate applicazioni, mercè appunto il trattato fondamentale di Lie su questa teoria [1]. Però Klein quasi alla stessa epoca fu il primo ad introdurre questo concetto nello studio della geometria nel senso anzidetto [2]. Egli chiama *gruppo principale* quello che lascia inalterate le proprietà di un ente geometrico. Questo gruppo nello spazio ordinario si compone delle trasformazioni corrispondenti ai movimenti in numero sei volte infinito, delle trasformazioni simili in numero semplicemente infinito e delle trasformazioni per simmetria rispetto ad un piano. Da questo concetto così capitale il Klein fa discendere le diverse teorie geometriche, poichè ciascuna di esse è caratterizzata da un gruppo che contiene il gruppo principale. Così ad es. fa vedere che il gruppo della geometria metrica ordinaria è contenuto nel gruppo delle trasformazioni lineari, che corrisponde alla geometria proiettiva, e così per un teorema di Beltrami osserva che anche il gruppo corrispondente ad una varietà di curvatura costante mediante conveniente determinazione delle coordinate è contenuto nel gruppo delle trasformazioni lineari, e che quindi la trattazione di una tale varietà è compresa in quella proiettiva.

Lie, come dicemmo, posti gli assiomi di Helmoltz sotto una forma più precisa applica la sua teoria. Mentre Klein si limita a considerazioni genereli, il Lie invece determina tutti i gruppi continui di trasformazioni corrispondenti ai movimenti dello spazio che soddisfano agli assiomi suddetti colla modificazione indicata. Abbiamo già accennato agli importanti risultati dei lavori di Lie già comunicati nella sua prima nota del 1886 [3]. Rileviamo qui che il metodo di Lie è prettamente analitico, e che trovati i gruppi di trasforma-

---

1) Theorie der Transformationsgruppen; Leipzig 1888-1890.

L'origine di questa teoria si trova in quella dei gruppi di sostituzioni di n oggetti, ove però si tratta soltanto di gruppi discreti. Va segnalata in questa teoria la memoria di C. Jordan sui gruppi di movimenti dello spazio (Annali di Mat. serie II, vol. II), la quale ha però un carattere speciale rispetto alla teoria generale.

La def. di gruppo di trasformazioni in generale data da Lie (Atti della Società delle scienze di Cristiania, 1871) è questa. Dato un sistema finito o infinito di traformazioni fra x e x', esso si chiama un gruppo quando due trasformazioni del sistema eseguite l'una dopo l'altra danno un' altra trasformazione che appartiene allo stesso sistema.

2) Vergleich. Betr. ecc. l. c. e Math. Annalen, VI

3) Ci dispiace che avendo conosciuto l'ultimo lavoro citato di Lie soltanto poco tempo fa non abbiamo potuto prendere cognizione della prima parte di esso.

zioni non si occupa di far vedere come da essi si possa svolgere la geometria elementare.

In questo indirizzo va citato un lavoro dell'eminente matematico francese sig. Poincaré [1]. L'A. ammette come conosciuta l'algebra e l'analisi e parte dai due assiomi:

A. **Il piano è a due dimensioni.**

B. **La posizione di una figura nel suo piano è determinata da tre condizioni.**

Applicando la teoria dei gruppi questi due assiomi conducono ai gruppi delle geometrie che Poincaré chiama *quadratiche*, e ad altri gruppi i quali si separano dai primi mediante l'assioma:

C. **Quando una figura piana non abbandona il suo piano, e due dei suoi punti restano immobili, la figura resta tutta immobile.**

E per scegliere fra le geometrie quadratiche dà l'assioma:

D. **La distanza di due punti non può essere nulla se non quando i due punti coincidono.**

Oppure:

E. **Allorquando due rette si incontrano, l'una di esse può ruotare intorno al punto d'intersezioue in modo da coincidere con l'altra.**

Per scartare la geometria sferica (non però la 2ª forma Riemanniana) dà l'assioma:

F. **Due rette non possono tagliarsi che in un solo punto.**

E finalmente per avere il sistema Euclideo:

G. **La somma degli angoli di un triangolo è costante.**

Da quest'ultimo assioma, egli dice, derivano le ipotesi *D*, *E* ed *F*.

Come si vede egli tratta del problema nel solo piano, nè si sa se gli assiomi che avrebbe dato trattando dello spazio avessero escluso tutti o in parte questi assiomi del piano.

Poincaré ritiene come possibili sistemi di geometria che secondo noi non lo sono, ad es. un piano nel quale una retta ruotando intorno ad un punto non possa assumere sempre la posizione di un'altra retta passante per lo stesso punto; che come Klein aveva già prima notato non corrisponde all'esperienza nel campo delle nostre osservazioni [2].

L'illustre autore asserisce che *nessuno* degli assiomi dati nei trattati di geometria elementare ha il carattere di assioma, ma avrebbe fatto bene, ci pare, di dare delle spiegazioni in proposito, poichè ad es. l'assioma che egli cita in appoggio alle sue considerazioni «due quantità uguali ad una terza sono uguali fra loro» da gran tempo non è riconosciuto dai geometri come un assioma geometrico [3]. Egli fa inoltre uso fin da principio per stabilire i suoi assiomi delle proprietà delle superficie di 2° grado, sulle quali con pro-

---

1) Sur les hyp. fond. de la géom. Bull. de la S. M. de France, 1887. In questo indirizzo va anche citato il lavoro anteriore di Killing: Erweiterung ecc. l. c.

2) Math. Ann. Vol. 4 pag. 590. — Vedi la nostra pref.

3) Vedi pag.

cedimenti puramente convenzionali stabilisce le nozioni della distanza e dell'angolo seguendo quelle di Klein.

Sarebbe interessante di vedere svolta la geometria elementare con questi assiomi (modificandoli per lo spazio ordinario) per poter giudicare se essi abbiano quel carattere di assiomi geometrici che egli non attribuisce a tutti quelli ad es. di Euclide.

Daremo ora alcune notizie sugli assiomi di H. Grassmann e del sig. V. Schlegel.

Grassmann nella sua *Ausdehnungslehre* del 1844 dà il seguente assioma [1]).

«Lo spazio è uniforme in tutti i luoghi e in tutte le direzioni; vale a dire in «tutti i luoghi e in tutte le direzioni si possono eseguire uguali costruzioni.

Oppure:

1) «si può immaginare un' uguaglianza in diversi luoghi;
2) «si può immaginare un'uguaglianza in diverse direzioni, e particolarmente an- «che in direzioni opposte».

E chiamando costruzioni *uguali* e *dirette* nel *medesimo verso* (gleichläufig) quelle che risultano nello stesso modo in diversi luoghi, *assolutamente uguali* quelle che differiscono solo pel luogo e per la direzione, ed *uguali* e *dirette* in verso *contrario* (ungleichläufig) quelle che vengono generate nello stesso modo in diversi luoghi e in direzione contraria, Grassmann pone il suo assioma anche sotto la forma seguente:

1) «Ciò che è determinato da costruzioni uguali e dirette nel medesimo verso è «pure uguale e diretto nel medesimo verso».
2) «Ciò che è determinato da costruzioni uguali e dirette in verso opposto è pure «uguale e diretto in verso opposto.
3) «Ciò che è determinato da costruzioni uguali in senso assoluto (anche in di- «versi luoghi e secondo diverse direzioni iniziali) è pure assolutamente uguale».

La relativa limitazione dello spazio viene stabilita dal seguente assioma:

«Lo spazio è un sistema di 3ª specie (a tre dimensioni).

A schiarimento di questi assiomi, Grassmann, come egli stesso dice, si riferisce a quanto stabilisce precedentemente per l'*Ausdehnungslehre*. Egli aggiunge poi:

«Che questi assiomi bastino per la geometria può soltanto essere dimostrato «collo sviluppo della geometria stessa da questo embrione. La proprietà che fra due «punti è possibile una sola retta, o come si esprime Euclide, che due rette non «racchiudono alcun spazio, ... è contenuta nel primo assioma giustamente inter- «pretato; invero se due rette aventi un punto comune ne avessero un altro, lo «spazio in questo secondo punto si comporterebbe diversamente che nel primo, se le «due rette non avessero tutti i loro punti comuni, oppure non coincidessero».

Evidentemente questa è una dimostrazione che non regge; anche intorno a due punti opposti nel sistema sferico lo spazio si comporta ugualmenle, eppure per essi passano infinite rette. L'A. stesso dubita della sua esattezza.

1) Pag. 36 e seg.

Tralasciando pure di osservare che in questi assiomi sono compresi concetti così complessi, il guaio è che questi concetti ridotti in parti semplici non sono ben definiti nelle premesse dell'*Ausdehnungslehre.* Come ho osservato egli parte dal concetto del continuo e del discreto definendoli in una forma che lascia adito a molte critiche [1].

Al § 14 egli dice:

«L'ente estensivo di 1ª specie è *semplice* quando le variazioni (dell'elemento) «sono uguali fra loro, dimodochè se con una variazione da un elemento a si ottiene un «elemento b, e ambedue appartengono al detto ente estensivo semplice, allora con «una variazione uguale dall'elemento b viene generato un elemento c del medesimo «ente; e questa uguaglianza ha ancora luogo quando a e b sono due elementi successi- «vi in modo continuo (stetig an einandergränzende). perchè questa uguaglianza deve «aver luogo durante la generazione continua».

E poi:

«L'uguaglianza del modo di variazione viene rappresentata nella geometria «dall'uguaglianza di direzione, la linea retta infinita si presenta come sistema sem- «plice di 1ª specie».

Chiama grandezze dello stesso verso quelle che risultano dalla continuazione dello stesso modo di generazione (die durch Fortsetzung derselben Erzeugungsweise hervorgehen); tali sono tanto le grandezze positive come le negative; mentre una grandezza positiva e una negativa le chiama di verso opposto. Sia le grandezze dello stesso verso come quelle di verso opposto le chiama «gleichartige». E al § 14 continua:

«Ciò che nell'Ausdehnungslehre si chiama *gleichartig* appare nella geometria «come *parallelo*, ed il parallelismo presenta parimenti due faccie, quale parallelismo dello stesso verso e di verso opposto». E propone anzi di distinguerlo con le due parole *gleichläufig* e *ungleichläufig* usate nella terza forma dell'assioma.

È chiaro che qui Grassmann allude al parallelismo di Euclide, come dimostra l'esempio da lui dato al § 23. Anzi l'assioma suddetto nella terza forma, come prova quell'esempio, contiene come caso particolare quello che se due triangoli hanno due lati paralleli anche i rimanenti lati sono paralleli.

Osserviamo che al sistema semplice di 1ª specie si possono far corrispondere nella geometria tutte le linee omogenee e i sistemi omogenei ad una dimensione, e non la retta soltanto, e in secondo luogo che Grassmann pone a fondamento della geometria il concetto di direzione che corrisponde a quello di variazione.

Dal concetto di variazione tenta dedurre la proprietà fondamentale del piano (§ 18 e 21), e qui cade in maggiore oscurità per la mancanza di una definizione del continuo; ma una tale dimostrazione mediante la nostra corrispondenza di proporzionalità può essere resa rigorosa. Grassmann genera il piano mediante due serie di rette parallele, che per una proprietà che è immediata conseguenza dell'assioma sopra accennato, si incontrano fra loro. Una certa analogia c'è fra il concetto della dimostrazione di Grassmann e il nostro, ma noi non ammettiamo l'assioma suddetto ed il teorema fondamentale sul triango-

1) Vedi la nostra nota della pag. 132.

lo [1]), lo deriviamo dall'assioma delle parallele insieme cogli altri assiomi; nè noi generiamo il piano nel modo indicato da Grassmann, nè dimostriamo la proprietà suddetta del piano cogli stessi concetti.

A titolo di giustificazione va però detto che egli non ha inteso di svolgere il problema dei fondamenti della geometria; che se lo avesse fatto, avrebbe certamente determinato meglio i suoi assiomi; ma difficilmente, crediamo, avrebbe potuto stabilire un sistema rigoroso partendo dal concetto di direzione anzichè da quello della retta.

Nè il libro *System. der Raumlehre* [2]) del sig. V. Schlegel, che costantemente ha cercato di mettere in luce i pregi dell'*Ausdehnungslehre*, ci pare più fortunato. Osserviamo anzitutto che in questo libro gli assiomi non sono ben distinti dai teoremi, mentre una tale distinzione è necessaria in un trattato che si propone di studiare con rigore i principî della geometria (pref. pag. X e XII). E poichè anche il sig. Schlegel parte come Grassmann dal concetto di direzione, così crediamo opportuno di sottomettere i principî di questo libro ad un esame particolareggiato trattandosi come si vede di un nuovo indirizzo in questi studî.

A pag. 3 lo Schegel dà la seguente definizione di *direzione*. «Vi è una molteplicità (Menge) illimitata di movimenti tra i quali un punto ha da scegliere nel «principio della sua variazione. Il contrassegno di un tale movimento iniziale si «chiama *direzione*» precisamente secondo il concetto di Grassmann.

E a pag. 4 soggiunge: «Un punto *mobile determinato* (bestimmter bewegter Punkt) equivale ad una serie di punti fissi arbitrari».

Non si sa che cosa siano i punti fissi, la variazione, la serie; se questa sia o no continua, e in tal caso quale sia la definizione di continuità. Lasciando dunque da parte il concetto di movimento, che sembra egli voglia poi evitare, la definizione di direzione significa che due punti consecutivi della serie determinano una *direzione*.

Lo Schlegel a pag. 3 continua:

«Se il punto continua nel movimento iniziale, il suo movimento totale si chiama «*semplice*.

«Il contrassegno di un movimento semplice è la direzione».

Evidentemente qui è nascosto il concetto della linea retta, senza la quale non sappiamo comprendere come un punto possa continuare il movimento nella direzione iniziale. E difatti lasciando il movimento, che spesso c'inganna nella discussione dei principî, ciò significa che se si hanno due direzioni AA', $A'A''$ esse sono uguali se sono situate in linea retta. Invece lo Schlegel, seguendo Grassmann, si serve del concetto di direzione per definire la retta. Egli dice a pag. 6:

«Quando un punto muta la sua posizione mediante un movimento semplice, «l'ente geometrico da esso generato (il suo cammino), si chiama linea *retta*.

«Le proprietà della linea retta sono determinate 1) dalla *posizione* (Lage) di uno «dei suoi punti generatori; 2) da una determinata *direzione* (Richtung) del movimento «di questo punto».

---

1) Vedi pag. 296.
2) Leipzig, 1872.

«I contrassegni di una retta sono: *posizione* e *direzione*. Ciascun punto sopra «la medesima retta può generarla. Ciascuno di questi punti divide *perciò* (daher) la «retta in due parti, e può muoversi in due direzioni».

Ma anche sulla sfera un punto può muoversi in due direzioni opposte nel cerchio massimo, e due punti infinitamente vicini determinano uno di questi cerchi massimi; eppure un punto non divide la circonferenza in due parti. Il *perciò* dunque non va.

«Ciascuna retta rappresenta perciò *due direzioni* opposte e una *determinata* «*classe* di *posizioni* (s'intende di punti). Mediante *un* punto qualunque sopra di essa «è determinata la *posizione* di una retta e mediante un *secondo* punto la *direzione*, «perché questo secondo punto può essere considerato come un'ulteriore posizione «del primo, e quindi indica anche la direzione del movimento»,

Egli tenta dedurre che nel movimento di un segmento sopra una retta se (AB), (A_1B_1) sono due delle posizioni del segmento, si ha $(AA_1)\equiv(BB_1)$; ma questa proprietà non è in generale dimostrata perchè occorre per essa la legge commutativa. Anche in Grassmann pei seguenti incommensurabili manca una dimostrazione rigorosa di tale proprietà. Nè dalle sue premesse risulta che $(AB)\equiv(BA)$.

A pag. 18 prima di parlare del piano lo Schlegel scrive:

«se una retta ha cambiato la sua posizione, nessun punto può appartenere all'una e all'altra retta; altrimenti potrebbe questo punto generare le due rette, vale a «dire esse avrebbero la stessa posizione»;

mentre nel sistema Euclideo due rette aventi la stessa direzione hanno nel senso nostro un punto comune reale all'infinito, e possono medesimamente considerarsi come posizioni diverse di una stessa retta. Qui dunque si suppone tacitamente escluso l'infinito attuale.

Schlegel chiama Schiebung (traslazione) il cambiamento di posizione di una retta.

«Come la *posizione* di una retta è pienamente determinata da un suo punto «qualunque, così il suo *cambiamento* di *posizione* è determinato da quello di uno «dei suoi punti».

«Chiamiamo *semplice* il movimento della retta, quando lo è quello di ciascuno «dei suoi punti, vale a dire quando ciascuno dei suoi punti descrive una retta «arbitraria».

«Quando una retta cambia la sua posizione mediante un movimento *semplice*, «l'ente così generato si chiama *piano* (superficie piana).

Secondo questa definizione però l'ente generato può essere anche per un es. iperboloide ad una falda.

«Le proprietà del piano sono determinate:

«1) mediante la *posizione* e *direzione* di una sua retta generatrice;

«2) mediante *posizione* e *direzione* di una seconda retta che viene percorsa da «un punto della prima;

«oppure, siccome le due rette possono essere determinate dalla *stessa posizione*;

«1) mediante *posizione* e *direzione* di una retta generatrice;

«2) mediante la *posizione* di un *punto arbitrario fisso* fuori di questa retta nel «piano, ovvero se si sostituisce la retta in 1), mediante due dei suoi punti:

«1) mediante la posizione di tre dei suoi punti non situati in linea retta».

«I contrassegni del piano sono dunque: *una posizione* e due *direzioni*; oppure «due *posizioni* ed *una direzione*, oppure *tre* posizioni.

Anche quì non si comprende come dalla prima definizione si possa ricavare l'ultima di esse.

Dopo aver stabilito così le proprietà fondamentali delle rette e del piano l'autore applica il calcolo di Grassmann.

Lo scopo quindi di Schlegel espresso a pag. XII rispetto ai fondamenti della geometria non si può dire raggiunto. Preferiamo che le questioni difficili siano poste nettamente, e si cerchi di risolverle anzichè nasconderle in una forma più o meno involuta. Per il secondo scopo di Schlegel, d'invogliare cioè i matematici allo studio dell'*Ausdehnungslehre* avrebbe fatto meglio, ci pare, di ammettere i principî della geometria Euclidea tali e quali sono conosciuti. Quanto all'importanza che ha avuto ed ha oggidì o potrà avere l'analisi geometrica di Grassmann non possiamo quì occuparci. Alla poca considerazione in cui fu tenuto Grassmann vivente, nonostante la sua opera profonda e le altre sue ricerche matematiche, seguì una giusta reazione nella stessa Germania contro l'oblio immeritato verso quest'uomo, che morì professore di una scuola secondaria. Noi non osiamo però di essere ancora entusiasti dell'analisi suddetta, forse perchè non la possediamo abbastanza, pur ammirando l'alto valore delle idee che qua e là sono sparse nell'opera citata, imperocchè i suoi stessi ferventi sostenitori, e fra i quali anche di illustri, non hanno dimostrato ancora coi fatti l'importanza del metodo Grassmanniano nella ricerca scientifica a preferenza del metodo sintetico e del metodo analitico, che oggidì tengono il campo. E sarebbe interessante fosse fatto uno studio storico e critico dell'analisi suddetta in relazione ai metodi di Möbius di Bellavitis e di Hamilton, il quale dimostrasse tutti i vantaggi ottenuti con questo metodo, e quali si possano ripromettersi. Per le ragioni dette nella prefazione siamo però in ogni caso contrari nell'insegnamento degli elementi a qualsiasi formalismo o meccanismo che sostituisca sistematicamente e possa menomare se non annientare una delle più belle facoltà dello spirito, l'intuizione spaziale, il cui aiuto nello studio scientifico degli elementi va inteso nel senso da noi spiegato.

Un nuovo indirizzo nello studio dei tre sistemi di geometria più volte nominati è quello tracciato da Flie S. Marie nel suo libro citato. Egli, partendo dalla considerazione che nell'indefinitamente piccolo vale la geometria Euclidea indipendentemente dall'assioma delle parallele, come aveva osservato già Lobatschewsky stesso, ottiene per integrazione la geometria Euclidea e la non Euclidea, supponendo però la retta infinita. Questo indirizzo fu seguito anche dal sig. Killing con spirito più critico e geometrico nel suo libro «Ueber die Nicht-Eucl. Raumformen» e senza la condizione suddetta. Abbiamo già avuto occasione di citare questo libro interessante. Vi si trovano trattati anche gli iperspazî in gran parte col metodo analitico.

In una memoria precedente [1]) Killing aveva dimostrato che escluso l'assioma della retta infinita e quello delle parallele le forme Euclidea e non Euclidee conosciute sono le sole possibili pel campo reale.

Si suppone però con questo metodo che il movimento di una parte dello

1) Die Rechnung in den Nicht-Euclid. Raumformen. Giorn. di Crelle, vol. 89.

spazio determini un movimenio di tutto lo spazio in sè stesso; mentre Klein nell'ultima sua memoria citata ammette l'ipotesi opposta, come ciò si verifica sulla superficie dello spazio ellittico trovata da Clifford. A questo proposito osserviamo che tutti gli assiomi i quali esprimono delle proprietà fuori del campo d'osservazione o dell'intuizione possono essere sottoposti ad una discussione simile a quella del postulato delle parallele, e possono dar luogo ad ulteriori e importanti ricerche.

Descartes [1]) e Leibniz [2]) ebbero per primi l'idea di rappresentare tutti i concetti mediante un sistema di segni deducendoli da un dato numero di essi e per dedurre colla combinazione e colle regole di questi segni non solo le verità già conosciute ma eziandio altre di nuove. Leibniz ne tentò anzi qualche applicazione alla geometria.

Con questa idea si collega intimamente il calcolo della logica deduttiva, i cui principî furono formulati dapprima in un corpo di dottrina dall'inglese G. Boole, e sul quale l'opera più recente e completa è quella di E. Schröder [3]). Primo scopo di questo calcolo è quello di evitare nella discussione dei principî della logica le imperfezioni che provengono dal linguaggio comune, ove spesso processi differenti logici vengono indicati collo stesso vocabolo, mentre altre volte processi uguali vengono indicati con vocaboli diversi. Perciò i concetti e le operazioni si indicano con segni, i quali devono avere un solo significato, e mediante determinate regole si deducono dai principî ammessi, ridotti al minor numero possibile, altre verità logiche. Questa teoria non si può dire compiuta, come osserva il sig. Schröder, perchè la logica delle relazioni, che è la più difficile, è ancora nello stato primordiale di sviluppo.

L'interesse teorico di una tale dottrina nello studio della logica non ci pare si possa contrastare, ma bensì che se ne esageri l' importanza sia nell'esercizio pratico della logica, sia nella sua sostituzione al linguaggio comune, di cui del resto si fa uso più o meno abbondante per spiegare e fissare il significato dei segni stessi, e il quale d'altronde è il sistema di segni più completo e più naturale per esprimere i nostri pensieri. Quali matematici, vediamo con compiacenza i tentativi intesi ad applicare i processi matematici alla logica e alle altre scienze; lo stesso Leonardo da Vinci con quell'intuito che lo ha reso uno dei più grandi genî, se non il più grande, del rinascimento, riconobbe che le scienze tanto più sono vere quanto più si informano ai metodi della matematica [4]). Noi non possiamo però entrare in particolari e neppure mostrare da quali principî parte la logica deduttiva per stabilire il calcolo logico; ciò ci condurrebbe troppo lontani dal nostro scopo. Però dobbiamo osservare che non è esclusa la possibilità di diversi calcoli logici secondo i principî e le operazioni da cui si parte. Per esempio noi ci siamo occupati nel cap. I dell'introduzione delle nozioni comuni, senza voler proprio trattare della logica; ma egli è ben certo che nell'ordine delle nostre idee, che riteniamo naturalmente il migliore per raggiungere i nostri

---

1) Epistolæ I, 111 Amsterdam 1682.
2) l. c.
3) Vorlesungen über die Algebra der Logik; Leipzig, 1890.
4) Trattato della pittura ed. 1890,

scopi, il calcolo attuale logico non ci avrebbe servito. Inoltre non è escluso che anche col linguaggio comune, con la debita attenzione non si possa giungere ad un' esposizione chiara dei principî e delle operazioni della logica stessa che occorrono per stabilire i concetti fondamentali della matematica. Noi non possiamo esaminare questo calcolo che nelle sue applicazioni che furono fatte nello studio dei principî della matematica e in particolare della geometria, specialmente dall'egregio prof. Peano [1]). E dobbiamo esprimere subito la nostra convinzione che anche se si avesse un linguaggio completo di segni logici per esprimere tutte le verità conosciute delle scienze matematiche nell'ordine che ci pare migliore e atto ad esprimere con semplicità le nuove, vi sarebbe sempre una differenza notevolissima tra l'interesse logico di questo sistema di segni e l'interesse matematico. Nè vediamo per ora ragioni scientifiche sufficienti perchè un tale sistema di segni debba sostituire sistematicamente nell'esposizione non solo delle ricerche superiori, dove già anche nella geometria i vocaboli si riducono, se ben si guarda, a ben pochi; specialmente poi se si usa il calcolo numerico; ma neppure nelle questioni dei principî stessi. La questione che un vocabolo abbia significati logici diversi, ad es: *è*, *o*, *e* ecc. è spesso per la matematica una questione di pura forma. In matematica anzi non di rado occorre usare delle locuzioni abbreviate che possono essere interpretate in modi diversi stando al significato delle singole parole, come ad es: *uno*, *qualunque, dimostrazione analoga alla precedente* ecc. per non cadere appunto in pedanterie senza necessità. Per il matematico basta che dal contesto della proposizione risulti ben chiaro il senso che l'autore ha voluto attribuirgli, senza bisogno che sia rigorosamente determinato dalle singole parole quando non vi è una necessità matematica. Egli è certo che la forma vuol essere più che sia possibile esatta, e non potremmo mai approvare che si dicesse ad es. che «2 e 3 sono 5», ma non bisogna esagerare perdendo di vista le questioni di maggior momento [2]). Da nessuno fu dimostrato che vi siano proposizioni di matematica che non si possano esprimere esattamente col linguaggio comune, perchè se non altro basterà sostituire ai segni logici i vocaboli coi quali si fissa il significato dei segni o completando il linguaggio stesso; mentre è per lo meno incerto se si possano esprimere tutte le relazioni matematiche coi segni logici conosciuti.

Bisogna badare che nelle scienze il linguaggio non è che un mezzo non lo scopo, e che il problema scientifico più difficile ed anche più importante è quello appunto di stabilire le ipotesi da cui si parte e di passare da esse a nuove verità. Nello svolgimento del pensiero serve meglio a tale scopo il linguaggio comune, il quale meglio si adatta ad esprimere le idee scientifiche e a collegare i principî delle varie scienze fra loro. Occorre infatti che il pensiero non sia ostacolato

---

1) l. c. I principii della geometria logicamente esposti. Torino 1889.

2) Ad una questione più di forma che di sostanza va considerato l'unico appunto che il sig. Peano fa al sig. Pasch cioè che questi anzichè dire «due punti determinano un segmento rettilineo» doveva dire «due punti distinti ecc.» mentre risulta chiaramente dal contesto del discorso che così appunto vuol dire il sig. Pasch senza considerare poi che due punti in generale nella geometria non sono coincidenti, come lo sono due numeri uguali nell'aritmetica. A questioni di pura forma appartengono anche le traduzioni che il sig. Peano ha fatte in segni logici delle proposizioni di qualche libro degli Elementi di Euclide, che meglio di altre si adattavano ad essere tradotte nei segni suddetti.

dal mezzo di cui si serve, mentre nello stato attuale delle applicazioni del calcolo logico il pensiero per comodità dei segni è obbligato a seguire una via piuttosto che un'altra. I mari di parole che non significano nulla non dipendono dalle imperfezioni del linguaggio ma dalla vacuità delle idee. Ma anche se il sistema dei segni logici fosse completo, eccetto che non ne fosse dimostrata la necessità o la grande utilità, non sarebbe opportuno nel senso che esso invoglierebbe molto meno allo studio della scienza per le difficoltà che si incontrano nel maneggio del nuovo linguaggio. Noi comprenderemmo l'applicazione del sistema di segni alla trattazione dei problemi matematici, se come quello numerico servisse con regole determinate e feconde a passare da date verità ad altre nuove importanti. D'altronde con esso non si evitano neppure con rigorosa certezza almeno per ora i difetti che possono derivare dall'uso dell'evidenza nelle dimostrazioni [1]).

Non neghiamo che quando sia possibile usare questi segni e quando si abbia una certa abilità nel maneggio di essi si possa con maggior sicurezza indagare le parti semplici di date dimostrazioni e di date proprietà, e neppure vogliamo negare che la logica deduttiva possa servire con ulteriori sviluppi a trattare alcune parti delle questioni dei principî meglio che col linguaggio comune, forse anche di stabilire una specie di lingua ufficiale per l'esposizione delle ricerche matematiche. A quest'ultimo scopo però farebbe d'uopo sopra tutto che gli scrittori di questa logica non dessero il cattivo esempio di scegliere segni diversi per indicare gli stessi concetti, altrimenti per leggere le differenti opere occorrerà in avvenire un dizionario speciale. Osserviamo però che l'idea di scindere le proposizioni matematiche in parti semplici e di ricondurle al numero minore possibile di postulati, non è propria della logica deduttiva, perchè si hanno anche antecedenti esempi dati col linguaggio comune, come per es. quello sui principî dell'aritmetica del sig. Dedekind. Questo nostro libro e la nostra nota citata sul continuo si informano appunto a questo procedimento.

Le osservazioni precedenti sono confermate dall'esame dei lavori citati del sig. Peano, che sono l'ultima espressione di quel metodo che si può chiamare *signicismo*. In quello di geometria egli segue quanto alla sostanza le idee del Pasch, ma si occupa soltanto di quei principî che precedono nel citato libro di Pasch la teoria della congruenza, sebbene sembrerebbe dalla prefazione e dal titolo stesso che dovesse occuparsi di tutti i principî della geometria elementare. E diciamo ciò non già perchè non si possa trattare con molto profitto di una parte soltanto dei principî, ma perchè non avendo trattato di tutti si ha fondata ragione di dubitare che il sig. Peano stesso, così maestro nel maneggio del calcolo logico che gli deve nuovi e interessanti risultati, non abbia ancora potuto applicare il linguaggio dei segni agli altri principî, e rimane più forte il dubbio che volendo trattare di tutti e delle proprietà che da essi derivano si debbano mutare i segni stessi e dare gli assiomi in un ordine diverso per evitare complicazioni nel calcolo logico.

---

1) Vedi Peano op. II, pag. 29-30

Che l'idea sia schiava del segno, almeno per ora, lo si vede nell'opuscolo di geometria dove fin da principio per comodità dei segni si esclude per es. il sistema sferico, ed è forse da attribuirsi alla stessa ragione il fatto che contro l'uso comune egli esclude dai punti che formano il segmento rettilineo gli estremi.

Il sig. Peano indica inoltre nell'opuscolo d'aritmetica per es. l'unità col segno 1, e collo stesso segno indica nella geometria il punto. Prevalendo questo metodo ci pare che si cada facilmente nel difetto rimproverato al linguaggio comune, nel quale spesso un vocabolo indica concetti logici diversi; che anzi qui la cosa si aggrava trattandosi di concetti matematici.

Non entriamo a discorrere in particolare delle modificazioni che il sig. Peano ha introdotte negli assiomi del Pasch. Vi è però una differenza sostanziale fra i metodi dei due autori, imperocchè il sig. Peano non mette alcuna restrizione empirica alla validità dei suoi assiomi, e in ciò ottiene secondo noi un notevole vantaggio, ma egli non si occupa di dire le ragioni per le quali egli li ritiene compatibili fra loro.

Quanto al metodo potremmo fare alcune osservazioni su alcuni degli assiomi del sig. Peano, specialmente sui primi, come anche sull'uso di premettere definizioni e dedurre teoremi che dipendono da assiomi dati più tardi; ma il lettore che legga attentamente questo lavoro potrà farle da sè [1]). Dall'opuscolo sui principî dell'aritmetica, che abbiamo citato nel testo e che ci sembra il migliore, non possiamo qui occuparci. Egli dice altrove [2]) che il vocabolo *aggregato* entra più tardi di quello di *numero* nel dizionario dei bambini e che quindi l'idea di numero è più semplice di quella di aggregato. Sembra qui che senza il nome della cosa il bambino non possa avere il concetto sia pure greggio di essa, il che non è. Io ho veramente osservato nei miei bambini che essi acquistano ben presto l'idea di *uno* e di *più* (molti) oggetti, da cui si ha il concetto di molteplicità, che precede quello di numero; che abbastanza presto essi distinguono il *prima* dal *poi*, che intendono il significato dell'*uguale* e del *diverso* e il significato della preposizione disgiuntiva *o*. Sicuro che i nostri principî sono dati in seguito ad una meditazione sulle nostre operazioni mentali che i bambini e i ragazzetti non fanno.

È lodevole però nei lavori di Peano lo spirito critico, ristretto che sia in giusti e convenienti confini, e lo scopo di ottenere il massimo rigore possibile; e noi aspettiamo che colla sua abilità incontestata nel calcolo logico, per farne apprezzare l'utilità, ottenga importanti risultati tali da giustificare l'abbandono del linguaggio comune, il quale ha ora così grandi vantaggi sia scientificamente che didatticamente sul sistema di segni logici finora conosciuti.

1) Vedi ad es. le proposizioni del § 2 e il teor. 2 del § 5.

2) Rivista matematica apr.-maggio 1891.

Sulle definizioni di spazio e di geometria a n dimensioni e del principio di proiezione e di sezione.

Non crediamo inutile di far conoscere come si è svolto questo concetto della geometria a più di tre dimensioni, acciò si possa coll'aiuto della nostra prefazione e del testo vedere quale posto occupano i nostri lavori e quelli che seguono lo stesso indirizzo in queste ricerche; tanto più che non sempre fu ben inteso il carattere di questi lavori e dei risultati in essi contenuti.

E cominceremo anzitutto dalle definizioni. È difficile rintracciare chi abbia avuto per primo l'idea di uno spazio a tre dimensioni contenuto in uno a quattro dimensioni: da quanto abbiamo detto nella prefazione pare l'abbia avuta il Kant stesso [1]). Così la si trova accennata in una nota del calcolo baricentrico di Möbius, quando questi fa osservare che per sovrapporre due figure simmetriche dello spazio ordinario, abbisognerebbe uno spazio a quattro dimensioni; egli aggiunge però che un tale spazio non può essere pensato (gedacht) [2]).

L'ipotesi metafisica dell'esistenza materiale dello spazio a quattro dimensioni fuori di noi e indipendentemente da noi è contenuta esplicitamente nell'opera citata di Zöllner, mediante la quale egli vuole spiegare, come abbiamo detto, certi esperimenti spiritistici. Ma qui non siamo ancora in geometria, perchè manca in questa idea indeterminata di uno spazio materialmente contenuto in un altro una definizione chiara e puramente geometrica di questo spazio, la quale possa servire di base alle deduzioni geometriche.

La *prima* definizione generale delle varietà di elementi a più di tre dimensioni, come abbiamo osservato precedentemente, l'ha data H. Grassmann nella *Ausdehnungslehre.* Egli dice:

«Per ente estensivo di 1ª specie intendiamo l'insieme degli elementi determi-«nati da un elemento generatore con una variazione continua».

Come abbiamo fatto rilevare nell'introduzione i concetti contenuti in questa definizione non furono precedentemente definiti da Grassmann. Ma è chiaro che egli ha inteso di escludere dapprima il concetto numerico.

Egli dà così la definizione dell'ente estensivo semplice:

«L'ente estensivo semplice viene generato dalla continuazione della stessa va-«riazione fondamentale».

Abbiamo già detto nell'introduzione e parlando del lavoro di Schlegel quanto sia indeterminato questo concetto della *stessa* variazione fondamentale. E poi:

---

1) Da quanto riferisce il sig. R. Zimmermann nel suo opuscolo: Henry More und die vierte Dimension des Raumes — Sitz. Ber. der phil.-hist. Classe der k. Ak. Wien, 1881, il filosofo inglese More del XVII secolo sebbene attribuisse quattro dimensioni al mondo degli spiriti, non ha però mai espressa l'idea di uno spazio di queste dimensioni.

2) Baryc. Calcül-Leipzig, 1827 — opp. Math. Werke, vol. I.

«L'insieme di tutti gli elementi che sono generabili mediante la stessa variazione «fondamentale e la inversa, si chiama sistema di 1ª specie».

Sottomettendo il sistema di 1ª specie ad un' altra variazione fondamentale ottiene il sistema di 2ª specie, e così via.

Per le altre ipotesi che Grassmann fa su questi sistemi, essi corrispondono, salvo il numero delle dimensioni, al sistema ordinario Euclideo. Per lui la geometria è però sempre a tre dimensioni, e nell' *Ausdehnungslehre* l'elemento non ha alcun significato nè contenuto reale.

La nostra introduzione dimostra quanto complessi siano appunto i concetti adoperati da Grassmann nelle sue definizioni, quando non si voglia appoggiarsi al continuo numerico. Al carattere puramente astratto di queste definizioni si informano le nostre del sistema ad una dimensione, di sistema omogeneo e identico nella posizione delle sue parti, e di sistema a più dimensioni. Non premettiamo però, come fa Grassmann, il concetto generale di un sistema continuo ad una dimensione, e neppure lo diamo nell'introduzione. Il campo delle nostre forme astratte è più generale di quello dell' *Ausdehnungslehre.*

Per quanto sappiamo fu primo il Cayley ad usare l'espressione *geometria a n dimensioni*, ma senza dare nè la definizione nè la spiegazione di questo nome [1]. In una nota successiva utilizza il concetto delle varietà analitiche a più di tre dimensioni per ricavare un teoréma dello spazio ordinario [2].

Più esplicitamente noi troviamo l'uso del linguaggio geometrico alle varietà analitiche a più di tre dimensioni nelle definizioni di Cauchy [3], che si riassumono così:

Data una varietà numerica di n variabili indipendenti $x_1, x_2, \ldots, x_n$, ogni sistema di valori $(x_1 \ldots x_n)$ si chiama *punto analitico.* Ogni equazione o più sistemi di equazioni con queste variabili rappresentano un *luogo analitico. Retta analitica* è un sistema di punti analitici, le cui diverse coordinate si esprimono mediante delle funzioni lineari di una fra esse. Infine la *distanza di due punti analitici* è la radice quadrata della somma dei quadrati delle differenze fra le coordinate corrispondenti di quei due punti.

A questa definizione, come si vede, puramente analitica si informano quelle di Salmon, Beltrami, Kronecker, Betti, Jordan, Lie, Klein, Halphen, Darboux ecc. [4] È da osservare però che quesli autori adoperano con più franchezza il linguaggio geometrico, sebbene non usino sempre le

---

1) Chapters in the analytical geometry of (n) dimensions. Camb. and Dublin Math. Jour. t. IV, 1845. pag. 119-127 — opp. Collected Papers vol. I, pag. 55. Egli tratta qui di alcune proprietà di determinanti con n variabili.

2) Sur quelques théoremés de la géométrie de position: Giorn. di Crelle, 1846 opp. Collected Papers, vol. I, pag. 317-321. In questa nota, dopo aver dato un teorema di figure piane ricorrendo allo spazio ordinario; aggiunge. «Il teorema può essere considerato come un fatto analitico che deve avere ugualmente luogo considerando quattro coordinate in luogo di tre. Qui si ha un' interpretazione geometrica che si applica ai punti dello spazio. Si può infatti, *senza ricorrere ad alcuna nozione metafisica rispetto alla possibilità dello spazio a quattro dimensioni, ragionare nel modo seguente* ecc. Del contenuto di questa nota avremo occasione di occuparci ancora.

3) Mémoire sur les lieux géométriques: Comptes Ren. 1847.

4) Salmon: Higer Algebra, 1866; Beltrami (l. c.) — Kronecker — Ueber Systeme v. Funk. meh. Variabeln. Mon. Ber. der Ak. z. Berlin, 1869 — Betti: Sopra gli spazî di un numero qualunque di dimensioni, Ann. di Mat. 1871 — Lie Ueber diejenige Theorie eines Raumes mit beliebig vielen Dimensionen ecc. Gött. Nach. 1871 ecc. — Jordan: Essai sur la géométrie a n dimensions: Comptes Ren. 1872 — Klein (l. c.) — Halphen: Recherches de géométrie à n dimensions (Bull. S. M. de France, 1875).

stesse denominazioni per indicare gli stessi enti analitici. Noto inoltre che nella massima parte dei loro lavori le definizioni sono indipendenti dal postulato delle parallele, e che non sempre essi partono dai medesimi postulati, ma ne conservano tutto il carattere analitico.

Una *seconda* definizione di spazio e di geometria a più dimensioni che si collega con quella dei sistemi di specie superiore di Grassmann è quella di Riemann, seguita con qualche modificazione anche da Helmoltz, Cayley ecc. [1]).

Data una varietà in cui l'elemento di natura qualsiasi viene determinato da *m* quantità variabili indipendenti, e viceversa (colla debita restrizione indicata da Cantor), essa si chiama varietà ad *n* dimensioni.

Quando questa varietà è assoggettata alle leggi dello spazio ordinario, indipendentemente dalle dimensioni, essa si chiama pure *spazio* e *punto* il suo elemento.

Come si vede fra questa e la prima definizione vi è soltanto la differenza che la varietà non è la stessa varietà numerica che la determina, ma la sua esistenza dipende però da questa, che è pure una varietà. Il punto di vista della nostra definizione dei sistemi ad una o a più dimensioni della nostra introduzione è più generale, perchè da essa noi deduciamo anche le varietà numeriche.

Per la seconda definizione, ogni varietà concreta, anche non geometrica, potrebbe essere chiamata col nome di spazio.

Non mancano anche autori che hanno la tendenza di chiamare geometria la teoria di ogni varietà analitica. Gli stessi o altri autori adoperano anche nei loro lavori la parola varietà anzichè *spazio*, la quale, siccome prima mancava l'oggetto geometrico, era più propria [2]).

Ben distinta invece dalle precedenti è la nostra definizione di S_n, cioè:

Dato lo spazio S_3 e un punto *fuori* di esso costruiamo lo spazio S_4, e così analogamente lo spazio S_n, assoggetandolo agli assiomi dello spazio generale.

Noi abbiamo generato il piano, gli spazî $S_3, S_4 .... S_n$ nello spazio generale il cui concetto, come dicemmo, è implicito nella prima pagina del nostro primo lavoro stampato nel 1881 nei Math. Annalen. Qui il punto non è nè un sistema di numeri, nè un oggetto di natura qualsiasi, ma *il punto tale e quale ce lo immaginiamo nello spazio ordinario;* e gli oggetti composti di

---

1) Helmoltz l. c. — Cayley: A memoir on abstract geometry: l. c.

2) Beltrami ha sempre saputo contenere la geometria nei suoi veri limiti. Egli per es. non ha mai detto che la superficie pseudosferica sia il piano di Lobatschewsky, ma che è una rappresentazione di esso; così pure nella sua «Teoria generale ecc.» spiegando le locuzioni geometriche da lui adoperate dice che il lettore ha piena facoltà di non attribuire loro che un significato meramente analitico.

Klein dopo aver data la definizione di varietà numerica ad *n* dimensioni (Math. Ann. Vol. 6) dice «Per $n=3$ gli elementi (e questo è il concetto fondamentale della geometria analitica) possono «essere rappresentati dai punti dello spazio, e la varietà può essere considerata quale un aggregato «di punti. Noi vogliamo qui e in seguito servirsi di questa facile e intuitiva interpretazione per for- «mare da essa quelle idee, che devono essere trasportate nel concetto generale di varietà». Vale a dire egli assoggetta la varietà alle leggi dello spazio ordinario come gli autori precedenti. In questa definizione si accosta più al concetto di Grassmann di non nominare spazio una tale varietà, ma fa però uso di questa e di altre parole geometriche in altri studî su tale varietà (Vedi la mem. Linien geometrie u. metrische Geometrie: Math. Ann. Vol. V).

punti sono oggetti (figure) a cui applichiamo continuamente l'intuizione spaziale combinata coll'astrazione, e quindi il metodo sintetico [1]. Se ogni considerazione geometrica si deve interpretare nel senso che in essa si debba avere sempre la figura dinanzi agli occhi, coll'ultima definizione ma non colle precedenti si ottiene questo risultato.

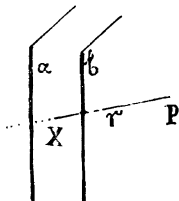
Si possono considerare delle varietà di n variabili indipendenti senza contraddirsi; la dimostrazione puramente logica di ciò, senza ricorrere ad es. a qualche sistema già conosciuto, si trova nello stesso principio dell'introduzione, sul quale abbiamo appoggiata la nostra definizione di spazio generale. E poichè per l'aggiunta sui principî della geometria analitica la nostra definizione si confonde colle precedenti, così agli occhi di coloro che ammettono come inattaccabili le prime definizioni e le loro conseguenze e non hanno l'abitudine di applicare l'intuizione spaziale a queste ricerche, i nostri principî e le nostre deduzioni sono pienamente confermate.

Nella prefazione ho detto anche perchè nelle ricerche superiori per geometria a più dimensioni si possa intendere anche la teoria dei sistemi di continui non lineari.

Quanto al metodo di trattazione, cioè al metodo sintetico, non si può dire sia stato mai generalmente e sistematicamente applicato prima che nei nostri

---

1) Dal capitolo I della parte I nel quale operiamo addirittura nello spazio generale e dalla parte II è chiaro in qual modo noi facciamo uso dell' intuizione spaziale, e come non vi sia dubbio sull'esclusione dei concetti analitici, che stanno invece a base delle altre definizioni, e che le figure a più dimensioni siano differenti dalle forme astratte dell'introduzione. Ma siccome fu mosso il dubbio che o non si possa applicare l'intuizione in tali ricerche o che con essa si vada troppo oltre, così insistiamo nuovamente su questo punto per far vedere come difatti facciamo uso dell'intuizione spaziale; perchè anche qui in gran parte si tratta di abitudine.

Consideriamo ad es. la parte dello spazio intuitivo (parte I, oss. emp. I) racchiusa da due piani paralleli a e b, e supponiamo che essa rappresenti tutto lo spazio a tre dimensioni. Sia P un punto fuori di questo spazio, contenuto però nello spazio intuitivo stesso. Se conduciamo per P una retta r, essa ha nel nostro spazio infiniti punti comuni con la parte (ab), compresi fra i punti A e B d'intersezione con a e b. Ebbene fissiamo di essa un solo punto X comune con lo spazio (ab), e che ad ogni altro punto X di r corrisponda un'altra retta sovrapposta ad r, dimodochè ogni retta passante per P ne rappresenterà infinite, ciascuna delle quali avrà un solo punto comune con lo spazio (ab). Tutte le rette semplici così considerate intorno a P determinano una varietà a quattro dimensioni rispetto al punto come elemento, la quale è una *rappresentazione* nello spazio ordinario di quello a quattro dimensioni. Eseguita una costruzione qualunque nella rappresentazione, essa è l'immagine di una costruzione eseguita cogli elementi corrispondenti dello spazio a quattro dimensioni. Ma questo spazio *non è* le sua rappresentazione in S_3, come si potrebbe credere, imperocché noi immaginiamo che essendo il punto originale (P) *fuori* di S_3 (nel qual caso immaginiamo tutto lo spazio ordinario in base al principio a del n. 37 dell'introduzione), come P è fuori di (ab), ogni retta passante per (P) abbia effettivamente (in senso però geometrico e non metafisico) un solo punto comune con S_3, vale a dire le infinite rette che coincidono in PX sono le immagini delle rette del piano (P) PX; e questo piano noi lo intuiamo come ogni piano ordinario. Gli altri punti d'intersezione della retta PX con (ab) sono soltanto *apparenti*, come succede nella rappresentazione dello spazio a tre dimensioni nel piano. Per rendere più intuitiva la rappresentazione si può tracciare a tratto continuo il segmento (PX) e punteggiato il resto da X nel verso PX. Certo che la illusione non è completa come nella rappresentazione piana, perché dovremmo intuire la retta PX in modo da non avere che un solo punto con (ab), e ciò é impossibile, perchè non intuiamo completamente che lo spazio a tre dimensioni. Ma come questa illusione non è necessaria per la costruzione della rappresentazione piana di una figura a tre dimensioni, non lo è neppure in quella delle figure a quattro o a più di quattro dimensioni nello spazio ordinario. Però, abituandosi per *forza di astrazione* all'idea che la retta PX non abbia che un solo punto comune con lo spazio S_3 trascurando colla mente gli altri punti comuni; od anche che il punto (P) sia fuori di *ogni* piano e quindi di ogni retta dello spazio S_3, il che rispetto al punto e al piano s'intuisce completamente; per l'intuizione di cui insieme con questa astrazione si fa uso continuo, *pare* quasi di avere l'intuizione di questo fatto, mentre esso è il risultato di questa astrazione combinata colla intuizione spaziale.

lavori [1]). Ma ciò che li distingue poi maggiormente è l'applicazione sistematica del principio di proiezione e di sezione, sulla cui possibilità e sui cui vantaggi non vi è alcun dubbio, come non se ne possono mettere in dubbio le applicazioni allo spazio ordinario e al piano [2]).

Vi sono lavori antecedenti ai nostri in cui questo metodo è stato applicato in qualche caso speciale, ma le leggi a cui dà luogo questo principio nello studio generale degli enti geometrici, l'idea di studiare con questo principio gli enti del piano e dello spazio ordinario ricorrendo ad enti normali più semplici di uno spazio superiore, non si trovano che nei nostri e in molti altri che si svolsero poi nel medesimo indirizzo [3]).

---

1) La memoria dei prof. Stringham sui diversi tipi di corpi regolari dello spazio a quattro dimensioni (American J. III, 1880) appare scritta più con metodo sintetico che analitico, ma qui si tratta in fondo più che altro di un metodo combinatorio.

Nella nostra memoria sulla geom. descrittiva a quattro dimensioni abbiamo dati i metodi generali per costruire non solo le proiezioni di questi corpi ma di ogni problema dello spazio a quattro dimensioni, metodi di cui abbiamo fatto una breve applicazione nella nostra nota «Di una nuova costruzione delle superficie del 4 ordine dotate di conica doppia. (R. Istituto Veneto, 1884) e che si collega coll'importante lavoro: Études de diff. surfaces du 4 ordre ecc. Math. Ann. XXIV, 1884 del prof. Segre, che ha fatte altre notevoli ricerche su questi argomenti. Ricordo anzi che un mio illustre maestro, il prof. Fiedler, partendo dai principî della mia memoria pubblicata nei Math. Annalen si è pure occupato nelle sue lezioni del 1882 della geometria descrittiva a quattro dimensioni (Zur Geschichte und Theorie der elem. Abbildungsmethoden — Vierteljahrschrift der Zürch. Nat. Ges. 1882).

Più spiccamente intuitivo si può dire il metodo usato dal sig. Rudel nella sua nota «Von den Elementen und Grundgebilden der synthetischen Geometrie: Progr. der k. Gewerbeschule in Bamberg; 1887 — pag. 15-25, nella quale sono contenute le idee di due brevi note precedenti stampate nei Bayer. Blätter dello stesso anno. L'A. parte senz'altro dal postulato che due spazî a tre dimensioni si incontrino in un piano nello spazio di quattro dimensioni, che egli chiama *das All*. Egli rintraccia quali sono le forme fondamentali di I, II e III specie, ma senza occuparsi delle loro relazioni. Egli termina il breve scritto con queste parole: Staudt hat offenbar ein System geschaffen das nicht nur die Geometrie des Imaginären in sich aufzunehmen und vollendet zu gestalten vermochte, das sogar vollständig geeignet *erscheint* von einem ihm ebenbürtigen Geiste unzweifelhaft einst zur einer Geometrie beliebig hoher Dimension ausgebaut zu werden».

Altri lavori prima dei nostri due primi non conosciamo nei quali tale geometria sia stata trattata col metodo sintetico.

2) Contro l'articolo citato del prof. Segre stampato nella Rivista di Matematica di cui è direttore il prof. Peano, questi credette opportuno di iniziare una polemica (fasc. 4-5 pag 66-69 e fasc. 6 7 pag. 154-159) parte della quale è rivolta contro gli iperspazî nel senso da me inteso e specialmente contro l'uso del metodo di proiezione e di sezione non solo dagli iperspazî allo spazio ordinario, ma eziandio dallo spazio ordinario al piano. Il sig. Peano ha torto nella forma e nella sostanza, ma per quanto non sia difficile rispondere alle sue affermazioni, siccome egli accusa di mancanza di buon senso quei geometri che non possono pensare come lui (l. c. pag. 157) è resa così impossibile ogni dignitosa e amichevole discussione Io sono convinto che le questioni sui principî della matematica, e specialmente della geometria siano già di per sè abbastanza difficili senza che vi sia bisogno di aggiungervi nuove difficoltà di altra natura con polemiche appassionate e intolleranti, come sono altresì convinto che certe critiche pel modo con cui son fatte portano chiaramente in sè la loro condanna.

3) Cayley nella II nota sopra citata considera un certo numero di punti nello spazio a n dimensioni e tagliando la figura di essi collo spazio ordinario, ottiene una figura appartenente a quelle che noi abbiamo chiamato omologiche, ma non dà in questo caso speciale neppure la dimostrazione della proprietà inversa. Halphen nelle sue Recherches de Géométrie à n dimensions (l. c.) trova con una proiezione speciale il numero minimo di punti doppî apparenti di una curva d'ordine n nello spazio ordinario. Un altro caso interessante lo dà il Darboux (Sur une nouvelle série de systèmes orthogonaux algébriques: Comptes Ren. 1869). Da un sistema triplo di superficie ortogonali, mediante una proiezione stereografica, ottiene un sistema di curve piane ortogonali. Ed egli dice: Se si esaminano le operazioni analitiche con le quali si passa a un sistema di tre variabili, si osserva che queste operazioni conservano un senso ben definito, e sono ancora possibili allorquando si impiega in luogo d'un sistema di superficie ortogonale di tre variabili x, y, z, un sistema ortogonale di n variabili. È facile stabilire, egli dice, con tutto rigore che esse conducono a un sistema di $n-1$ variabili; *ma queste operazioni analitiche non potrebbero essere interpretate geometricamente, almeno in una maniera semplice, che ammettendo la nozione di uno spazio a più di tre dimensioni. Comunque sia*, si vede che se si conosce un sistema ortogonale di 4 variabili si dedurrà un sistema di 3 variabili, ecc.

Come si vede dunque colla nostra definizione e colle nostre costruzioni questo teorema trova la

Quì non abbiamo inteso di scrivere una monografia su tutti i lavori di geometria a più di tre dimensioni, sebbene per quanto riguarda i principî ne abbiamo parlato precedentemente [1]). Negli ultimi anni queste teorie nell'indirizzo geometrico, in Italia specialmente, hanno trovato valenti cultori. Nè si deve credere, come ho già accennato, che questi lavori si occupino dei soli enti a più di tre dimensioni ma in essi si trovano spesso ricerche importanti anche sugli enti dello spazio ordinario e del piano.

Il linguaggio usato colle due prime definizioni ha dato luogo ad una vivace polemica perchè mancava l'oggetto geometrico. Ora quel linguaggio è pienamente giustificato anche geometricamente [2]).

---

semplice interpretazione di cui parla Darboux. Altri lavori hanno prima del nostro primo utilizzato in un altro indirizzo la geometria a più di tre dimensioni, ad es. il Klein nello studio citato della geometria della retta nello spazio ordinario (Math. Ann. l. c. Vol. 5). Riconosciamo che Clifford nella sua importante memoria *Classification of Loci* (Phil. Trans. of. London M. S. 1879) che abbiamo anche citata nella prima nostra memoria, si è occupato della curva razionale d'ordine n e di quelle di genere p dello spazio a n dimensioni, dando alcuni teoremi importanti su di esse. Ma il carattere dei due indirizzi sono diversi, e Clifford non si occupa del principio di proiezione, nè accenna ai teoremi che da questo principio noi abbiamo ricavato. Le proprietà sono di natura proiettiva, ma non si può dire che nè in questo nè in altri lavori vi si giunga col metodo di proiezione e sezione, dal quale principio prende nome appunto la geom. proiettiva, nè il concetto di curve e superficie normali entra in questo lavoro.

1) A questo proposito, come pure per la geometria non Euclidea si può consultare la lista dei lavori pubblicata da Halsted (American Journ. vol. I e II. fino al 1879), così pure quella di Schlegel pubblicata nel 1886 nella memoria «Ueber Entwikelung und Stand der n. dim. Geometrie mit besond. Berrücksichtigung der vier dimensionalen. K. Leop. Carol Deuts. Ak. der Wiss, Halle. Debbo però osservare che l'egregio autore non ha fatto bene rilevare il carattere e il posto che occupano i lavori dei geometri italiani; parecchi dei quali sono anche dimenticati nella lista suddetta. sebbene egli faccia risaltare i pregi del principio di proiezione.

Nella prima lista si trovano però citati dei lavori d'indole filosofica, che a mio parere dovrebbero essere separati dai lavori matematici. Si può consultare inoltre la monografia di G. Loria (Il passato e il presente delle ricerche geometriche, Genova 1886, tradotta in tedesco da Schütte con una pref. di R. Sturm, Lipsia 1888; e in polacco da Dickstein. Pei lavori pubblicati negli ultimi anni su tali ricerche si possono consultare altresì i Fortschritte der Mathematik di Berlino.

2) Riferiamo alcuni brani di questa polemica, perchè il lettore possa formarsene un'idea.

.... gewiss ist logische Spielerei ein System von vier oder fünf Dimensionen noch Raum zu nennen. Gegen alle solche Versuche muss mann sich wahren; sie sind Grimassen der Wissenschaft, die durch völlige nutzlose Paradoxien das gewöhnliche Bewusstsein einschüchtern und über sein gutes Recht in der Begrenzung der Begriffe taüschen (Lotze, Logik, 217). Bellavitis nella seconda parte della XII sua rivista del R. Istituto Veneto dichiara di essere «tanto cieco per non iscorgere gli spazî a quattro, cinque ecc. n dimensioni. E nella rivista X (1871) in una critica alla memoria citata di Betti egli dice: «L'analogia ci può trarre a considerare gli spazî a quattro dimensioni, ai «quali si riferisce una funzione $f(x, y, z, t)$, senonchè manca ogni tipo reale ai nostri pensa- «menti».

Noi diciamo invece che mancava l'oggetto ottenuto con una costruzione puramente geometrica, al quale potesse essere applicata la funzione $f(x, y, z, t)$, quando però l'oggetto stesso non si considerava compreso nello spazio intuitivo stesso.

Es werden in philosophischen Schriften geradezu haarstraübende Dinge von der sogenannten metamathematick erzählt (E. Erdmann, l. c.).

Ma è ben certo, che la nessuna cura posta dai matematici nel circoscrivere il campo delle loro ricerche è stata la cagione prima di simili malintesi (Masci. Le forme dell'intuizione-Chieti, 1880).

La confusione derivò appunto da ciò che mancava alla geometria a più di tre dimensioni propriamente detta la sua base naturale, la costruzione cioè dei suoi enti, a cui deve appoggiarsi il metodo analitico quando fa bisogno, come il Descartes applicò alla geometria ordinaria la sua grande invenzione.

«Per me le questioni relative agli spazî ad un numero qualunque di dimensioni non sono che «delle questioni di analisi .... Io non contesto l'utilità di questa nuova via aperta all'analisi, sola- «mente si avrebbe torto di lasciar supporre che si creda alla realtà del significato geometrico dei «nomi impiegati. Si spoglia così la geometria di ciò che forma il suo miglior vantaggio e la sua bel- «lezza particolare, della proprietà cioè di dare una rappresentazione sensibile ai risultati dell'ana- «lisi, e si sostituisce questa qualità col difetto contrario, poichè dai risultati che non avrebbero «niente di urtante sotto la loro forma analitica, non offrono più presa allo spirito, o sembrano as- «surdi quando si esprimono con una nomenclatura geometrica supponendo dei punti, delle linee e de-

Sul movimento senza deformazione [1])

Il testo dimostra chiaramente che noi non abbiamo avuto bisogno del principio del movimento dei corpi rigidi per lo svolgimento della geometria, ma solamente per le pratiche applicazioni di essa; e che un tale indirizzo anzichè complicare semplifica la teoria dell'uguaglianza delle figure. Nel testo stesso si è veduto come anzi si possa definire astrattamente il principio del moto dei corpi rigidi o senza deformazione, e svolgerne le prime conseguenze, che appunto sono necessarie per le pratiche costruzioni.

Ma nella nota a pag. 239-240 abbiamo pure accennato che in fondo lo stesso principio del movimento senza deformazione si appoggia sul concetto di uguaglianza quando si vuole spiegare che cosa significano queste espressioni.

Nella prefazione ho formulato una specie di accusa contro questo assioma comunemente ammesso nei trattati elementari, la quale si scinde in due parti; l'una matematica, l'altra d'indole più psicologica che matematica. Certamente che una tale questione nulla ha che fare col testo stesso [2]).

Il principio del movimento senza deformazione secondo la nostra condizione VI sugli assiomi geometrici equivale ad ammettere in senso astratto, come si vede pure analiticamente, dei sistemi di figure uguali nello spazio ordinario, o in un altro spazio, mentre l'uguaglianza di due figure in sè, come quella di due cose qualunque, è indipendente dai sistemi continui e dalle dimensioni dello spazio particolare che le contiene. E non solo si ammettono questi sistemi per es. per la retta, ma per ogni figura data, mentre le proprietà dei sistemi di figure invariabili in un dato spazio, e che, come abbiamo veduto, servono di base al principio anzidetto, li abbiamo trattati dopo conosciute le altre proprietà fondamentali della retta, del piano, dello spazio a tre o a n dimensioni.

L'intuizione spaziale può considerarsi inoltre indipendente dall'intuizione del movimento, anche se questa serve a formar quella. Poichè, quando guardiamo gli oggetti che ci circondano senza che nessuno di essi si muova, e senza che si muova il nostro occhio, o almeno senza accorgerci del loro movimento, abbiamo ugualmente l'intuizione del vuoto che ci attornia. E poichè la geometria si occupa dello spazio vuoto, che è immobile, sarebbe per lo meno singolare che fosse necessario ricorrere al movimento reale dei corpi nella definizione e nella dimostrazione delle proprietà dello spazio immobile. Se

---

«gli spazî che non hanno alcuna esistenza reale, e di cui la supposizione ripugna al buon senso o oltrepassa la nostra intelligenza» (Genocchi: Mem. dell'Acc. di Torino l. c,).

Il prof. Killing nel suo libro citato in alcune parti si accosta al nostro metodo e tratta di alcuni argomenti svolti nella nostra prima memoria riportando il capitolo relativo ai caratteri delle curve, ma in una nota alla fine egli dice che col metodo sintetico, secondo lui, si è oltrepassata la giusta misura. Veramente non ha detto chi l'ha oltrepassata e in qual modo; in ogni caso essa non si può riferire, quanto al metodo, ai nostri lavori.

1) Questo scritto presuppone la cognizione di quanto abbiamo detto nella prefazione e dei principî del testo che riguardano questo argomento.

2) L'attento lettore dovrà sempre badare a queste distinzioni in tali questioni.

lo spazio in cui avviene il movimento non avesse la proprietà di essere, come noi diciamo identico nella posizione delle sue parti, il movimento senza deformazione non potrebbe aver luogo, mentre è possibile pensare che non abbia luogo questo movimento e lo spazio goda ugualmente la proprietà suddetta.

Di più, come risulta dall'analisi minuta alla quale abbiamo assoggettato nell'introduzione il principio d'identità e le sue conseguenze per le forme astratte e quindi anche per le forme concrete; l'idea d'identità di due cose, e perciò anche di due figure, nasce dal *confronto* che la nostra mentre fa tra esse. Ora, l'idea del movimento di un corpo è estranea a questo concetto, ma non già quella del moto senza deformazione, perchè un corpo nel movimento può anche deformarsi, anzi sappiamo che si deforma, sia pure insensibilmente. Il *giudizio* che noi esprimiamo che il corpo nella posizione A è identico al, o ad un, corpo nella posizione B, si appoggia adunque sul principio d'identità. In questo senso sono dati i nostri assiomi III e IV. Secondo questo modo di spiegare il movimento senza deformazione, e non ne conosciamo nè sappiamo immaginarne altri, vi è una petizione di principio nella proposizione che due corpi sono uguali quando si possono sovrapporre con un movimento senza deformazione. In ogni caso non è permesso di dire, come avviene nella più parte dei trattati elementari che se due figure non possono sovrapporsi nel modo suddetto, esse non sono uguali. Così si restringe il concetto dell'uguaglianza facendolo dipendere dalle dimensioni dello spazio in cui le figure sono contenute [1]), mentre ricorrendo ad uno spazio di una dimensione di più si possono far coincidere anche col suddetto principio. Avendo noi stabilite le basi della geometria addirittura nello spazio generale, l'uguaglianza delle figure avendo luogo in questo spazio, la restrizione suddetta risalta maggiormente agli occhi. Di più, dalla costruzione dello spazio ad es. di quattro dimensioni si devono dedurre tutte le sue proprietà, e quindi anche quelle relative all'uguaglianza delle sue figure senza nessun principio estraneo alla costruzione medesima. Ed è infatti per la considerazione degli iperspazî, per i quali non abbiamo una rappresentazione sensibile completa, che abbiamo riconosciuto la possibilità e la necessità di escludere il principio del movimento dai principî della geometria teoretica.

È inoltre da osservare che mentre col solo principio del movimento senza deformazione si può dire che due triangoli considerati in sè sono uguali quando i loro elementi di determinazione sono uguali, non si può dire altrettanto di due triedri comunque situati nello spazio ordinario, perchè possono avere tutti i loro elementi di determinazione uguali e non essere sovrapponibili. E si badi che fra questi elementi di determinazione noi consideriamo anche l'ordine in cui sono poste le parti delle figure stesse, il quale però non è da confondere col verso della figura rispetto allo spazio ordinario. Il verso

1) Vedi introd oss. I, n. 112. Come dissi nel testo molti scrittori di trattati elementari ritengono che due triedri opposti al vertice non sono uguali, mentre anche volgarmente, ad es: la mano destra si dice uguale alla mano sinistra e la immagine di un oggetto in uno specchio è geometricamente uguale all'oggetto stesso.

D'altronde non è neppure empirica la definizione suddetta, perchè praticamente per vedere se due corpi sono uguali non si fa penetrare l'uno dentro l'altro, ed anche non si usa un tale metodo per grandi superficie piane, o che non sono trasportabili.

è un contrassegno che non appartiene alla figura in sè, ma soltanto quando la si considera immersa nello spazio S_3 (o Sn), come non è un contrassegno del triangolo il verso che ha nel piano di esso. Nello spazio generale non vi è la distinzione dei versi, e quindi non vi è neppure la distinzione di figure congruenti e simmetriche [1]).

---

1) Secondo Helmoltz, come dissi nella prefazione, la geometria ha bisogno della rigidezza e di una certa libertà di movimento dei corpi. E da quanto egli dice (l. c. pag. 621) è escluso che egli intendà la necessità di questi concetti soltanto per le pratiche applicazioni. Questa distinzione fra la geometria teorica e le sue pratiche applicazioni, per quanto sappiamo, non è stata fatta da alcuno prima di noi.

Höüel (l. c. pag. 70) sostiene che è in seguito ad una confusione di idee che parecchi geometri vogliono bandire la considerazione del movimento dagli elementi della geometria. È del resto, egli dice, quello che fanno inconsapevolmente a loro malgrado tutti gli autori, ed è difficile di trovare una sola dimostrazione di una proposizione fondamentale di geometria sotto la quale non si celi la idea di movimento. Anche noi abbiamo fatto uso fin dall' introduzione (nr. 67) del linguaggio del movimento per maggiore comodità di dicitura, sempre però colle debite cautele e spiegando sempre che cosa intendiamo di dire con esso. Il sig. Höüel non ha detto veramente quali siano questi parecchi geometri che si sono proposti di escludere il principio del movimento dagli elementi della geometria e non vi sono riusciti. Si attribuisce agli antichi questo proposito, ma fra essi non mi è riuscito di di trovarne alcuno che abbia voluto esplicitamente escludere questo principio dagli elementi.

B. Erdmann (l. c.), Lindemann (l. c. pag. 556) assicurano che Legendre e Bolyai hanno tentato di escludere il movimento dagli elementi. Gli autori suddetti non hanno citati i passi relativi in cui essi esprimano questo proposito; a me invece consta il contrario, perchè Legendre include esplicitamente il principio del movimento nell'assioma V dei suoi Élements, e ne fa uso, come pure lo adoperano Giovanni e Volfango Bolyai nei libri che io conosco di essi.

B. Erdmann (l. c. p. 148) ritiene, senza provarlo, che la ricerca matematica delle relazioni della congruenza ha dimostrata la necessità del concetto di movimento. Ma egli si appoggia sull'autorità di Helmoltz e di Höüel, i quali a loro volta non hanno dimostrato questa necessità. I filosofi razionalisti combattono invece in generale questa necessità e sono *geometricamente* nel vero. Essi però non l'hanno mai fatto collo svolgimento della geometria. Noi però non diciamo che abbiano ragione *filosoficamente*, chè anzi l'esclusione del movimento dalla geometria teorica nulla significa contro l'origine empirica di essa.

Sebbene Euclide faccia uso tacitamente del principio del movimento senza deformazione, quando può però ha la tendenza di farne senza. Egli dimostra ad es. senza il suddetto principio che due triangoli aventi un lato e due angoli adiacenti uguali sono uguali, così pure dà la costruzione di due triedri uguali, la quale vale tanto per due triedri congruenti quanto per due triedri simmetrici (ed. Heiberg). Inoltre Euclide, è bene notarlo, non dice che se due figure nello spazio ordinario non si possono sovrapporre esse non sono uguali. si può soltanto osservare che non ha detto chiaramente che cosa ha inteso per figure uguali, perchè l' ass. VIII « cose che coincidono sono uguali » non dà una idea chiara di ciò che Euclide ha voluto dire. Il sig. Lindemann (l. c. pag. 556) interpreta questo assioma nel senso del principio di sovrapposizione; ciò può, anzi pare a me debba essere interpretato in modo diverso trattandosi di *cose qualunque* e di *nozioni comuni*.

In ogni caso è azzardato dire, per le ragioni precedenti, che Euclide ed Helmoltz sono in ciò d'accordo, chè anzi per le ragioni suesposte risulterebbe il contrario, anche se Euclide nella geometria piana e più ancora nella geometria solida ha adoperato il principio di sovrapposizione nel senso comunemente inteso.

Legendre fa uso esplicito del principio del movimento, ma distingue poi l'uguaglianza per simmetria da quella per congruenza quando si imbatte in due triedri aventi gli stessi elementi, e che non sono sovrapponibili. Ma anche a lui si possono far gli stessi appunti, perchè ad es. non stabilisce bene quando due triedri uguali lo sono per congruenza o per simmetria. D'altronde anch' egli non si manifesta contrario all' applicazione del principio del movimento. Dire semplicemente come fa lui, che le facce sono *disposte nella stessa maniera*, o come dicono altri *similmente poste*, non significa nulla; e la sua dimostrazione che quando due triedri sono così chiamati coincidono, non è concludente. In altre parole non definisce bene i *versi* delle figure nello spazio.

Altri autori distinguono questa doppia uguaglianza. Per es. Möbius (Baryc. Calcul-Leipzig, 1827 p. 182), così Beltrami (Teor. gen. ecc. p. 238), e specialmente in Beltrami si nota la tendenza ad escludere il movimento dei corpi rigidi dalla geometria. Questa tendenza l'abbiamo notata anche nel libro di de Tilly, mentre poi come abbiamo veduto egli ne fa grandissimo uso. Anche negli assiomi di Grassmann si può riscontrare lo stesso fatto, ma oltre che egli non ha ben definiti i concetti che servono alla generazione delle forme continue astratte, non ha svolto il concetto di uguaglianza in modo da renderlo utile nelle ricerche geometriche; nè ha svolto sufficientemente i suoi assiomi per poter conoscere le sue idee in proposito. Come già dissi altrove le idee indeterminate in tali questioni valgono poco o nulla se non si fa vedere che effettivamente possono attuarsi. Più spiccatamente questa tendenza si riscontra nei lavori di Klein e di Lie, sebbene essi non abbiano mai manifestato il proposito di escludere il movimento dagli elementi della geometria; al più il Klein nella sua ultima memoria che fu pubblicata contemporaneamente alla nostra nota sul continuo rettilineo (ved. pref.

Sulle definizioni di angoli di due raggi o di due rette aventi un punto comune.

La definizione di angolo è una di quelle che hanno dato più a pensare agli scrittori degli elementi, e per quanto ci consta, nessuna di quelle date da altri soddisfa pienamente. Questa definizione ha dato luogo anche recentemente ad una discussione nel Zeitschrift für math. Unterricht di Hoffmann (1889-90). Le principali definizioni geometriche di questo ente sono le seguenti:

1) Angolo piano è l'inclinazione di due linee nel piano che si incontrano e non sono poste sulla medesima retta. L'angolo si chiama rettilineo se le linee sono rette (Euclide).

Dalla prima parte sono esclusi due raggi situati in linea retta, mentre non sono esclusi ad es. due archi della stessa circonferenza con un estremo comune. Di più che cosa sia l'inclinazione non si sa.

2) Allorchè due linee AB, AC si incontrano, la quantità più o meno grande per cui esse linee sono distanti l'una dall'altra rispetto alla loro posizione chiamasi angolo ecc. (Legendre).

A questa assomiglia nel concetto quella di Schlegel (l. c.) secondo cui l'angolo è la differenza di direzione delle due rette.

3) Da molti si definisce l'angolo come grandezza o misura della rotazione di un lato sull'altro nel piano (ad es. Sannia e D'Ovidio l. c.). Ma oltre che si fa uso del piano, in senso astratto non si sa che cosa sia la ro-

---

pag. 1) egli dice che si può *cominciare* a trattare la geometria colle proprietà *ottiche* anzichè con quelle *meccaniche*. Il Lindemann che segue principalmente come dissi nel suo libro recente lo indirizzo di Klein, sembra anzi che ritenga necessario il movimento, come lo è difatti come io dissi nelle costruzioni pratiche, di guisa che finchè non si fa questa distinzione i sostenitori in massima del principio suddetto sono nel vero, non però nel senso comunemente inteso. Le ragioni per le quali io trovo nei citati autori la tendenza a escludere il movimento sono qneste. Le considerazioni che essi fanno sul movimento per stabilire le trasformazioni che mutano ad es. la conica all'infinito del piano in sè stessa, e le quali lasciano invariata la funzione della distanza fra due punti non sono strettamente necessarie. Soltanto che lasciando cadere quelle considerazioni si cade anche evidentemente per la trattazione dei principî nel più capriccioso artificio; inoltre vi è il guaio che se del concetto di uguaglianza non si fa prima uso per le figure, se ne fa uso nel discorso e nelle formole, dalle quali dipende lo svolgimento dei loro lavori, mentre i concetti analitici sono ausiliari e non necessari per la geometria propriamente detta nel senso spiegato nella prefazione. Ma ad ogni modo questo metodo non ci dà nello spazio generale, per ora almeno, la uguaglianza assoluta delle figure, imperocchè piegando una figura dello spazio a n dimensioni senza stiramento o rottura le linee di ugual lunghezza possono non mantenersi più uguali, sebbene la lunghezza rimanga costante. Queste definizioni, come risulta dal n. 120 dell'introduzione hanno in vista i rapporti di misura delle figure stesse; senza contare poi che si fa uso di tanti concetti non necessari per definire l'uguaglianza di due figure considerate in sè facendola anche dipendere dall'assoluto di Cayley. Del resto in Helmoltz stesso troviamo appoggio alle nostre considerazioni. Egli dice (Ueber den Ursprung und Sinn der geom. Sätze; Antwort gegen Herrn Prof. Land, Wiss. Abh. vol. II pag. 648, e nel suo citato discorso pag. 66):

«Chiamo di *uguale valore fisico* (physisch gleichwerthig) quelle grandezze spaziali nelle quali «in *uguali* condizioni e in *uguali* intervalli di tempo possono sussistere e svolgersi gli *stessi* processi «(Vorgänge) fisici. Il metodo che con adatte e precise regole di misura è il più adoperato per la determinazione di grandezze spaziali di uguale valore fisico è il trasporto di corpi rigidi, come il compasso e le scale, da un luogo all'altro.

Da ciò è chiaro che la definizione dell'uguaglianza fisica di due grandezze spaziali non deriva dal principio del movimento del corpi rigidi, ma che questo è un *mezzo* per la determinazione pratica e quindi approssimativa di grandezze uguali.

tazione o la grandezza di essa. Questa definizione corrisponde però meglio delle altre conosciute all'idea di angolo; la grandezza della rotazione sostituisce la grandezza intensiva del settore angolare secondo la nostra definizione.

4) Altri dicono che l'angolo è la figura formata da due rette o raggi aventi un punto comune (Hoüel, Cassani, de Tilly, ecc.). Secondo questa definizione tutti gli angoli sarebbero uguali, perchè formati da due rette incontrantisi in un punto, che sono uguali. Evidentemente i raggi non bastano senza dire quale figura essi determinano, o quali altri elementi entrano a formarla. Secondo le nostre definizioni due raggi che si incontrano determinano prima la coppia rettilinea (pag. 237), il settore angolare e l'angolo nel fascio, (pag. 291), e gli enti analoghi nel piano (pag. 299).

5) Finalmente si definisce l'angolo come la parte di piano racchiusa fra due raggi uscenti da un punto (Bertrand di Ginevra, Crelle, Baltzer, De Paolis, Lindemann (l. c. pag. 544)) mentre l'angolo nel senso comunemente inteso è una grandezza ad una dimensione, e non a due come è una parte di piano [1].

Osservazioni su alcune dimostrazioni contro l'infinito e l'infinitesimo attuale.

Gauss scrivendo a Schumacher [2]) protesta contro l'uso della quantità infinita determinata, e sostiene che ciò non è giammai permesso nelle matematiche. L'infinito secondo Gauss non è che una *maniera* di parlare, perchè si tratta di limiti, a cui certi rapporti possono avvicinarsi quanto si vuole, mentre altri sono suscettibili di crescere indefinitamente.

È giustissima l'osservazione che fa Gauss contro la dimostrazione di Schumacher, il quale mediante la grandezza infinita determinata vuol dimostrare che la somma degli angoli di un triangolo è due angoli retti senza bisogno del postulato delle parallele, perchè Schumacher non usa bene la grandezza infinita. È pure giusto quanto dice Gauss finchè si rimane nel solo campo finito, cioè che l'infinito e l'infinitesimo sono puramente potenziali; anzi in tal caso noi abbiamo usato nel testo le parole indefinitamente grande e indefinitamente piccolo [3]). Ma dobbiamo pur dire che ciò nulla dimostra contro l'infinito attuale nonostante il grande rispetto che abbiamo verso l'autorità del sommo matematico tedesco.

Bolzano [4]) il quale a malgrado molti difettosi ragionamenti del suo opuscolo ha il pregio come osserva G. Cantor stesso di aver riconosciuta la possibilità dell'infinito attuale, si arresta dinanzi al segmento rettilineo infinito limitato da ambe le parti, e lo combatte.

Veggasi anche la dimostrazione contro questo infinito del prof. Gute-

1) Vedi la nota della pref. pag. XXXI.
2) 12 Luglio 1831; corrispondenza tradotta in francese da Hoüel: Mém. de la Société des sciences de Bordeax, t. IV.
3) Vedi nota pag. 127.
4) Paradoxien des Unendlichen — Leipzig, 1847.

berlet in una lettera diretta a G. Cantor [1]), la quale si riduce a questo. Se si ha un segmento rettilineo infinito limitato (AB), se ne tagli in A un pezzo finito (AX); se si fa poi scorrere il segmento (XB) da X verso A finchè X viene in A, il punto B esce dall'infinito (!), e il segmento (XB) diventa finito, dunque $(AX)+(XB)$ è finito. Siccome nel nostro segmento infinito (AB) esiste un punto X' all'infinito tale che $(X'B)\equiv(AX)$ e valendo la legge commutativa, si ha $(AX')\equiv(XB)$.

Metto poi in guardia qualche lettore frettoloso di non confondere i miei infiniti con quelli del trattato *Élements de la géométrie de l'infini* (Paris 1727) di Fontenelle, già segretario dell'Accademia di Francia, soltanto perchè si usano, ivi come in altro senso si fa anche oggi, le denominazioni di infiniti e infinitesimi di diversi ordini, e si adotta spesso come da noi il segno ∞.

È inutile che qui riportiamo le diverse ed evidenti contraddizioni di questo autore; ci riferiamo alle vadide ragioni colle quali alcuni matematici hanno distrutto il sistema di Fontenelle [2]).

Sarebbe spesso interessante in questa, come in altre simili questioni, il fare una critica alla critica, perchè se certi autori hanno avuto delle idee preconcette, i loro critici non ne sono andati esenti. Non possiamo ad es. seguire Achard e Gerdil nella dimostrazione che essi cercano di dare contro il numero infinito attuale, ma è d'uopo pur riconoscere che sia in Fontenelle (l. c. pag. 30), e più specialmente in Gerdil, è contenuta appunto l'idea del numero ω infinito di Cantor. Gerdil dice infatti a pag. 268, t. IV, l. c.

«La serie naturale dei numeri è infinita in potenza. in quanto che si conce-
«pisce che non vi è alcun numero assegnabile in questa serie, al quale non si pos-
«sano aggiungerne altri sempre con un'addizione interminabile di unità ad unità.
«Questa possibilità di aggiungere continuamente un termine ad un altro senza al-
«cuna fine, è ciò che costituisce l'infinito in potenza. Ora l'infinito in potenza non
«diventa infinito in atto, che quando ciò che si concepisce come in formazione nel-
«l'infinito in potenza, è concepito come già fatto e compiuto. L'infinità attuale è
«per così dire l'esecuzione o il compimento della possibilità che costituisce l'infinito
«in potenza. Dunque la serie naturale infinita in potenza, non può divenire attual-
«mente infinita che concependo che questa possibilità di addizione di numero a nu-
«mero sia interamente compiuta».

Questa è l'idea di G. Cantor quando dice: «sarebbe contradditorio di parlare di un numero massimo della serie (I) dei numeri naturali; tuttavia si può immaginare un nuovo numero, che chiameremo ω, e che *servirà a esprimere che tutto l'insieme (I) è dato secondo la legge nella sua successione naturale* [3]), o come un ente già formato (vedi la nostra nota p. 103).

Gerdil continua così:

---

1) Zeitschrift für Phil. von Fichte, Vol. 91 fasc. I, pag. 99 opp. Zur Lehre von Transfiniten-Halle 1890.

2) Maclaurin — Treatise of Fluxions, 1742; trad. francese di Pezenas, 1749: intr. pag. XLI-XLV; card. Gerdil Opere edite e inedite: Roma, 1806, t. IV, pag. 261 e t. V, pag. 1. La memoria stampata nel tomo V intitolata «De l'infini absolu consideré dans le grandeur» è stata prima pubblicata nelle Miscellanea Taurinensia degli anni 1760 1761; Achard — Réflexions sur l'infini mathématique — Acad. roy. de Berlin, 1745.

3) Ad es. Acta math. Vol. 2, pag 385.

«E siccome non vi è alcun numero possibile che non entri nella serie naturale «(*e questo è l'errore*), perchè non vi è alcun numero che non possa essergli aggiunto, «affinchè questa serie diventi infinita in atto, bisogna anche che non vi sia alcun «numero possibile che non si concepisca attualmente aggiunto. Dunque questa serie «non può essere infinita in atto, che non comprenda tutti i numeri possibili o tutta «la possibilità dei numeri».

Se Gerdil non fosse stato preoccupato dal dare poi una dimostrazione contro l'eternità dell'universo, avrebbe scoperto facilmente il numero ω di Cantor, come vi sarebbe riuscito anche chi avesse esaminato questa discussione con spirito critico alto e imparziale.

L'abate Moigno nel suo opuscolo: *Impossibilitè du nombre actuellement infini. — La science dans ses rapport avee la foi* (Paris, 1884) nulla dice matematicamente di nuovo contro il numero attuale infinito.

D'un altro genere sono gli infinitesimi di J. Bernoulli [1]), di de l'Hospital [2]) e di Poisson [3]). Bernoulli scrive a Leibniz:

«Dico... infinita et infinite parva non posse demonstrari existere, sed etiam »non posse demonstrari non existere: probabile tamen esse existere. Si omnes ter»minis hujus progressionis $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{8}$, $\frac{1}{16}$ etc. actu existunt, ergo existit infinitesimus (l. c. pag. 402).

E più tardi considerando la serie suddetta:

«Si decem sunt termini existit utique decimus, si centum sunt termini existit «utique centesimus, ..., ergo si numero infinito sunt termini existit infinitesimus».

Evidentemente Bernoulli *non definisce* l'infinitesimo, ma *crede* alla sua esistenza; nè lo dimostra colla serie suddetta; difatti non risulta che da una serie infinita di termini finiti sia determinato l'infinitesimo; e sarebbe poi una contraddizione in termini se esso si supponesse esistente nella serie stessa.

Così anche l'idealista di Du Bois Reymond crede all'infinitesimo ma non lo definisce. Egli dice (l. c. pag. 71, 72).

«La proprietà che il numero dei punti di divisione dell'unità di misura è infi«nito, genera con logica necessità la *credenza* all'infinitamente piccolo»; e per infi«nito egli intende ogni gruppo di elementi illimitato nella rappresentazione che con«siderato indipendentemente dall'esistenza di esseri pensanti oltrepassa ciò che è «misurabile mediante misure fisse (pag. 70)».

I punti di divisione dell'unità ottenuti colla divisione in un numero intero *finito* n di parti uguali sono in numero infinito, e la loro classe è della prima potenza come ha dimostrato G. Cantor, eppure ogni segmento che unisce due di questi punti dati è sempre finito.

Ma anche ogni dimostrazione contro la credenza di Bernoulli manca di base, perchè bisogna dare prima non solo *una*, ma *tutte* le definizioni compatibili con questa credenza dell'infinitesimo attuale (rappresentato da un segmento rettilineo limitato); il che non fu fatto. Abbiamo fatto vedere ad es.

---

1) Leibnitii et Johannis Bernoulli — Commercium philos. et mathematicum. 1745, t. I, p. 370-340.
2) Analyse des infiniments petis, 2 ed. Paris, 1716.
3) Traité de mécanique 2. ed, 1833.

che il nostro infinitesimo non può essere espresso per mezzo dei numeri transfiniti di Cantor.

Certo è che senza una definizione di un' idea, che può avere interpretazioni diverse, si cade facilmente in contraddizione.

Dobbiamo aggiungere però che nulla vediamo si possa dire contro la possibilità degli infinitesimi di Du Bois Reymond e di Stolz.

Il marchese de l'Hospital non dà nella sua *Analyse* una definizione dell'infinitesimo, ma assume come postulato che «due grandezze finite che differiscono d'un infinitesimo sono uguali» come fa per definizione l'idealista di Du Bois Reymond, mentre codesta è una proprietà che noi abbiamo dimostrato pei nostri infinitesimi. E a proposito di questa proposizione dirò che sia i *credenti* nell'infinitesimo, come anche i loro critici, non hanno ben distinta l'uguaglianza relativa da quella assoluta; concetto che si svolge fin dalle prime pagine del nostro testo.

Poisson finalmente dà questa definizione (l. c. pag. 16):

«Un infinitamente piccolo è una grandezza minore di ogni grandezza data della «stessa natura«.

Questa proposizione contiene evidentemente una contraddizione in termini.

P. Mansion nel suo *Esquisse de l'histoire du calcul infinitesimal* combatte l'infinitesimo attuale, che chiama *pseudo-infiniment petit,* ma egli si appoggia alla definizione di Poisson. Da quanto abbiamo detto sopra non è giusto attribuire a Bernoulli la stessa definizione di Poisson, come fa Mansion, almeno sino a prova contraria (l. c. pag. 30).

Abbiamo già parlato nell'introduzione della incompleta dimostrazione contro l'infinitesimo attuale rappresentato da un segmento rettilineo continuo limitato (*begrenzt* e non *endlich*) del sig. G. Cantor.

Il sig. dott. Vivanti ha pubblicato nella Rivista di matematica del mese di giugno, quando stava per essere stampata questa appendice, un articolo sull'infinitesimo attuale. Io pure ero stato invitato fin dal gennaio scorso dal direttore di quella Rivista di scrivere sul medesimo argomento in seguito ad alcune comunicazioni che io gli aveva fatte intorno alla suddetta dimostrazione di Cantor. Le mie occupazioni per la stampa di questo libro mi impedirono di aderire al gentile desiderio espressomi; d'altra parte la questione era in esso ampiamente trattata. Al sig. Vivanti fin dal decembre scorso, sapendo che si era occupato dei lavori di Cantor, mandai alcune mie osservazioni su quella dimostrazione, chiedendogli se per avventura la conoscesse per intero. Egli mi rispose che non aveva mai avuto prima occasione di occuparsene, come pure risulta dalla comunicazione fatta dal sig. Vivanti stesso al Circolo matematico di Palermo nel giugno 1890 in risposta ad alcune osservazioni del prof. Giudice.

Parlando della dimostrazione di G. Cantor, *senza aver definito prima che cosa sia il segmento rettilineo,* il sig. Vivanti dice che *tutti* i segmenti rettilinei si dividono in due classi, quelli dell'una sono limitati a due punti A e B, quelli dell'altra sono limitati da un solo punto. — I primi li chiama *finiti*, e *infiniti* i secondi (l. c. pag. 137).

Dopo la suddetta definizione con un richiamo egli si riferisce alle definizioni di gruppi di elementi finiti e infiniti di Cantor e Dedekind, che veramente non dice come debbano essere qui applicate per la definizione di segmento finito, dappoichè il segmento rettilineo continuo ordinario è un gruppo di infiniti elementi che come ha dimostrato Cantor è di una potenza superiore alla prima, eccettochè il sig. Vivanti non avendo ben definito il segmento non intenda altra cosa.

In ogni modo è chiaro dalla definizione stessa che un segmento qualunque della retta è o *finito* o *infinito*; una terza ipotesi è esclusa dalla definizione stessa. Egli si fa poi la domanda.

« Esiste un segmento tale che ripetuto un numero finito qualunque grande di « volte, non esaurisca mai un segmento finito assegnato? »

Questo segmento, secondo la definizione che egli dà precedentemente (pag. 137) è *infinitesimo attuale*, vale a dire ripetuto un numero finito qualsiasi di volte non forma giammai una quantità finita qualunque, e quindi perchè qui si tratta di segmenti, un segmento finito qualunque. Ora secondo la definizione sopra riportata è invece o *finito* o *infinito*. Qui per lo meno c'è una grave ed evidente confusione di denominazioni, perchè nel senso anche ordinario infinitesimo non è finito nè infinito rispetto ad un segmento finito assegnato, se non quando l'infinitesimo è preso nel senso di indefinitamente piccolo, il che è escluso in questo caso.

Io chiamo i segmenti limitati della forma fondamentale *finiti assoluti* (intr. pag. 112-113), ma questi possono esse tali che l'uno sia infinito rispetto all'altro, mentre colla sola parola *finiti*, come nel senso comunemente inteso, intendo che lo siano l'uno rispetto all'altro, ossia soddisfino all'assioma V d'Archimede.

La conclusione poi a cui il sig. Vivanti arriva, e cioè che « l'infinitesimo attuale, come grandezza estensiva, cioè rappresentabile mediante un segmento non esiste » non è vera in generale; egli vi arriva colla definizione del continuo ordinario, come del resto ha fatto anche lo Stolz [1]), vale a dire se non in quanto i segmenti limitati rettilinei soddisfano all'assioma suddetto. Se il sig. Vivanti voleva dimostrare la sua conclusione in generale, siccome i principî I-V della mia nota: « *Il continuo rettilineo e l'assioma* V d'Archimede valgono per la retta, doveva dimostrare che il simbolo di molteplicità η del mio principio V è un numero finito; così avrebbe potuto anche persuadersi dell'utilità per lo stesso continuo rettilineo della separazione di questo principio, e quindi anche pel continuo ordinario dell'ass. d'Archimede dagli altri. Ma ciò non ha fatto, e non poteva fare, come dimostrano gli stessi numeri di 2° grado del prof. Bettazzi (l. c.)

Quanto al giudizio che esprime il dott. Vivanti che non vi è cioè alcuna ragione per preferire in senso convenzionale la mia definizione del continuo ordinario data nella nota suddetta a quella di Stolz (accettata con qualche

1) Math. Ann. vol. 31, pag 606.

miglioramento da Bettazzi) abbiamo già detto abbastanza nella prefazione sulle ragioni che la fanno invece preferire a questa. E quanto al giudizio dello stesso che non sia da preferirsi perchè l'assioma d'Archimede non è evidente, non ho che ad appellarmi a tutti i trattati di geometria elementare nei quali esplicitamente o implicitamente prima della definizione del continuo si fa uso dell'assioma suddetto [1]).

Il sig. Pasch stesso che come dicemmo segue il puro empirismo nello stabilire i principî della geometria dà pure questo assioma. Trattandosi di evidenza geometrica mi pare che la storia sia il giudice migliore.

Il dott. Vivanti adduce a sostegno della mancanza di evidenza dell'assioma d'Archimede il fatto che l'esistenza dell'infinitesimo attuale è tuttora ammessa da matematici e da filosofi. Ma caro ed egregio dottore, ciò non prova nulla, imperocchè il detto assioma si riferisce ai segmenti che noi osserviamo esternamente, mentre se esistesse anche *effettivamente* nel mondo esterno il segmento infinitesimo (ciò che noi non abbiamo bisogno di supporre) non lo vedremmo mai insieme coi segmenti finiti.

Quanto alla dimostrazione dell'assioma d'Archimede abbiamo detto abbastanza specialmente nella nota a pag. 198 rispetto ad alcune definizioni del continuo. Qui aggiungiamo che la dimostrazione stessa data da Stolz e da Bettazzi si può rendere inutile, seguendo la stessa definizione della continnità, in modo cioè da far vedere che o la definizione stessa contiene in una *forma* diversa il detto assioma, o in modo che esso sia *immediata* conseguenza di quella definizione.

Difatti: se una classe di grandezze contiene il gruppo P_1 di grandezze nB e il gruppo P_2 di grandezze $A - mB$, comunque grandi siano m e n (essendo m e n interi finiti) e se $(A - mB) - nB$ rimane più grande della grandezza B in tal caso Bettazzi (pag. 30) dice *direttamente* che nella classe vi è un *salto* (secondo Stolz «eine Lücke»).

Secondo Bettazzi (pag. 40) «una classe è *connessa* se non possiede mai gruppi $(P_1 P_2)$ che non conducono nè a successioni nè a *salti*», cioè è escluso il gruppo anzidetto di grandezze, ossia è escluso che $A - pB$ $(p = m + n)$ sia maggiore di B, vale a dire (sempre adoperando una forma diversa per esprimere la stessa proposizione) è esclusa la proprietà contraria dell'assioma d'Archîmede, ossia è ammesso questo assioma stesso. E una classe è secondo Bettazzi *continua* quando è *connessa* e chiusa, vale a dire quando soddisfa all'assioma d'Archimede ed è chiusa. Ora, la dimostrazione di questo assioma data da Stolz, dopo aver dimostrate altre proprietà del continuo stesso, come quella di Bettazzi, si appoggia sulla mancanza di salti.

Non è così ad es. quando dopo data la definizione delle parallele come fa Euclide si ricava poi da tale proprietà insieme colle precedenti che la somma degli angoli del triangolo è uguale a due retti.

In questo senso devono essere interpretate le brevi parole da me dette in principio di quella nota, e che non ho spiegate ulteriormente attendendo la pubblicazione delle osservazioni comunicatemi gentilmente dal prof. Stolz

1) Veggasi ad es. De Paolis: Elementi di Geometria.

stesso nel giugno 1890, e nelle quali era contenuta la correzione al suo principio IV. Rilevo ancora, per non essere frainteso, che in quella nota ho detto di non seguire lo stesso metodo usato in questo libro, perchè è un estratto di uno scritto inviato al prof. Stolz, nel quale, sia per essere meglio inteso, sia per brevità mi sono attenuto al metodo stesso delle sue *Vorlesungen*.

D'altronde tale questione assume soltanto un' importanza quando si danno i principî del continuo indipendentemente dall'assioma d'Archimede, ciò che ho appunto fatto nella suddetta nota e in questo libro, e che quindi si può trattare una geometria assoluta nella quale vi sono segmenti rettilinei limitati che non soddisfano a quell'assioma.

INDICE DEI NOMI [1]

---

[1] Abbiamo tralasciato di citare quei nomi coi quali sono intitolati comunemente alcuni giornali scientifici, come pure quelli di Euclide, di Lobatschewsky e di Riemann quando servono a indicare proposizioni, enti o sistemi geometrici che spesso sono ripetuti nel testo.

Pag.		verso		Errata	Corrige
Pag.	XXII	verso	33	dedursi	dedursi per proiezione
»	47	»	53	Veggasi	Veggansi
»	55	»	4-5	*e*) Se $a \equiv b$ ... Ciò deriva... def. I e II	
»	58	»	24	A e da B	B e da C
»	63	»	28	$(XA) \equiv (X A)$	$(XA) \equiv (X'A')$
»	65	»	26	punto	elemento
»	82	»	46	il solo segmento (AB)	il solo segmento (AB) e i multipli di (AB)
»	83	»	10	identico ad (AB)	identico ad (AB) e i suoi multipli
»	83	»	31	assioma d'Archimede che	assioma d'Archimede e che
»	85	»	22	e all'elemento A	e l'elemento A
»	88	»	22	$(AB)2 > (AB) + (BC)$	$(AB)2 > (AB) + (BC)$ $> (BC) + (AB)$ (*g*, 73)
»	88	»	23	$(AB) + (BC)$	$(AB) + (BC)$ o $(BC) + (AB)$
»	91	»	38	di b'	del teor. b
»	95	»	24	unità	unità (A_1A)
»	105	»	4	; nè può	. Nè (AX) può
»	105	»	57	Vedi 3 nota n. 96	Vedi 3ª nota n. 97 e nota 121
»	113	»	19	di (II),	di (II), di cui la somma rappresenta un numero di (II),
»	114	»	4	proviene	esiste
»	128	»	8	(XX'), $(X'X)$	(XX') o $(X'X)$
»	133	»	8	di (AX)	di (AX) o al più uguale ad uno stato di (AX)
»	133	»	20	(AY) .... (AX)	(AX) ... (AY)
»	144	»	32	(NN_2)	(AN_2)
»	153	»	22	$(AX'_1)(n-1)(AX_1)$	$(AX'_1)(n-1) + (AX_1)$
»	155	»	11	$+$	$\pm$
»	163	»	28	$(X'Y) \equiv 2(X'X'')$	$(X'Y) \equiv (X'X'')$
»	163	»	29	$(X'Y)$	$(X'X'')$
»	165	»	31	numericamente	succestivamente
»	211	»	11	una figura	una sua figura
»	219	»	50	uguali non determinano	uguali possono non determinare
»	221	»	16	ad un segmento (AB)	ad un segmento qualunque (AB)
»	231	»	3	Se i punti della linea semplice di un segmento (AB)	Se i punti di un segmento (AB) della linea semplice
»	231	»	31	può essere costante, perchè	può essere costante, per es. uguale ad α, perchè
»	232	»	4,10,45	int. *d*, 97	teor. III
»	258	»	21	(AC)....A	(RC) ... R
»	259	»	49	pref.	app.
»	261	»	2	dare i medesimi	dare approssimativamente i medesimi
»	265	»	2	opposti	opposte
»	277	»	6	di segmenti	di segmenti uguali
»	278	»	7	sia	è
»	285	»	28	paralleli	paralleli e dello stesso verso
»	299	»	12	sistema	sistema piano
»	311	»	12	$(R'X)$, $(RY) \equiv (R'Y')$	(RX'), $(RY) \equiv (RY')$
»	319	»	33	di un triangolo	di un triangolo, o su due dei suoi lati,
»	321	»	9	Se una retta che non passa per alcuno dei vertici del triangolo	Se una retta
»	342	»	24	di due	a due
»	346	»	38	che la distanza	che se la distanza

Pag.		verso			
Pag.	352	verso	31	rimanenti sono	rimanenti e di questi tre pnnti sono
»	376	»	34	passano	passino
»	377	»	14	dovrebbe	potrebbe
»	379	»	16	normale	normale (*RX*)
»	380	»	4	dei tre	ai tre
»	385	»	14	sulla rettn suddetta	sulle rette suddette
»	389	»	42	piano passante	piano non parallelo al primo passante
»	390	»	1	paralloli	peralleli, e non paralleli ad essi.
»	390	»	6	Se due piani	Se due piani non paralleli
»	391	»	4-5	finito e del campo infinito	finito
»	393	»	11	perpendicolare (teor. I, 73 e def. I)	perpendicolare e inversamente (teor. I, 73; teor. I, 69; teor. VI e def. I)
»	394	»	17	coniugate	coniugate e inversamente
»	397	»	28-29	dei due piani sono due a due uguali e le due figure da essi formate	del piano sono a due a due uguali e le due figure da essi formate col piano
»	410	»	16	def. IV... triangolo	def. V ... tetraedro
»	413	»	36	Dunque i versi dei due	Dunque i due
»	420	»	18	dei rimanenti	coi rimanenti
»	437	»	26	Ogni piano polare	Ogni piano
»	443	»	36	sono retti	sono retti, e inversamente.
»	444	»	14	retti	retti, e inversamente.
»	457	»	1	libro III	libro I
»	457	»	6	specie dello	specie e dello
»	457	»	21	dirò	diremo
»	491	»	26	triangolo	triangolo e di un tetraedro
»	496	»	45	triedro di 2ª specie	suo quadriedro
»	549	»	29	$n-1 \dots n$	$n-2 \dots n-1$
»	563	»	3	Plückeriano nel quale uno	Plückeriano uno
»	565	»	11	esposizione	recensione
»	565	»	28	in questa	su questa
»	569	»	16	dimostrare ciò alcuni	dimostrare alcuni
»	570	»	11	XIII	III
»	582	»	45	non si tratra che	non si tratta